Math. Un. Hässler
65 m - 1

Math. Un. Häsele
65m-1

Johann Friedrich Häſelers

Fürſtl. Braunſchw. Lüneb. Conſiſtorialraths, Abts des Kloſters Amelunxborn, Generalſuperintendentens des Weſer-diſtrikts, der Göttingiſchen Societät der Wiſſenſchaften und der Caſſeliſchen Societät der Alterthümer Correſpondentens.

Anfangsgründe

der

Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie

zum eignen Unterricht

vorzüglich für

Hauslehrer und Gelehrte

welche dieſe Wiſſenſchaft nicht zur Hauptbeſchäftigung machen.

Balbier

Erſter Theil

welcher die Arithmetik und Algebra enthält.

Dritte nach der zweyten Ausgabe abgedruckte Auflage.

Lemgo,
im Verlage der Meyerſchen Buchhandlung, 1802.

Dem
Durchlauchtigſten Fürſten und Herrn
HERRN
Carl Wilhelm Ferdinand
Herzogen und Erbprinzen von Braunſchweig und Lüneburg ꝛc. ꝛc.

Seinem gnädigſten Herzogen und Herrn

widmet dieſes Buch

ehrerbietigſt und unterthänigſt

Der Verfaſſer.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Ich habe in der Vorrede zu dieſem Buche nur wenig zu ſagen; aber ich wünſche doch, daß ſie geleſen werde, ehe man das Buch ſelbſt anfängt. Dieſes Buch erhielt dadurch ſeine Entſtehung, daß ich einigen meiner Freunde die darin enthaltenen Wiſſenſchaften erklärte. Ich wünſchte ihnen recht deutlich zu werden, und ſchrieb daher allezeit das mehreſte auf, ehe ich ſie mündlich unterrichtete. Ich erhielt meine Abſicht, und ſie ſahen die Wiſſenſchaften deſto leichter ein,

 wenn

wenn ich ſie ihnen vortrug. Ich habe geglaubet, keine ganz unnütze Schrift herauszugeben, wenn ich dieſe Betrachtungen über einen Theil der reinen Mathematik drucken lies. Es ſind Gelehrte genug, die es wünſchen, die Hauptgründe der mathematiſchen Wiſſenſchaften zu kennen, um phyſikaliſche Schriften mit Vergnügen und Nutzen zu leſen, und bey vielen im menſchlichen Leben vorkommenden Dingen nicht gänzlich unwiſſend zu ſeyn. Auf Academien haben ſie das Studium der Mathematik ganz hindan geſetzet, oder ſehr ſchlecht betrieben, und dieſes bereuen ſie nachher. Für ſolche Leute, oder auch für Hauslehrer, welche in dieſen Wiſſenſchaften unterrichten ſollen, und nicht gar zu viel davon wiſſen, habe ich dieſes Buch geſchrieben. Ich hoffe, ſie werden der Herrn von Segner, Käſtners, Karſtens und andere Mathematiker Schriften mit Nutzen leſen können, wenn ſie dieſes Buch ſtudiret haben, und weiter

gehen

gehen wollen. Ich ſelbſt habe die Mathematik um der Phyſik willen ſtudiret. Um ein guter Geiſtlicher zu ſeyn, glaubte ich, daß ich mich bemühen müſte, Gott ſo wol aus der Natur, als aus der Offenbarung kennen zu lernen. Aber man lernet die Natur ohne Mathematik nur halb erkennen. Man kann auch wol eine Stunde zum Studiren der Mathematik neben den theologiſchen Wiſſenſchaften übrig haben, wenn man ſeine Zeit gut anwendet, und ſie nicht verträumet, oder blos mit Beſuchen hinbringet. Die Mathematik lehrt richtig und ordentlich denken, und das hat ein Geiſtlicher, der öffentlich reden muß, ſehr nöthig. Man hat nicht Urſache deswegen zu befürchten, daß man einen zu trocknen Vortrag bekömmt.

Ich bin in dieſer Schrift mannichmal etwas weitläuftig geweſen. Oft hat es die Deutlichkeit, welche ich ſehr wünſchte, erfor-

dert. Ich habe mich wenigſtens ſehr darum bemühet; das Urtheil der Leſer wird es entſcheiden, in wiefern ich meine Abſicht erreichet habe. Ich werde das bey einer andern Auflage dieſes Buchs, wenn noch eine andere erſcheinen ſollte, gerne ändern, wo man mich mit Recht und mit Anſtändigkeit tadelt.

Die Ordnung in dieſem Buche habe ich nicht ohne Urſache alſo gemacht; ich wünſchte alles, was zu einer Materie gehöret, zuſammen zu bringen, und daher wird es wol zuweilen ſcheinen, als ob ich manche Dinge in einer andern Ordnung hätte ſagen können, allein man wird bei Durchleſung des Buchs finden, daß ich meine Urſachen dazu gehabt habe, und daß ich nie etwas geſchrieben habe, ohne auf das Vorhergehende Rückſicht zu nehmen, oder daß ich nie Lehrſätze angeführet, ohne die Gründe, worauf ſie beruhen, vorher genugſam

ſam zu erklären. Ich habe in der Arithmetik etwas von einigen Lehren erklärt, welche man wol eben in Anfangsgründen dieſer Wiſſenſchaft nicht ſuchet. Z. E. die Lehre von den Ausdrücken des Unendlichen und die Combinationen. Allein die erſtere erklärte ich aus der Lehre von der Proportion, und bey beiden hatte ich den Gedanken, daß, wenn dieſes Buch Leſer antrift, welche nur ſo viel Mathematik lernen wollen, als ſie nöthig haben, die gewöhnlichen phyſikaliſchen Bücher zu verſtehen, ſie doch auch einige Begriffe von dieſen Dingen haben müſten. So habe ich auch manche Dinge um der Geſchichte willen berühret, von denen manche freylich nicht ſo ſehr brauchbar ſind. Allein man findet doch zuweilen etwas davon, und es iſt gut, daß man Begriffe davon hat, wenn es auch nur hiſtoriſche Begriffe wären.

Ich weis es noch nicht, ob ich die andern Stücke der reinen Mathematik eben ſo bearbei-

ten werde. Wenn dieſe Schrift des Beyfalles der Kenner nicht ganz unwürdig iſt, und ſie ſolches Buch nützlich finden, ſo möchte ich wol die Stunden, die mir mein mühſames Amt, und das Studium der theologiſchen Wiſſenſchaften überlaſſen, dazu widmen. Es wird mir eine ſehr angenehme Belohnung meiner Arbeit ſeyn, wenn Kenner meine Arbeit nicht unnütze halten, und ich werde mich ſehr glücklich ſchätzen, wenn ſie meinen Abſichten, die ich dadurch zu erreichen wünſche, Beyfall geben.

Wolfenbüttel, im April 1775.

Vorrede

Vorrede
zur zweyten Auflage.

Ich habe, bey der zweiten Auflage dieſes erſten Theils meiner Mathematik, in dem Weſentlichen und der Ordnung der Paragraphen nichts geändert, ich konnte auch dieſes nicht thun, weil die folgenden zwey Theile ſich auf dieſen erſten vielfältig berufen, und ſeine Paragraphen darin citiret werden. Aber ich habe ihn durch manche Erläuterungen, Zuſätze und Exempel vermehret,

ret, und wo ich glaubte doch noch nicht deutlich genug geweſen zu ſeyn, mich bemühet, es zu werden. Für den Beyfall, den dieſe Schrift gehabt hat, bin ich meinen Leſern ſehr verbunden. Ich werde mich bemühen, auch in dem vierten und letzten Theile derſelben, welchen ich jetzt ausarbeite, ihn gleichfalls zu verdienen. Holzminden an der Weſer den 2ten Januar 1791.

Ver-

Verzeichnis

des Inhalts der Kapitel dieſes Buchs.

Die Arithmetik.

Das erſte Kapitel.	Die ganze Zahl und ihre Zählung, oder die Numeration.
Das zweyte Kapitel.	Die Addition in ganzen Zahlen und Buchſtaben.
Das dritte Kapitel.	Die Subtraktion in ganzen Zahlen und Buchſtaben.
Das vierte Kapitel.	Die Multiplikation in ganzen Zahlen und Buchſtaben.
Das fünfte Kapitel.	Die Diviſion in ganzen Zahlen und Buchſtaben.
Das ſechſte Kapitel.	Die vier Rechnungsarten in benannten Zahlen.
Das ſiebente Kapitel.	Die Brüche in Zahlen und Buchſtaben.
Das achte Kapitel.	Die Decimalbrüche.
Das neunte Kapitel.	Die Verhältniſſe.

Das

Das zehnte Kapitel. Die arithmetiſche Proportion und Progreſſion.

Das eilfte Kapitel Die geometriſche Proportion.

Das zwölfte Kapitel. Anwendung der geometriſchen Proportion.

Das dreyzehnte Kapitel. Die geometriſche Progreſſion.

Das vierzehnte Kapitel. Etwas von einigen Ausdrücken des Unendlichen.

Das funfzehnte Kapitel. Die Ausziehung der Wurzeln.

Das ſechzehnte Kapitel. Irrationale und unmögliche Größen.

Das ſiebenzehnte Kapitel. Die Logarithmen.

Das achtzehnte Kapitel. Die Combination.

Das neunzehnte Kapitel. Die Gleichungen vom erſten Grade.

Das zwanzigſte Kapitel. Die Gleichungen vom zweyten Grade.

Das ein und zwanzigſte Kapitel. Die cubiſchen und höhern Gleichungen, auch etwas von der unbeſtimmten Analytik.

Die Elementar-Geometrie.

Das erſte Kapitel. Einige allgemeine Betrachtungen über die Geometrie.

Das zweyte Kapitel. Von den Winkeln und einigen ihrer Eigenſchaften.

Das dritte Kapitel. Von den Dreyecken und Parallellinien, auch weitere Betrachtung der geradelinichten Figuren.

Das

Das vierte Kapitel. Die Verwandlung der geradelinichten Figuren.

Das fünfte Kapitel. Die Ausmeſſung geradelinichter Figuren.

Das ſechſte Kapitel. Die Vergleichung des Flächeninhalts der geradelinichten Figuren, von ihrer Aehnlichkeit und vorzüglich von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

Das ſiebente Kapitel. Vom Cirkel.

Das achte Kapitel. Von der Lage der Linien gegen eine Ebene und der Ebenen unter einander.

Das neunte Kapitel. Allgemeine Betrachtungen über die Körper und ihre Oberflächen.

Das zehnte Kapitel. Vergleichung der Körper unter einander und ihre Verwandlungen.

Das eilfte Kapitel. Von der Ausmeſſung der Körper.

Das zwölfte Kapitel. Von der Kugel und den Kugelſchnitten.

Das dreyzehnte Kapitel. Fernere Betrachtungen über Kugelſchnitte.

Die ebene Trigonometrie.

Das erſte Kapitel. Betrachtung der trigonometriſchen Linien überhaupt.

Das zweyte Kapitil. Erfindung und Berechnung der trigonometriſchen Linien, nebſt dem Gebrauche der Tafeln.

Das dritte Kapitel. Die Berechnung der Seiten und Winkel der geradelinichten Dreyecke.

Das vierte Kapitel. Die trigonometriſche Berechnung der Polygone.

Das fünfte Kapitel. Einige praktiſche Anwendungen der trigonometriſchen Berechnungen.

Erklä-

Erklärung der vornehmſten Zeichen, die in der Mathematik vorkommen.

Es iſt meine Abſicht nicht, daß meine Leſer aus dieſer Erklärung die Zeichen, welche in der Mathematik vorkommen, völlig ſollen kennen lernen. Es iſt dieſes Verzeichnis nur ein Regiſter, wo man die Erklärung der hier angeführten Zeichen findet.

+ Das Zeichen der Addition, heißet plus §. 20.

= Das Zeichen der Gleichheit zweyer oder mehrer Dinge, heißet äqual oder gleich §. 23.

— Das Zeichen der Subtraktion, heißet minus. Es bedeutet auch eine dem + Zeichen entgegengeſetzte Größe §. 28.

> Das Zeichen, daß eine Sache größer oder kleiner ſey als die andere, nachdem die Spitze dieſes Zeichens ſtehet; wo die Oefnung hinſtehet, iſt die gröſte Größe §. 36.

. oder × Zeichen der Multiplikation §. 65.

√ Heiſt eine Wurzel. Erſte Erklärung davon §. 90.

: Oder auch ein Querſtrich zwiſchen zwey Größen, als $\frac{a}{b}$ das Zeichen der Diviſion §. 99.

∞ Zeichen des unendlich Großen. Etwas davon §. 112. Ferner §. 294.

$\frac{1}{\infty}$ Zeichen des unendlich Kleinen §. 295.

$\backsim$ Zeichen der Aehnlichkeit. Geomet. §. 28. und §. 141.

$\cong$ Zeichen der Congruenz, oder daß zwey Dinge gleich und ähnlich ſind, auf einander paſſen, einander decken. Geometrie §. 29.

$\#$ Zeichen des Parallelismus zweyer Linien oder Flächen. Geomet. §. 78.

Anfangs=

Anfangsgründe der Mathematik zum eignen Unterricht.

Die Arithmetik.

Das erſte Kapitel.

Die ganze Zahl und ihre Zählung, oder die Numeration.

§. 1.

Es würde würklich überflüſſig nnd unnöthig ſeyn, wenn man hier weitläuftig erklären wollte, was eins ſey. Es iſt dieſes ein Begrif, den ſchon ein Kind ziemlich bald bekömmt, und eine Erklärung darüber würde eine Sache, die man deutlich genug einſiehet, nur verwirret vorſtellen.

§. 2. Wenn man von **einerley** Dingen mehr als **eins** hat, ſo kann man ſie zuſammen zählen. Und man giebt dieſer Menge von Dingen einen Namen, wodurch man anzeiget, wie viel man mehr als ein Ding von der Art hat. Z. E. ich habe **einen** Apfel, und bekomme noch einen dazu, ſo habe ich einen Apfel und noch einen Apfel; das nenne ich zwey Aepfel. Bekomme ich noch einen Apfel dazu, ſo habe ich zwey Aepfel, und noch einen, das nenne ich drey Aepfel, bekomme ich noch einen, ſo habe ich vier Aepfel und ſo weiter.

§. 3. Geſetzt, ich bekäme zu den vier Aepfeln auch noch eine Birn, ſo kann ich nicht ſagen, ich habe fünf Aepfel, ſondern ich müſte ſagen, ich habe **vier** Aepfel und **eine** Birn, ich kann alſo dieſe Dinge nicht zuſammen zählen. Aber warum nicht? Ich ſehe, daß ich dieſe vier Aepfel und eine Birn darum nicht zuſammen zählen kann, weil ſie nicht von einerley Art ſind.

Und da ſollte ich nun wol gedenken, daß ich nicht zuſammen zählen könnte, was nicht von einerley Art wäre. Ja freylich, denn, wenn ich, um noch ein Exempel zu geben, vier einzelne Pfennig und ein Dreypfennigſtück habe, ſo habe ich nicht fünf Pfennig, ſondern vier Pfennige und ein Dreypfennigſtück. Und ſo geht es mit allen Dingen. Alſo: **es laſſen ſich nur Dinge zuſammen zählen, die von einerley Art ſind.**

§. 4. Allein, ich will doch gerne meine vier Aepfel, und die eine Birn zuſammen zählen. Nun gut, wenn das ſeyn muß, ſo wollen wir einmal

auf einen Namen denken, der ſowohl den Aepfeln als der Birn zukommt. Ein Apfel iſt ein Stück Obſt, eine Birn auch. Alſo hätte ich fünf Stück Obſt. Eben ſo iſt ein Pfennig, und auch ein Dreypfennigſtück, jedes ein Stück Geld; wenn ich nun von meinen vier einzelnen Pfennigen, und von meinem einem Dreypfennigſtück, ſagte, daß ſie beyderſeits Geld wären, und ſie dann zuſammen legte, ſo könnte ich ſie zuſammen zählen, und ich hätte fünf Stück Geld, aber nun habe ich ſie auch als Dinge von einerley Art angeſehen.

§. 5. Allein man kann auch wol zählen, ohne eben Dinge vor ſich zu haben, welche man zählet.

Ein jedes Kind weis, das man eins, zwey, drey, vier 2c. fort zählet, ohne eben Dinge zu haben, die man zählet, wenn man ſich auch ſchon in Gedanken ſo etwas dabey vorſtellen ſollte. Man zählet von undenklichen Zeiten her von eins bis zehn; **eins, zwey, drey, vier, fünf, ſechs, ſieben, acht, neun, zehn.**

Dann fängt man wieder von vorne an, und zählet, **zehn** und **eins, zehn** und **zwey, zehn** und **drey** 2c. oder anſtatt deſſen kürzer, **eilf, zwölf, dreyzehn**, u. ſ. w.

Wenn man zweymal **zehn** oder **zwanzig** hat, ſo fängt man wieder von eins an, und zählet wieder bis dreymal zehn, und wenn man auf die Art bis zehnmal zehn gezählet hat, ſo ſagt man, man habe hundert; bey dieſem hundert iſt wieder

ein ganz neuer Abſatz, wo man wieder von eins anfängt, und ſo weiter bis zehn, dann abermal bis hundert auf die alte Weiſe fort zählt. Hat man ſolcher hundert zehne gezählt, ſo nennet man das tauſend, da iſt wieder ein neuer Abſatz; hat man zehn ſolcher tauſend, ſo nennet man das zehn tauſend, und hat man zehn ſolcher zehntauſend, ſo iſt das hunderttauſend, und zehn ſolcher hunderttauſend, nennet man eine Million u. ſ. w. Wir werden uns hierüber in den nächſten Paragraphen noch weitläuftiger erklären.

§. 6. Man nennet die Zahlen, welche man bis zehn zählet, Einer, und wenn man zehn ſolcher Einer zuſammen hat, ſo nennet man das einen Zehner. Alſo eins, zwey, drey, vier, fünf, ſechs, ſieben, acht, neun, zehn zuſammen, iſt ein Zehner. Wenn man zehn ſolcher Zehner hat, deren jeder aus zehn Einern beſteht, ſo nennet man das einen Hunderter, zehn ſolcher Hunderter iſt ein Tauſendter, zehn ſolcher Tauſendter iſt ein Zehntauſendter, zehn ſolcher Zehntauſendter iſt ein Hunderttauſendter, und zehn ſolcher Hunderttauſendter iſt eine Millionter; und ſo weiter.

Man ſiehet alſo, daß zehn Einheiten einer niedrigen Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachen. Denn zehn Einer machten ja einen Zehner, und zehn Zehner einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tauſendter und ſo weiter aus, und die Einer waren ja die nächſt niedrige Ordnung unter den

Zeh

Zehnern, und die Zehner die nächſt niedrige Ordnung unter den Hunderten, und die Hunderter die nächſt niedrige Ordnung unter den Tauſendtern u. ſ. w.

§. 7. Wir wollen das noch durch ein Exempel erläutern, weil nach meiner Meynung die erſten Grundſätze überaus deutlich müſſen begriffen werden, und doch auf dieſen Begriffen alle vier Species zum Theil beruhen. Man ſtelle ſich einen Beutel vor, darin zehn Pfennige liegen, das wäre ein Zehner; man nehme ſolcher zehn Beutel und lege die in einen großen, ſo hat man einen Hunderter; ſolcher zehn Beutel, wie der Beutel der Hunderter war, wieder in einen großen geſteckt, ſo iſt das, was in dem großen iſt, ein Tauſendter; ſolcher zehn Beutel, wie der Beutel, darin tauſend waren, wieder in einen großen geſteckt, ſo hat man einen Zehntauſendter u. ſ. w. Wenn man dieſes Exempel noch weiter ausdehnen will, ſo wird es nicht ſchwer fallen, ſogar einem Kinde Begriffe von den Zahlen und dem Geſetze, nach welchem man zählet, beyzubringen. Man nennet dieſes Geſetz das decadiſche Geſetz, oder das Geſetz der Zehner, weil immer zehn Einheiten einer niedrigen Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachen.

§. 8. Man muß aber nicht nur zählen, ſondern auch geſchriebene Zahlen kennen, und auch ſchreiben.

Wir haben neun einfache Zahlzeichen, die auch von eins bis neun gehen. Sie ſind folgende:

1 bedeutet eins
2 -- zwey
3 -- drey
4 -- vier
5 -- fünf
6 -- ſechs
7 -- ſieben
8 -- acht
9 -- neun

nun haben wir noch ein Zeichen, welches o iſt. Dieſes Zeichen bedeutet **nichts**, es ſtehe, wo es wolle. Es iſt doch aber höchſt nöthig, wie wir nachher ſehen werden. Jetzt konnte ich nun bis neun für die Zahl ein Zeichen ſchreiben; aber wie werde ich es anfangen, wenn ich nun **zehn** in Zahlen ſchreiben will? Man erinnere ſich, daß ich in den vorhergehenden Paragraphen geſagt habe, wie zehn Einheiten einer nächſt niedrigen Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachten.

Wenn man nun bey der Schreibung der Zahlen auch das Geſetz gemacht hätte, daß, wenn eine Zahl um einen Platz etwa von der rechten nach der linken Hand weiter gerückt wäre, ſie alsdenn auch zehnmal mehr gelte, als in dem nächſt niedrigen Platze, ſo könnte ich nach dieſem Geſetze auch zehn ſchreiben. Ich ſetzte nemlich eine 1 um einen Platz weiter von der rechten nach der linken Hand.

Aber woher wüſte ich es denn, daß ſie um einen Platz weiter gerücket wäre, und alſo zehnmal mehr bedeute? Ich mache in den Platz, wo ſie geſtanden hätte, wenn ſie nur **eins** angezeiget hätte, die 0, das heiſt, ich zeige an, daß in der Stelle **nichts** ſey, alſo würde ich zehn alſo ſchreiben 10, das heiſt, nichts in dem Platze, wo die **Einer** ſtehen ſollten, und eine Einheit in dem Platze der Zehner, oder ein Zehner oder zehn. Wollte ich ſechzehn ſchreiben, ſo ſchriebe ich es alſo 16, das hieße ſechs Einheiten und ein Zehner. Und zwanzig ſchriebe ich 20.

Ich ſehe nun wol, daß ich mich bis hundert hin ſo leichte helfen kann, denn z. E. neun und neunzig würde ich 99 ſchreiben, das hieße, neun Einer und neun Zehner, oder wie man im gemeinen Leben ſagt, neun und neunzig. Allein hundert wie ſchreibt man das? Wenn man die 1 noch um eine Stelle weiter nach der linken Hand rückte, ſo würde ſie zehnmal mehr als in dem vorigen Platze gelten; in dem vorigen Platze galt ſie aber einen Zehner, folglich nun **zehn Zehner**, aber zehn Zehner iſt ein Hunderter, oder hundert, wie wir in dem vorhergehenden Paragraphen geſehen haben. Und da ich jetzt keine Zehner, auch keine Einer mehr habe, ſo ſetze ich in ihre Stelle das Zeichen, daß **nichts** da ſey oder Nullen; alſo ſchriebe ich hundert alſo 100, und ſechshundert ſchriebe ich 600, denn die ſechs ſtünde nun in dem Platze, wo die Hunderter hingehören. Zehn Hunderter machen tauſend, alſo muß die 1 noch um einen Platz weiter linker Hand gerücket werden, wenn ſie tau-

ſend bedeuten ſoll, und würde alſo ſtehen, 1000. Viertauſend würde ich alſo ſchreiben, 4000 und ſo weiter. Will man zehntauſend ſchreiben, ſo iſt das zehnmal ſo viel als tauſend oder zehnmal tauſend, ich rücke alſo die 1 noch um einen Platz weiter rechter Hand, und ſetze an die Stelle, wo ſie vorher geſtanden hat, eine 0. Ich würde dieſe zehntauſend daher alſo ſchreiben müſſen 10000. Hunderttauſend iſt zehnmal zehntauſend, alſo kömmt hier die 1 wieder um einen Platz weiter zu ſtehen, und es kommen nun fünf Nullen dahinter, da vorher nur vier Nullen hinter der 1 die zehntauſend vorſtelleten, man ſchreibt hunderttauſend daher alſo 100000.

§. 9. Ich weis nun eins, zehn, hundert, tauſend, zehntauſend, hunderttauſend zu ſchreiben, das ſind ſechs Zahlen, davon jede folgende zehnmal größer iſt, als die vorhergehende. Die ſechs Stellen für dieſe ſechs auf einander folgende Größen heißen eine **Ordnung**, und zwar bis an hunderttauſend, und dieſe mit gerechnet, die **erſte Ordnung**. Wir wollen nun einmal verſuchen, ob wir nun alle Zahlen, die zwiſchen 1 und 100000 vorkommen, ausſprechen und ſchreiben können. Ich will mit einigen die Probe machen.

§. 10. Man ſpreche aus 35. Das iſt, fünf in der Klaſſe der Einer, und drey in der Klaſſe der Zehner, oder drey Zehner, oder dreyßig, alſo fünf und dreyßig. Ferner 127, das iſt, ſieben Einer oder 7, wey Zehner oder zwanzig, und ein Hunderter, alſo hundert, zwanzig, ſieben,

oder

oder hundert ſieben und zwanzig. 506, ſechs Einer, kein Zehner, fünf Hunderter, alſo fünfhundert ſechs. 2527, ſieben Einer oder ſieben, zwey Zehner oder zwanzig, fünf Hunderter oder fünfhundert, zwey Tauſendter oder zwey tauſend, alſo zweytauſend fünfhundert zwanzig ſieben, oder ſieben und zwanzig. Noch ein Exempel, 105430 kein Einer, aber drey Zehner oder dreyßig, vier Hunderter oder vierhundert, fünf Tauſendter oder fünftauſend, kein Zehntauſendter, ein Hunderttauſendter, alſo ein hunderttauſend, fünftauſend, vierhundert dreyßig.

§. 11. Man ſiehet hieraus, daß man allezeit die Klaſſen der Zahlen von der rechten Hand an zählet, wodurch man findet, in welcher Klaſſe ſie ſtehen. Man fängt an, Klaſſe der Einer, Klaſſe der Zehner, Klaſſe der Hunderter, Klaſſe der Tauſendter, Klaſſe der Zehntauſendter, Klaſſe der Hunderttauſendter. Man ſpricht das aus, wo etwas ſtehet, und wo nichts oder eine Null ſteht, da ſpricht man auch nichts aus. Das Exempel, 105430 zeigt dies ſehr deutlich. Ich ſage nicht hunderttauſend, keine zehntauſend, fünftauſend, vierhundert, dreyßig, kein Einer; ſondern wo nichts iſt, da ſage ich auch nichts, weil es ſich von ſelbſt verſteht. Ich ſage nur hunderttauſend, fünftauſend, vierhundert und dreyßig. Wir wollen nun einige Exempel zur Uebung herſetzen, die jeder leicht nach dieſen Grundſätzen erklären wird.

Man

Man ſpreche aus:

36,	700,	1056,	7630,	60007,	424326
50,	709,	1090,	8503,	65100,	602030
88,	777,	2085,	10000,	74300,	540003
101,	790,	3070,	30405,	82320,	500784
111,	1000,	4700,	45001,	90511,	500701
144,	1008,	5621,	46031,	93222,	482000
190,			52020,	99999,	743005
				100000,	800400
					610000
					300001

Mehrere Exempel wird ein jeder ſich ſelbſt geben, wenn er ſie noch nöthig hat.

§. 12. Bis hunderttauſend konnten wir nun geſchriebene Zahlen ausſprechen, und das wären Größen in der erſten **Ordnung**. Aber wenn man nun mehr als hunderttauſend hat? Die alte Regel gilt immer, daß, wenn eine Zahl um eine Stelle weiter linker Hand ſtehet, ſo gilt ſie gleich zehnmal mehr. Die 6te Zahl von der rechten Hand ſtand in der Stelle der Hunderttauſendter, iſt nun noch eine Zahl um einen Platz weiter fortgerückt, ſo iſt das 10 mal ſo viel als hunderttauſend, oder es iſt 1 Million, alſo die 7te Zahl ſteht in der Stelle der Millionter, die 8te iſt wieder zehnmal mehr, oder ſteht in der Stelle der zehn Millionter, die 9te zehnmal mehr, oder hundert Millionter, die 10te tauſend Millionter, die 11te zehntauſend Millionter, die 12te hunderttauſend Millionter; das ſind wieder 6 Stellen, die auch eine Ordnung ausmachen, und zwar die

zwey-

zweyte Ordnung; die Ordnung der Millionter. Nehme ich eine Zahl mehr, oder den dreyzehnten Platz, ſo wäre das nach der gegebenen Regel abermals zehnmal ſo viel, als in dem vorhergehenden Platz. Dieſer war hunderttauſend Millonter, folglich dieſer dreyzehnte Platz zehnhundert tauſend Millionen; das heiſt aber Billion; und hiemit geht die 3te Ordnung an, die abermals 6 Zahlen enthält, und welche gleichfalls nach der alten Ordnung ſteigen, nemlich Billionen, zehn Billionen, hundert Billionen, tauſend Billionen, zehntauſend Billionen hunderttauſend Billionen; da endiget ſie ſich, und die 4te Klaſſe fängt ſich mit Trillion an, und ſo verfährt man immer weiter; die 5te Ordnung wird alſo die Ordnung der Quadrillionen, die 6te der Quinquillionen und ſo weiter ſeyn, welche leztere Größen aber ſehr ſelten vorkommen werden.

§. 13. Damit man nun nicht irre, wenn man eine große Zahl ausſprechen ſoll, ſo fange man von der rechten Hand an, die geſchriebenen Zahlen zu zählen, und wenn man 6 Zahlen gezählet hat, ſo mache man ein Comma, über dieſe erſte Ordnung macht man kein anderes Zeichen, hat man mehr Zahlen als ſechſe, ſo fähret man fort zu zählen, bis man wieder ſechs gezählet hat, dann mache man wieder ein Comma, und ſchreibe über die 2te Ordnung ein (m), welches Millionen andeuten ſoll, es verſteht ſich, daß man das auch thut, wenn auch nur eine oder zwey Zahlen ſich in dieſer Ordnung befänden. Hat man mehr Zahlen, als dieſe Ordnung ausmachen, ſo zählet man immer 6 Zahlen, macht ein

ein Comma, und ſchreibt über dieſe dritte Ordnung (b), welches Billion heißen ſoll, welches auch geſchiehet, wenn man nur eine Zahl in dieſer Ordnung hätte. Ein jeder wird mich nun verſtehen, wenn er auch vorher von dieſer Materie nichts gewuſt hat, wenn man ſagt, daß über die 4te Ordnung (t) oder Trillion, über die 5te Ordnung (q) oder Quadrillion zu ſtehen kömmt, wodurch man die Ordnungen zu unterſcheiden weis.

§. 14. Nunmehro werden wir geſchriebene Zahlen ausſprechen können, wenn es auch noch ſo viel wären. Bis 100000 konnten wir ſchon nach dem 11ten Paragraphen ausſprechen, von da wollen wir wieder anfangen. Dieſe Exempel werden auch zugleich den vorhergehenden Paragraphen erläutern, und deutlich zeigen, wie die Ordnungen der Zahlen abgetheilet werden. Man ſpreche aus

$\overset{m}{3}2,456728$. Von der rechten Hand an gezählet, ſind bey 4 ſechs Zahlen; das iſt die erſte Ordnung, darüber kömmt nichts, nun hat man noch zwey Zahlen in der 2ten Ordnung, oder der Ordnung der Millionter, darüber kömmt m) Nun ausgeſprochen, drey Zehnter von Millionen oder dreyßig Millionen, zwey Millionen, nun hören die Millionen auf, alſo ferner: vierhundert-tauſend, funfzigtauſend, ſechstauſend, ſiebenhundert zwanzig acht, oder zwey und dreyßig Million, vierhundert ſechs und funfzig tauſend, ſiebenhundert und acht und zwanzig. Ferner, man ſpreche

aus

m
aus 400230,543001. Die vordere 4 linker Hand ſteht in dem Platze der Hunderttauſendter in der Klaſſe der Millionen, alſo vierhundert tauſend Millionen, keine zehntauſend, keine tauſend, zweyhundert Millionen, drey Zehner oder dreyßig Millionen, keine Einheiten von Millionen. Nun kömmt die erſte Ordnung: fünfhunderttauſend, vierzigtauſend, dreytauſend, keine Hunderter, keine Zehner, eins; oder zuſammen, vierhunderttauſend zweyhundert und dreyßig Millionen, fünfhunderttauſend, drey und vierzigtauſend und
b m
eins, Noch ein Exempel: 341,543002,532140. Man ſpricht es aus, dreyhundert Billionen, vierzig Billionen, eine Billion, fünfhunderttauſend Millionen, vierzigtauſend Millionen, dreytauſend Millionen, zwey Millionen, fünfhunderttauſend, dreyßigtauſend, zweytauſend, einhundert, vierzig: oder dreyhundert ein und vierzig Billionen, fünfhunderttauſend, drey und vierzigtauſend und zwey Millionen, fünfhunderttauſend, zwey und dreyßig tauſend einhundert und vierzig.

§. 15. Nach dieſen Vorbereitungen können wir nun Exempel zur Uebung hinſetzen, die ein jedweder leicht in Ordnungen abtheilen, die Zeichen darüber ſetzen und ausſprechen wird.

m b m
51, 432764 64, 540006, 543002

m b m
4300, 823005 948, 784321, 540056

m b m
784563, 540021 78943, 543210, 500001

m b m
900000, 728130 542789, 720000, 543251

m b m
804020, 705030 920004, 780002, 700500

m t b m
900400, 000231 5, 847329, 827174, 158923

m
785004, 200051

t b m
149, 478643, 278954, 682100

b m
1, 943000, 789002

§. 16. Jetzt wird es uns leicht fallen, auch große Zahlen zu ſchreiben, die uns aufgegeben werden, denn wer Zahlen ausſprechen kann, muß auch wiſſen, an welche Stelle ſolche Zahl gehört, die er ausſpricht, und wenn er das weis, ſo wird er ſie auch ſchreiben können. Man thut aber allezeit ſehr gut, wenn man eine gegebene große Zahl von der rechten Hand an, oder von der Einheit an zu ſchreiben anfängt. Dieſes wollen wir nun durch einige Exempel erläutern. Man ſoll ſchreiben: **vier und ſiebenzig.** Hier finde ich vier Einer, alſo 4 in den erſten Platz, und ſiebenzig oder ſieben Zehner, alſo 7 in den zweyten Platz. Dieſes würde alſo ſtehen 74. Man ſchreibe **zweyhundert und fünf**, alſo in den Platz der Einer eine 5. Zehner ſind nicht da, alſo in den Platz der

Zeh-

Zehner oder in den zweyten Platz nichts, oder o. In den dritten Platz, oder den Platz der Hunderter, ſind 2, die man dahin ſetzet; das ſtünde alſo 205.

Man ſchreibe **dreytauſend ſiebenhundert und funfzig.** Nichts in den Platz der Einer, alſo o. Fünf in den Platz der Zehner, weil funfzig da ſind, dahin alſo 5. Sieben in den Platz der Hunderter, dahin alſo 7. Noch ſind drey Tauſendter da, alſo in den Platz der Tauſendter die 3. Dieſes ſtünde alſo: 3750.

Man ſchreibe hunderttauſend zwanzigtauſend und viere. In den Platz der Einer die 4. In den Platz der Zehner o, weil kein Zehner da iſt. In den Platz der Hunderter o, weil auch kein Hunderter da iſt. In den Platz der Tauſendter o, weil auch keine Einheiten der Tauſendter da ſind, aber in den Platz der Zehntauſendter 2, weil zwey Zehntauſendter oder zwanzigtauſend da ſind. In den Platz der Hunderttauſendter 1. Dieſes würde alſo ſtehen: 120004.

Man ſchreibe **zweytauſend und vier Millionen, ſieben und zwanzigtauſend und ſechzehn.** Alſo 6 in den Platz der Einer; 1 in den Platz der Zehner; o in den Platz der Hunderter; 7 in den Platz der Tauſendter; 2 in den Platz der Zehntauſendter; o in den Platz der Hunderttauſendter, nun ein (,) denn die erſte Ordnung iſt aus. Ferner 4 in den Platz der Einer der Millionen, und (m) darüber; o in den Platz der Zehner der Millionen, o in den Platz der Hunderter der Millionen und 2 in den Platz der

Tauſendter der Millionen, dieſes ſtünde alſo:

m
2004,027016.

Noch ein Exempel. Man ſchreibe **eintauſend und zwey Billionen, ſieben und zwanzig Millionen, vierhundert und zwölf.** Alſo in den Platz der Einer 2; in den Platz der Zehner 1; in den Platz der Hunderter 4; in den Platz der Tauſendter 0; in den Platz der Zehntauſendter 0; in den Platz der Hunderttauſendter 0; nun ein (,) und ein (m) über die nächſte Zahl. In den Platz der Einer der Millionen 7; in den Platz der Zehner der Millionen 2; in den Platz der Hunderter der Millionen 0; in den Platz der Tauſendter der Millionen 0; in den Platz der Zehntauſendter der Millionen 0; in den Platz der Hunderttauſendter der Millionen 0; nun wieder ein (,) und über die nächſte Zahl (b). Ferner in den Platz der Einer von Billionen 2; in den Platz der Zehner von Billionen 0; in den Platz der Hunderter von Billionen 0; in den Platz der Tauſendter der Billionen 1. Nunmehr wäre alles wieder geſchrieben, was zu dieſer Größe gehörete, und ſie würde alſo ſtehen:

b m
1002,000027,000412.

Dieſe Exempel mögen genug ſeyn, ein jeder wird ſich ſelbſt leichtlich nach dieſen Muſtern mehrere Exempel geben und erläutern können, bis er eine Fertigkeit erlanget hat, eine jede gegebene Zahl aufzuſchreiben.

§. 17.

§. 17. Ich fange an, in dieſe Anfangsgründe der Mathematik Begriffe von der Buchſtabenrechnung oder der allgemeinen Rechnungskunſt einzuſtreuen, ich will mich bemühen, ſo deutlich zu ſchreiben, als es mir möglich iſt. Man kann jede Größe, ſie mag groß oder klein ſeyn, durch ein ander Zeichen als die Zahlzeichen ausdrücken; dieſes wird jeder leichtlich begreifen, denn auch die gewöhnlichen Zahlzeichen ſind willkührliche Zeichen. Wir wollen nun einmal die Buchſtaben dazu nehmen, ſo könnte man zum Exempel ſagen, a ſollte 5 heißen, oder auch 10, oder auch 1000, oder auch 1240, oder was es auch für eine Zahl oder Größe ſey, die ſollte a heißen. Eben ſo könnte man auch b anſtatt aller möglichen Zahlen und Größen ſetzen, oder auch c, oder d, oder ſonſt einen andern Buchſtaben. So könnte z. E. auch b eine 5 bedeuten, oder auch 10, oder 1000, oder auch eine jede andere Zahl, ſie ſey welche es wolle; eben ſo könnte das auch c oder d bedeuten. Eben ſo können auch dieſe Größen **Null** bedeuten, oder es kann auch der Fall entſtehen, daß man eine oder die andere als **Null** annimmt, und ſiehet, was alsdenn aus der Rechnung herauskömmt, welches denn, wie wir weiter in den folgenden Kapiteln ſehen werden, ſie mannigmal ſehr verändert. Auch werden wir in der Folge finden, daß eine oder die andre, als **unendlich groß** oder **unendlich klein** kann betrachtet werden, welches abermals den Calcul ſehr verändert. Ferner können auch dieſe allgemeine Zeichen, als Linien, Winkel, Flächen ꝛc. be-

betrachtet werden, wie das auch in der Folge weiter ausgeführet werden wird. Kurz man kann durch dieſe allgemeine Zeichen, alle mögliche Größen ausdrücken. Wenn man nun von a, oder b, oder c, oder d etwas erwieſen hätte, ſo müſte das von allen möglichen Zahlen oder Größen gelten, weil alle mögliche Zahlen und Größen dadurch verſtanden werden könnten.

Man laſſe ſich noch nicht dadurch irre machen, daß man noch nicht weis, wie von ſolchen allgemeinen Zeichen etwas könne allgemein erwieſen werden, das alſo für alle mögliche Größen gilt; die folgenden Kapitel werden das ſattſam lehren, man behalte nur jetzt dieſen allgemeinen Satz, der, wie man ſieht, ſehr einfach iſt.

§. 18. Die Mathematiker pflegen in der Buchſtabenrechnnng alle Größen oder Zahlen, die ihnen bekannt ſind, durch die erſten Buchſtaben des Alphabets, durch a, b, c, d, e, f &c. auszudrücken, da denn gewöhnlich jeder Buchſtabe eine andere Größe bedeutet; und a nicht b oder c, und b nicht c oder a oder d iſt, u. ſ. w. Es kömmt aber auch, daß man Größen einander gleich ſetzet, z. E. es ſey a gleich b u. ſ. w. Die unbekannten Größen, die ſie noch finden wollen, und durch die bekannten herausſuchen, nennen ſie x, oder y, oder z.,

Das

Das zweyte Kapitel.

Von der Addition in ganzen Zahlen und Buchſtaben.

§. 19. Wir haben jetzt geſehen, wie man gegebene Zahlen ausſpricht, wie man ſie auch ſchreibet, daß heißt **Numeriren.** Allein wenn nun mehrere Zahlen einem gegeben ſind, und er ſoll ſagen, wie viel dieſe alle zuſammen in einer Zahl ausmachen, ſo gehört dazu eine andre Wiſſenſchaft, dieſe wird **Addiren** genennet, oder Addiren heißt alſo, eine Zahl finden, die verſchiedenen andern Zahlen, die gegeben ſind, wenn man ſie alle zuſammen nimmt, gleich iſt. In dem §. 3. haben wir ſchon etwas hievon geſagt, welches wir nun weiter ausführen wollen.

§. 20. Man bedienet ſich eines Zeichens in der Rechenkunſt, und überhaupt in der ganzen Mathematik, welches anzeiget, daß etwas zu einer Sache ſoll hinzu gezählet werden, das iſt folgendes +. Man drückt es aus durch das Wort plus (welches auf Teutſch **mehr** heißt, aber man gebraucht das teutſche Wort nicht.) Sollte man z. E. 5, 7, 8 addiren, ſo würde das alſo angezei-

zeiget werden können, 5 + 7 + 8 und ausgeſpro-
chen werden: fünf plus ſieben, plus acht.

§. 21. Allein es iſt nicht genug, daß man das alſo ausſpricht, man will wiſſen, wie viel es in einer Zahl ausmacht. So lange man ſolche einzelne Zahlen hat, iſt das ſehr leicht. Man zähle an den Fingern 5 und 7 iſt 12 und acht dazu iſt 20. Wenn man aus den erſten Paragraphen der Numeration ſich das Zählen bekannt gemacht hat, ſo kann es nicht fehlen, daß dieſes nicht leicht angehen ſollte, wenn vorzüglich unter den Zahlen, die zuſammen addiret werden ſollen, keine über 10 iſt. Wenn das aber iſt, und überhaupt wenn der Zahlen viel ſind, die zuſammen addiret werden ſollen, ſo verfährt man alſo. Man ſchreibt die gegebenen Zahlen alle unter einander, und zwar Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. ſ. w. überhaupt ſolche Zahlen unter einander die zu einerley Klaſſe gehören, und macht einen Strich. Die Urſache von dieſem Verfahren iſt leicht zu finden. Es laſſen ſich nur Dinge von einerley Art zuſammen zählen, und man kann nicht Zehner und Einer oder Einer und Hunderter zuſammen zählen. Alsdenn fängt man bey den Einern an zuſammen zu zählen, und zählt immer fort, bis ſie alle zu Ende ſind. Dieſes kann man, ehe man geübt iſt, an den Fingern thun, weil keine Zahl darunter ſeyn kann die über 9 iſt. Hat man die Einer zuſammen gezählet, und findet, daß

es

es nicht über 9 ſind, ſo ſetzet man ſie unter die Reihe der Einer. Iſt es mehr als 9. z. E. eben zehn, ſo ſetzet man eine o dahin, weil alsdenn alle die Einer einen Zehner ausmachen, und in der Reihe der Einer alsdenn nichts iſt. Iſt es mehr als 10, z. E. 18, oder 25, oder 36 u. ſ. w. ſo ſiehet man zu, wie viel Einer darin ſind, die ſetzet man unter die Reihe der Einer unter den Strich, und zählet das andere mit zu der Klaſſe der Zehner. Wenn man Zahlen ſchreiben kann, ſo weis man gleich, was zu der Klaſſe der Einer gehöret; es iſt allezeit die hinterſte Zahl, wenn das, was man heraus zählet, wenn man es ſchreibet, mehr als eine Zahl ausmacht. Z. E. Man bekäme 36, ſo ſetzet man die 6 hin; und zählet die 3 zur Klaſſe der Zehner. Man bekäme 128, ſo ſetzet man 8 hin, und zählet die zwölf, welches zehn Zehner und noch zwey Zehner ſind, zur Klaſſe der Zehner. Hat man die Klaſſe der Einer auf dieſe Art behandelt, ſo verfährt man eben ſo mit der Klaſſe der Zehner, wozu man, wie ſchon geſagt, das zählet, was in der Klaſſe der Einer von Zehnern ſteckte. Man behandelt die Klaſſe der Zehner wie die Klaſſe der Einer. Bekömmt man mehr wie eine Zahl, wenn man das, was man heraus gezählet hat, niedergeſchrieben hat, ſo wird nur die hinterſte unter die Reihe der Zehner geſchrieben, und das übrige zur Klaſſe der Hunderter gerechnet. Man bekäme

käme z. E. 38, ſo ſchreibet man nur die 8 hin, welches acht Zehner ſind, und rechnet die 3, welches drey Hunderter ſind, zur Klaſſe der Hunderter. Man bekäme 138, ſo ſchreibt man 8 hin, und rechnet 13, welches 13 Hunderter waren, zur folgenden Klaſſe. Bekäme man eben 10 oder 30 oder 50, ſo ſetzte man Null hin, weil alles, was man nun erhalten hat, zur folgenden Klaſſe gehört. So verfährt man nun mit der Klaſſe der Hunderter, der Tauſender, kurz mit allen Klaſſen. Hat man keine Klaſſe mehr, ſo ſchreibt man endlich ganz hin was man aus der letzten Klaſſe heraus gezähler hat. Den Grund von dieſem Verfahren wird man leicht einſehen, wenn man ſich erinnert, daß zehn Einheiten einer niedrigen Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachen, und daß dieſes die Urſache iſt, warum man, wenn man z. E. in einer Klaſſe 35 gezählet hätte, 3 zur folgenden Klaſſe zählet, weil dieſe 30 von dieſer Klaſſe nur wirklich 3 Einheiten der folgenden ſind.

§. 22. Wir wollen dieſes mit einigen Exempeln erläutern. Man addire, 5, 7, 12, 19, 4. Dieſes ſtünde nach obigen Regeln, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner alſo:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 7 \\ 12 \\ 19 \\ 4 \\ \hline 47 \end{array}$$

Man

Man zählet, und aus der erſten Reihe bekömmt man 27 oder 7 Einer und 2 Zehner. Man ſetzet die 7 Einer hin, und rechnet die zwey Zehner zur folgenden Klaſſe, welche man durchſtrichen darunter ſetzet, um ſie nicht zu vergeſſen. Man zählet wieder, und bekömmt aus dieſer Klaſſe 4, die man hinſetzet. Und nun iſt das Exempel addiret oder ſummiret.

§. 23. Ehe wir noch ein Paar Exempel zur Uebung erläutern, wollen wir über dieſes noch etwas anmerken, welches allen Addirerempeln angehet. Die Größen oder Zahlen, welche addiret werden ſollen, heißen die zu ſummirenden. Das waren hier 5, 7, 12, 19, 4, und die Zahl, die durch die Addition heraus kömmt, heißt die Summe oder das Aggregat, hier die 47. Man muß dieſes wohl behalten, weil es zur Sprache der Mathematicer gehört. Man könnte auch dieſes Exempel alſo ausdrücken $5 + 7 + 12 + 19 + 4 = 47$. Oder fünf plus ſieben plus zwölf plus neunzehn plus vier iſt gleich ſieben und vierzig. Hier findet man ein neues Zeichen, nemlich $=$ das iſt das Zeichen der Gleichheit, oder heißt, daß eine Sache der andern gleich ſey. Man drückt es auch wol, und das mehrentheils durch äqual aus, und es wird bey allen möglichen Rechnungsarten, ſo oft es nöthig iſt, gebraucht. Hier haben wir geſehen, daß wirklich obbenannte Zahlen 47 ausmachten, alſo äqual, oder gleich, oder $= 47$ waren; und man alſo anſtatt ihrer 47 ſetzen konnte. Nun wollen wir noch einige Exempel erläutern.

24. Man addire 54, 16, 700, 505, 250, 1000, 2. Es ſtünde alſo:

54
16
700
505
250
1000
~~111~~2
2527

Aus der erſten Reihe kömmt 17, denn die Nullen werden nicht gezählet, weil ſie wirklich nichts ſind, und nur den Rang oder die Stellen der Zahlzeichen beſtimmen.

Man ſetzet die 7 hin, und rechnet den einen Zehner oder die 1 zur folgenden Klaſſe; man ſchreibt ſie durchſtrichen darunter. Die zweyte Reihe der Zehner giebt 12. Man ſetzet die 2 hin, und die 1 zählet man zur folgenden Klaſſe. In der dritten Klaſſe ſind 15; die 5 hingeſetzet, und die 1 zur folgenden Klaſſe. In der folgenden und hier letzten Klaſſe ſind alſo 2. Die hingeſetzt, und das ganze Aggregat oder Summe iſt nun = 2527.

Man addire 600 17, 1048, 5, 999, 106. Es ſtünde alſo:

600
17
1048
5
999
106
~~773~~
―――
2775

Und wäre die Summe = 2775

§. 25. Wir wollen noch einige Exempel zur Uebung herſetzen. 407 zu 295 = 702.

1 zu 99 = 100

487699 zu 312204 = 799903

544, + 602 + 788 + 5 + 20 = 1959

4738 + 9 + 76409 + 4696 + 64 + 15 + 4760 = 90691

540268 + 999000 + 100000 + 42 + 10 = 1639320

100402 + 70 + 5000 + 60400 + 17 + 5 + 300 = 166194

99978 + 994 + 599 + 699 + 90 = 102360

Ein jeder wird mehr Exempel zur Uebung aus jedem gemeinen Rechenbuch nehmen, oder ſehr leicht ſelbſt aufſchreiben können. Mehrere hier herzuſetzen, würde unnöthiger Weiſe den Platz rauben.

§. 26. Wie aber weiß man, ob man recht addiret hat? Die beſte Antwort darauf iſt, daß man es etliche mal wiederholet, und bald von oben, bald von unten anfängt. Man hat freylich verſchie-

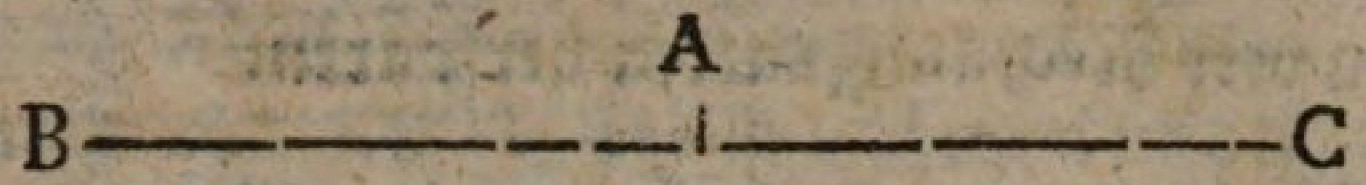
ſchiedene Arten die Additionsexempel zu probiren. Zum Theil ſind ſie unſicher, zum Theil weitläuftig, zum Theil ſetzen ſie Dinge zum voraus, die wir noch nicht gehabt haben, allemal ſind ſie weitläuftiger, als die nochmalige Addition des Exempels. Daher wir auch von ihnen nichts melden wollen.

§. 27. Wir ſollten nnn wohl von der ſogenannten **Addition in benannten Zahlen** reden, oder von der Addition, da den Größen ein Name beygelegt wird, und die mannigmal von verſchiedener Ordnung ſind, als Thaler, Groſchen, Pfennige; Wispel, Himten, Metzen ꝛc. Wir könnten ſie wol hieher ziehen, es iſt doch wirklich nur die gewöhnliche Addition, und man hat nur nöthig zu wiſſen, wie viel Einheiten einer geringern Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachen, um in benannten Zahlen addiren zu können, oder damit ich durch ein Exempel dieſes deutlicher mache. Wenn man Thaler, Groſchen und Pfennige zu addiren hätte, ſo muß man wiſſen, wie viel Einheiten der Pfennige auf eine Einheit des Groſchen, und wie viel Einheiten des Groſchen auf eine Einheit des Thalers gehen. Denn hiebey iſt die geringſte Ordnung Pfennige, die nächſt höhere Groſchen, und die nächſt höhere Thaler, oder wie viel Pfennige einen Groſchen, und wie viel Groſchen einen Thaler ausmachen ꝛc. Allein weil doch zu dieſer Addition, wenn ſie nur etwas groß wird, ſchon auch die gewöhnliche Diviſion kann mit Nutzen gebraucht werden, ſo wollen wir, ſowol die Addition als auch die

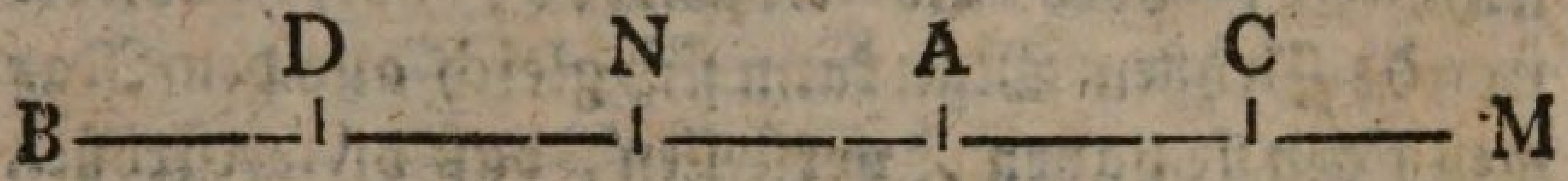
die Subtraktion, Multiplikation und Diviſion in benannten Zahlen bis nach der Lehre von dieſen ordinairen vier Rechnungsarten verſparen.

§. 28. Allein weil wir uns doch vorgenommen haben, etwas von den erſten Gründen der Buchſtabenrechnung in dieſen Anfangsgründen einfließen zu laſſen, ſo wollen wir auch von der Addition mit Buchſtaben etwas reden. Ehe wir aber dieſes thun können, müſſen wir noch einige Begriffe von den Größen geben. Man hat zweyerley ſehr merkwürdige Eigenſchaften der Größen zu betrachten. Man betrachte ſie als **poſitive** oder **bejahende**, oder als **negative**, oder **verneinende** Größen. Man kann ſich gleich aus dem Namen, den ſie haben, vorſtellen, daß dieſe Größen einander **entgegen** geſetzt ſind, oder eine Art das Gegentheil der andern ſey, und das ſind ſie wirklich. Man betrachte verſchiedene Umſtände oder auch Handlungen des menſchlichen Lebens, die einander entgegen geſetzt ſind. Z. E. **Vermögen und Schulden**, **vorwärts** und **rückwärts gehen**, **Einnahme** und **Ausgabe**. Das ſind wirklich entgegen geſetzte Handlungen, oder Dinge, davon man eine **poſitiv** oder **bejahend**, die andere **negativ** oder **verneinend** nennen kann. Das Zeichen des Poſitiven iſt + und heißt **plus**, das Zeichen des Verneinenden iſt — und heißt **minus**. Man ſiehet aus dieſen Betrachtungen, daß beydes wirkliche Größen, und die **minus** Größen, gewiß nicht weniger als nichts, ſondern wirklich **etwas**, nur das Entgegengeſetzte von dem

dem Poſitiven ſind. Ein Exempel ſoll dieſes noch deutlicher machen.



Bey A liege Braunſchweig, bey B Hamburg und bey C Caſſel, ſo könnte ich, wenn ich in A wäre, den Weg nach B als eine plus oder poſitive Größe, den Weg nach C als eine minus Größe betrachten, denn die Wege ſind einander wirklich entgegen geſetzet. Oder es wäre ein Schif in A, das nach B ſegelte, ſo könnte man den Weg nach B als eine poſitive Größe betrachten, (ſiehe nebenſtehende Figur:)



ehe es nach B kommt. Wenn es zum Exempel in D wäre, würde es nach A durch Sturm zurück geworfen, ſo hätte es einen poſitiven Weg AD und auch einen negativen DA, dahin es der Sturm geworfen, gemacht. Würde es noch weiter über A zurück geworfen, z. E. nach C, ſo hätte ſein negativer Weg, den man mit dem minus Zeichen (—) ausdrücken könnte, noch um AC zugenommen. Denn ſein poſitiver Weg ging von A nach B hin. Einer hätte 10 Thlr. Vermögen und wäre 6 Thlr. ſchuldig, ſo könnte ich ſein Vermögen als eine plus Größe, und ſeine Schulden als eine minus Größe anſehen.

§. 29. Es läßt ſich plus zu plus addiren, das ſiehet man bald. 10 Thlr. Vermögen und noch

6 Thlr. Vermögen, 5 Meilen vorwärts und noch 3 Meilen vorwärts, laſſen ſich zuſammen addiren. Auch minus Größen laſſen ſich zuſammen addiren. Wer 5 Thlr. Schulden hat, und noch 4 Thl. Schulden dazu bekömmt, hat — 5 Thlr. und noch — 4 Thlr. alſo zuſammen — 9 Thlr. in Anſehung ſeines Vermögens. Allein man kann auch plus und minus Größen zuſammen addiren. Und nach einiger Ueberlegung wird man einſehen, daß von der einen Größe ſo viel wegkömmt, als die andere groß iſt. Es kömmt dabey darauf an, welche von beyden Größen die größte iſt, die plus oder minus Größe, denn von der größten bleibt alsdenn etwas übrig. Wenn ich 10 Thlr. Vermögen, und 6 Thl. Schulden habe, ſo hätte ich, wenn ich wiſſen wollte, was ich wirklich hätte, + 10 Thlr. und — 6 Thlr. zuſammen zu addiren. Das ſtünde alſo:

$$\begin{array}{r} +\,10\ \text{Thlr.} \\ -\,6\phantom{\ \text{Thlr.}} \\ \hline +\,4\ \text{Thlr.} \end{array}$$

und ich ſehe bald, daß ich alsdenn wirklich + 4 Thlr. hätte.

Das Exempel in dieſem §. mit der Linie BDAC läßt ſich hier auch anwenden. Es ſey von A bis B 100 Meilen, von A bis D 40 Meilen, von A bis N 20 Meilen, von A bis M 80 Meilen, von A bis C 20 Meilen, von A bis B heiße poſitiv, und von A bis M negativ, oder noch beſſer jeder Weg, der in der Direktion von A nach B geht, poſitiv. Nun ſegle das Schiff von A nach

B

B und komme gut nach D, es hat alſo gemacht + 40

Von da werde es nach A zurückgeworfen, es hat alſo gemacht — 40

Es werde weiter nach C zurückgeworfen, es hat alſo noch gemacht — 20

Es ſegle wieder vorwärts und komme nach N, das wäre alſo CA + CN oder 20 + 20, alſo wieder vorwärts + 40

Addiret man das nun zuſammen, ſo weiß man, wie weit es von A vorwärts iſt. Addiret iſt das + 20

und ſo weit iſt auch von A nach N.

§. 30. Wir haben ſchon §. 21. geſaget, daß ſich nur gleiche Dinge zuſammen addiren laſſen, auch ſchon §. 17 angezeiget, daß man durch die Buchſtaben des Alphabets allerley, was man will, verſtehen kann, wofür aber einmal ein Buchſtabe angenommen iſt, das muß er in der ganzen Rechnung auch bleiben. Es laſſen ſich alſo auch nur gleiche Buchſtaben zuſammen addiren; davon wir einige Exempel geben wollen. Erſtlich da man blos plus zuſammen addirt.

Man addire + 3a + 6b + 2c, noch dazu a + 2b + 5c, noch 7a + b + c. Das ſtünde alſo

$$\begin{array}{r} +3a+6b+2c \\ +a+2b+5c \\ +7a+b+c \\ \hline +11a+9b+8c \end{array}$$

Man zählet ordentlich zuſammen, und es iſt hier gleich viel, ob man von vorne oder von hinten zu an-

anfängt. + c und noch + 5c und noch + 2c machen zuſammen + 8c; + b und noch + 2b und noch + 6b ſind 9b. + 7a und noch ein a und noch 3a ſind zuſammen 11a.

Hiebey finden noch zwey Anmerkungen ihren Platz. Wir haben gleich vom Anfang in der erſten Reihe vor dem a das Zeichen + geſetzet. Das thun die Mathematiker gewöhnlich nicht, ſondern wenn man eine Reihe von Größen zu ſchreiben anfängt, und die erſte iſt **plus**, ſo ſetzet man gar kein Zeichen davor, und gar kein Zeichen vor eine Größe NB. **beym Anfang** einer Reihe geſetzet, zeiget an, daß die Größe **plus** ſey. Man hätte dieſe Größen eigentlich alſo ſchreiben müſſen;

$$\begin{array}{r} 3a + 6b + 2c \\ a + 2b + 5c \\ 7a + b + c \\ \hline 11a + 9b + 8c \end{array}$$

wo beym Anfang der Reihe, weder in den zu ſummirenden Größen noch in der Summe oder **Aggregat** vor a kein Zeichen iſt, welches doch aber **plus** bedeutet **Zweytens**, wenn vor einer Größe keine Zahl ſteht, ſo bedeutet es, daß ſie nur einmal genommen ſey. So iſt z. E. a ſo viel als **ein** a; b ſo viel als **ein** b u. ſ. w.

§. 31. Bloße **minus** Größen werden ebenfalls auf die gewöhnliche Art zuſammen gezählet; vor ſolche Größen aber muß man allezeit das minus Zeichen (—) machen, ſie mögen vorne, hinten oder in der Mitte ſtehen. Z. E. man addire;

$$\begin{array}{rrrr} -\ a & +\ 7b & +\ c & -\ f \\ -\ 4a & +\ 3b & +\ 2c & -\ 3f \\ -\ 6a & +\ b & +\ c & -\ 2f \\ \hline -\ 11a & +\ 11b & +\ 4c & -\ 6f \end{array}$$

Hier haben wir plus und minus Größen in dieſem Exempel, allein wir haben es alſo aufgeſetzet, daß zu den minus Größen auch nur minus Größen, und zu den plus Größen nur plus Größen zu addiren waren.

Noch ein Exempel:

$$\begin{array}{rrrr} 3a & -\ b & +\ 4f & -\ 3g \\ 2a & -\ 5b & +\ 2f & -\ 2g \\ \hline 5a & -\ 6b & +\ 6f & -\ 5g \end{array}$$

§. 32. Nun wollen wir auch plus und minus Größen unter einander addiren, oder **entgegen geſetzte Größen**, wovon wir im 29 §. die Anweiſung gehabt haben. Exempel werden die dortige Regel erläutern.

Man addire:

$$\begin{array}{rrrr} 6a & -\ 4b & +\ 3f & -\ g \\ 3a & +\ 5b & -\ 8f & +\ g \\ \hline 9a & +\ b & -\ 5f & \end{array}$$

Wenn man dieſes Exempel nach Anweiſung des 29 §. recht betrachtet, ſo wird man alſo darüber reden müſſen. Die erſten beyden zu addirenden Größen ſind beyde **plus**, alſo + 6a zu + 3a giebt + 9a. Aber bey der zweyten iſt eine **minus** Größe, indeſſen iſt hier die plus Größe doch die Größeſte. — 4b und + 5b addirt, giebt + 1b oder + b, denn man überlege nur, daß die — 4b die + 5b bis auf eins aufheben, oder daß, wer 4 Thlr. Schulden und 5 Thlr. Vermögen hat, wirk-

wirklich nur einen Thaler beſitze. Ferner + 3f und — 8f addirt, giebt — 5f. Drey Thaler Vermögen und 8 Thaler Schuld laſſen wirklich noch 5 Thaler Schuld. Endlich + g und — g addirt, heben ſich einander auf, und werden zu nichts. Denn z. E. wenn man eine Meile vorwärts, und eben die Meile rückwärts gegangen iſt, ſo hat man den Ort, wo man vorher war, nicht verändert.

Noch einige Exempel:

$$\begin{array}{rrrrr} 4a & +2b & -2c & +5d & -g \\ 5a & -2b & +6c & -8d & -3g \\ \hline 9a & & +4c & -3d & -4g \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 4a & -2c & +2x & \\ -6a & +5c & -x & \\ -2a & +c & -3x & \\ a & -4c & +3x & +g \\ \hline -3a & & +x & +g \end{array}$$

Man bemerke bey dieſem Exempel, daß man erſt alle Größen, die einerley Zeichen haben, zuſammen addirt, alsdenn zuſiehet, wie viel die eine Größe von der andern aufhebet. Als 4a und noch a machen 5a, und — 6a und noch — 2a machten — 8a, da man 5a poſitiv oder plus, und — 8a oder 8a negativ hatte, ſo behielt man wirklich — 3a, und ſo iſt es auch mit den andern Größen in dieſem Exempel.

§. 33. Allein es kömmt öfters, daß die Größen, die man zu addiren hat, nicht gleichnamicht ſind, alsdenn ſetzt man ſelbige blos mit ihren Zeichen hin, ſo wie man auch thut, wenn eine Grö-

ſe da iſt, wo man nichts zu, zu addiren hat, wie in dem letzterm Exempel die + g war. Ich hätte zu addiren: 4a + 4b + 3c − 4x − 4y + 3z. Das ſetzet man blos ſo hin, denn das läßt ſich nicht addiren, weil keine Größen, die gleiche Namen haben, und die man alſo zu a, b oder c u. ſ. w. addiren konnte, da waren.

§. 34. **Man kann dieſe Art zu addiren auch im gemeinen Leben nützlich gebrauchen.**

Ein Exempel: Einer nimmt ein 3 Thlr. 5 pf. 4 pf. noch 5 Thlr. 16 gr. 2 pf. giebt aus 7 Thlr. 8 gr. 2 pf. giebt noch aus 12 gr. und 5 pf. Wie viel hat er noch? Hier könnte ich die Einnahme als plus Größen, und die Ausgabe als minus Größen betrachten, und nach den verſchiedenen Zeichen das Exempel aufſetzen. Ich würde es alſo aufſetzen müſſen.

3 Thlr. +	5 gr. +	4 pf.
5 Thlr. +	16 gr. +	2 pf.
− 7 Thlr. −	8 gr. −	2 pf.
	− 12 gr. −	5 pf.
1 Thlr. +	1 gr. −	1 pf.

Er hätte noch 1 Thlr. 1 gr. weniger 1 pf. oder 1 Thlr. 7 pf. Faſt haben wir ſchon einen Vorſchmack von der Addition in benamten Zahlen gegeben.

§. 35. Man wird bey den Additionsexempeln der Buchſtaben bemerkt haben, daß bey einigen auch Zahlen ſich befinden. Dieſe Zahlen, die bey den Buchſtaben ſich befinden, nennt man Coefficienten. Z. E. 14c, da iſt 14 der Coefficient

von

von c. Findet man keine Zahl bey den Buchſtaben, ſo betrachtet man ſie, als ob 1 ihr Coefficient wäre. Z. E. c. da iſt der Coefficient von c die 1, ohngeachtet ſie hier nicht ausgedrückt ſtehet. So findet man oft Coefficienten bey den Buchſtaben in allen Rechnungsarten.

§. 36. Wir wollen die Lehre von der Addition mit ein Paar ſehr leichten Grundſätzen beſchließen, die aber in der Folge ſehr wichtig werden.

Der erſte. Wenn zwey Größen einander gleich ſind, und man addirt zu ihnen gleiche Größen, ſo müſſen die herauskommenden Summen auch gleich ſeyn. Z. E. 4 = 4 oder 4 iſt gleich 4, die beyden Größen ſind alſo gleich. 6 = 6, die beyden ſind auch gleich. Nun addire man:

$$\begin{array}{r} 4=4 \\ 6=6 \\ \hline 10=10 \end{array}$$

ſo müſſen die Summen auch gleich ſeyn, wie man hier auch ſiehet. In Buchſtaben oder allgemein

$$\begin{array}{r} a=a \\ b=b \\ \hline a+b=a+b \end{array}$$

das iſt ſehr leicht. Allein das würde doch auch wahr ſeyn, wenn nun b z. E. 4 bedeutete oder = 4 wäre, und wenn man ſetzte:

$$\begin{array}{r} a=a \\ b=4 \\ \hline a+b=a+4 \end{array}$$

das wird man doch nun auch leicht einſehen.

Der zweyte Grundſatz. Wenn aber zwey Größen ungleich ſind, und man addirt zur größten eben ſo viel als zur kleinern, ſo iſt die erſte Summe größer, als die zweyte.

Z. E. 5 iſt größer als 3
6 = 6
5 + 6 iſt größer als 3+6

oder in Buchſtaben: a iſt größer als b
c = c
a + c iſt größer als b + c

Es iſt dieſes gleichfalls ſehr begreiflich, und bedarf keiner Erläuterung. Hier müſſen wir noch eine Anmerkung machen.

Der Mathematiker, wenn er anzeigen will, ob eine Sache kleiner oder größer ſey als eine andre, ſo gebraucht er hiezu ein Zeichen. Es iſt folgendes $>$. Wo die Oefnung hingekehret iſt, das iſt die größte von beyden Größen, und wo die Spitze hingekehret iſt, iſt die kleinſte. Z. E. 5 iſt größer als 3, ſchreibe man $5 > 3$, aber 2 iſt kleiner als 6, ſchreibe man $2 < 6$. a iſt größer als b ſchriebe man $a > b$, a iſt kleiner als f ſchriebe man $a < f$.

§. 37. Wir ſahen im vorigen §., daß, wenn man zu zwey Größen, deren eine größer iſt als die andre, gleiches hinzu addirte, daß alsdenn die erſte Summe größer ſeyn müſte als die zweyte. Man wird leicht einſehen, daß das um ſo viel mehr noch ſeyn müſſe, wenn man zu der grö-

größern noch mehr addirt als zu der kleinern. Z. E. $5 > 4$

$$\frac{\begin{array}{c}5 > 4\\ 4 > 3\end{array}}{4+5 > 4+3}$$

Wenn 5 größer als 4 iſt, und ich addire zu 5 als zu der größten von beyden Größen noch mehr als zu 4, ich addire zu 5 die 4, und zu 4 nur die 3, ſo muß es um ſo viel mehr richtig ſeyn, daß die erſte Summe größer iſt als die zweyte. Ein Exempel in Buchſtaben,

$$\frac{\begin{array}{c}a > b\\ c > d\end{array}}{a+c > b+d}$$

Ein jeder wird dieſes leichtlich noch weiter erläutern können. Wir haben das nöthigſte von der Addition nach unſerm Vorhaben geſagt. Wir gehen nun zur Subtraktion.

Das dritte Kapitel.

Von der Subtraktion in gunzen Zahlen und Buchſtaben.

§. 38. Wir haben im vorhergehenden Kapitel geſehen, daß eine Größe kann größer oder vermehret werden, wenn man andre gleichnamichte zu ihr addiret. Sie kann noch auf eine andre Art

vermehret werden, welches man die **Multiplikation** nennet, und welches eigentlich eine auf eine künſtliche Art wiederholte Addition iſt. Es wäre ganz natürlich, daß man jetzt davon redete. Aber man iſt es einmal ſo gewohnt, daß man nach der **Addition** von der **Subtraktion** ſpricht; daß wir auch dieſer Methode folgen wollen, weil es doch keine Unordnung verurſachet.

§ 39. Man vermehrte eine Zahl auf eine Art durch die Addition, man kann aber auch von einer Größe etwas abnehmen, das nennt man **abziehen** oder **ſubtrahiren**. Es iſt ſubtrahiren **das Verfahren wenn man eine Zahl oder Größe um eine andere gegebene Zahl oder Größe kleiner macht, oder dieſe Größe von ihr hinweg nimmt.** Es verſteht ſich von ſelbſt, daß die Größe, die man von einer andern hinweg nimmt, mit ihr von gleicher Art, welches **gleichnamigt** heißt, ſeyn müſſe, denn von 5 Thlr. kann ich nicht 4 Aepfel wegnehmen. Bey **unbenamten** Zahlen, oder Zahlen, die keinen andern Namen als die Zahl haben, als z. E. 4', 5 ꝛc. iſt das nun; ſie ſind gleichnamicht, oder ſie ſind alle von gleicher Art.

§. 40. Ich habe eine Größe, die = 8 iſt, davon ſoll ich 2 wegnehmen, das heißt 2 von 8 **abziehen**, und ich behalte alsdenn noch 6. Man kann dieſes leichte Exempel an den Fingern abzählen, oder auf andere Art deutlich machen. Denn, wenn ich 8 Kugeln hinlege, und zwey davon nehme,

ſo

ſo darf ich nur die übrigen zählen, und ich finde noch ſechs. Jetzt erſt auch ein Paar Worte von den äußerlichen Zeichen der Subtraktion. Wenn man ſubtrahiren ſoll, ſo ſchreibt man die Zahl wovon man etwas abnehmen ſoll, oben hin, die Zahl, welche man von ihr abnehmen ſoll, darunter, und macht alsdenn ein Strich, und unter den Strich ſetzet man alsdenn die Zahl, welche übrig bleibt, wenn man die gegebene Zahl von der obern weggenommen hat. Dieſes Exempel würde folglich alſo ſtehen müſſen:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

man ſagt, 2 von 8 bleibt 6. Aber alle dieſe Größen haben auch ihre eignen Namen, die wir wohl bemerken müſſen. Die Zahl, von welcher etwas abgezogen werden ſoll, nennet man die zu vermindernde Zahl, oder gewöhnlich den **Minuendus**. Die Zahl oder Größe, welche abgezogen werden ſoll, heißt die abzuziehende Größe oder Zahl, gewöhnlich der **Subtrahendus**, und die Zahl oder Größe, die alsdenn überbleibt, und unter den Strich kömmt, heißt der **Reſt** oder die **Differenz**. Wir wollen bey dieſem Exempel die Namen beyſchreiben.

8 Minuendus
2 Subtrahendus
6 Reſt oder Differenz.

§. 41. Warum man die Zahl, welche überbleibt, wenn etwas von ihr abgezogen wird, den **Reſt** nennet, iſt leichtlich einzuſehen. Es iſt

vielleicht allen nicht gleich deutlich, warum ſie die Differenz heißt. Sie heißt darum die Differenz, welches Wort auf Teutſch der Unterſcheid heißt, weil ſie anzeiget, um wie viel die beyden Zahlen, der Minuendus und der Subtrahendus, verſchieden ſind. Hier in dieſem Exempel zeiget mir 6 an, um wie viel 2 und 8 von einander verſchieden ſind. Nemlich 8 iſt um 6 größer als 2, oder 2 iſt um 6 kleiner als 8. Hieraus folgt auch ſchon, wenn ich den Unterſcheid, oder um wie viel der Subtrahendus kleiner iſt als der Minuendus, wieder zuſammen addirte, daß alsdenn der Minuendus herauskommen müſſe. Denn, wenn bey dieſem Exempel die 2 um 6 kleiner iſt als 8, und ich addire nun dieſen Mangel, oder dieſe 6 zur 2 hinzu, ſo muß nothwendig die obere Zahl, oder der Minuendus, welcher hier 8 iſt, herauskommen. Dieſes iſt auch die Probe der Subtraktion, wovon wir nachher weitläuftiger reden wollen, und jeẓt nur bey Gelegenheit dieſes beyläufig bemerken.

§. 42. Wir fangen die wirkliche Subtraktion in Zahlen an, und bemerken dabey das verſchiedene Verfahren, welches wir dabey zu beobachten haben. Es kann ſeyn,

1) daß alle obere Zahlen, oder alle Zahlen des Minuendus größer ſind, als die untern, oder des Subtrahendus.

2) Es kann ſeyn, daß einige der obern Zahlen kleiner ſind als die unter ihnen ſtehenden, ohngeachtet die ganze obere Zahl, oder der Minuen-

nuendus, wirklich gröſſer iſt, als der Subtrahendus.

3) Es kann ſeyn, daß in der obern Zahl einzelne Nullen ſind, wozwiſchen ſich Zahlen befinden.

4) Es können auch in der obern Zahl oder Minuendus mehrere Nullen auf einander folgen, wenn in der untern ganze Zahlen, oder auch einzelne Nullen mit Zahlen vermiſcht, oder mehr Nullen an einander ſich befinden.

5) Es kann auch der Fall kommen, daß die ganze untere Zahl oder der Subtrahendus zuſammen genommen gröſſer iſt, als die obere oder der Minuendus. Wir wollen über alle dieſe Fälle reden.

§. 43. Wir bemerken erſt über alle dieſe Fälle eine allgemeine Regel: wenn die Zahl, von der etwas abgezogen werden ſoll, oder der Minuendus, imgleichen auch der Subtrahendus gegeben iſt, ſo ſetzet man ſie alſo unter einander, daß man Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter ꝛc. ſetzet, und alsdenn die Operation anfängt. Z. E. man ſoll von 7432 abziehen 4321, ſo müſte das alſo unter einander ſtehen: 7432

4321

Der Grund hievon iſt leicht einzuſehen. Man kann nur gleichnamichte Dinge von einander abziehen, alſo nur Einer von Einer, Zehner von Zehner, u. ſ. w. und daher muß man ſie auch auf ſolche Art unter einander ſetzen.

§. 44. Nun wollen wir den erſten Fall betrachten, wenn alle Zahlen des Minuendus gröſſer ſind als des Subtrahendus. Da iſt das Verfahren ſehr leicht. Man zieht von jeder obern Zahl die unter ihr ſtehende ab, ohne ſich um die andern zu bekümmern, und alsdenn muß der Reſt, oder die **Differenz** ſehr richtig herauskommen. Von 78436 ziehe man ab 65215. Es ſtünde alſo:

78436
65215
13221

Fünf Einer von 6 Einer läßt 1 Einer: 1 Zehner von 3 Zehnern läßt 2 Zehner: 2 Hunderter von 4 Hundertern läßt 2 Hunderter: 5 Tauſendter von 8 Tauſendtern läßt 3 Tauſendter: 6 Zehntauſendter von 7 Zehntauſendtern läßt 1 Zehntauſendter. Man ſiehet, in dem Verfahren ſelbſt liegt der Beweis, daß man alſo wirklich verfahren müſſe, indem ich wirklich von jeder Gröſſe das abnehme, was ich wirklich davon abnehmen ſollte. Noch ein Exempel von 59874, ziehe man ab 352. Wenn man Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter ſetzet, ſo ſtünde das Exempel alſo:

59874
352
59522

2 Einer von 4 Einern läßt 2 Einer: 5 Zehner von 7 Zehnern läßt 2 Zehner: 3 Hunderter von 8 Hundertern läßt 5 Hunderter. Hier höret das Abziehen auf, weil nichts mehr abzuziehen iſt. Und es iſt daher ganz natürlich, daß man die andern

Zah-

Zahlen des **Minuendus** die 9 und 5 ſo unter den Strich zur **Differenz** ſetzet, weil nichts davon abgezogen werden ſoll. Man hätte aber nicht nöthig zu ſagen, 2 Einer von 4 Einern läßt 2 Einer: 5 Zehner von 7 Zehnern läßt 2 Zehner u. ſ. w. ſondern blos 2 von 4 läßt 2: 5 von 7 läßt 2: 3 von 8 läßt 5. Denn durch den Platz, den die Zahlen bekommen, wird doch ihr Werth beſtimmt. Wir werden alſo hinfort dieſes auch ſo ſagen, weil es eben ſo deutlich iſt.

§. 45. Der zweyte Fall: es ſollen welche Zahlen der obern Größe, oder des **Minuendus** kleiner ſeyn, als die darunter ſtehende Zahlen des Subtrahendus, obſchon der ganze Minuendus oder die ganze obere Zahl größer iſt, als die untere: Z. E. von 94326 ziehe man ab 75243. Es ſtünde als:

```
94326
75243
-----
19083
```

Hier kömmt eine Operation vor, welche man **Borgen** nennet, und die wir gleich beſchreiben wollen. So lange man die untere Zahl von der über ihr ſtehenden ſogleich abziehen kann, wenn nemlich die obere größer iſt als die untere, thut man es. Hier gieng es bey der hinterſten an, denn 3 von 6 läßt 3, geht das aber nicht mehr, ſo nimmt man von der nächſtſtehenden obern Zahl eine Einheit weg, und rechnet ſie zu der Zahl, von welcher man abziehen ſollte. Weil aber eine Einheit der nächſtſtehenden oder nächſthöhern Zahl ſo viel iſt, als zehn Einheiten der nächſt niedrigen §. 8, ſo kann

man dieſe Einheit, welches man einen **geborgten** Einer nennt, als zehn betrachten, wenn man ſie zu der Zahl rechnet, von welcher man abziehen ſoll. Man macht an die obere Zahl, von welcher man **eins** geborgt hat, einen (.), um es nicht zu vergeſſen, daß man geborgt hat. Nun rechne man dieſen Einer zu der Zahl, von welcher man abziehen ſollte, aber weil ſie zu klein war, nicht abziehen konnte, ſo wird ſie um 10 größer, folglich läßt ſich die untere gewiß von ihr abziehen. Hier im Exempel ſollte ich 4 Zehner von 2 Zehnern oder 40 von 20 abziehen; das gieng nicht an, nehme ich aber einen **Einer** von der nächſtſtehenden 3, oder 3 hundert ab, ſo habe ich 1 hundert und 2 Zehner, oder 10 Zehner und 2 Zehner, alſo 12 Zehner, oder ganz einfach geredet 12: davon läßt ſich 4 allerdings abziehen, alſo 4 von 12 läßt 8. Ich muß nicht vergeſſen, daß die Zahl, von welcher geborgt iſt, nun um 1 kleiner geworden iſt. Hier im Exempel wäre ſie nun 2 geworden, und ich würde nun ſagen, 2 von 2 läßt nichts, oder 0. Ich ſetze alſo eine 0 darunter, um anzuzeigen, daß in dem Platz der Zahl **nichts** iſt. Man fahre in dieſem Exempel fort, und nun findet man hier wieder einen Fall, da man borgen muß. Denn 5 von 4 geht nicht an abzuziehen. Aus eben den Gründen, die wir ſchon geſagt haben, wird aus der 4, 14, wenn ich von der nächſten Zahl einen Einer borgen, weil, um es nochmal zu wiederholen, dieſer Einer zehn Einheiten von der Klaſſe in ſich enthält, worin die 4 ſteht, und nun kann man ſagen, 5 von 14 bleibt 9: vergißt man es

nicht,

nicht; daß man von der nächſten Zahl, hier von der 9 eins weggeborgt hat, und ſie alſo jetzt nur 8 iſt, welches zu behalten man einen (.) dabey gemacht hat, ſo wird man nun ſagen, 7 von 8 läßt 1. Alſo der ganze **Reſt** oder **Differenz** iſt = 19083. Aus dieſen Gründen würde alſo folgendes Exempel alſo abgezogen werden, wo wir mehr der obern Zahlen hinter einander kleiner nehmen wollen, als die untern. Die ganze obere Zahl zuſammen ſoll doch aber größer ſeyn, als die untere. Von 643278 ziehe man ab 49784. Es ſtünde alſo:

6.4.3.2.78
49784
―――――
593494

4 von 8 bleibt 4; 8 von 7 geht nicht an, bey die 2 einen Punkt und 1 geborgt, nun 8 von 17 läßt 9: 7 von 1 geht nicht an, 1 geborgt, 7 von 11 bleibt 4: 9 von 2 geht nicht, man borge 1, und nun 9 von 12 bleibt 3: 4 von 3 geht nicht an, man borge 1, nun 4 von 13 bleibt 9: nun iſt aber noch 5, die man auch herunter ſetzet, und die ganze Differenz iſt 593494.

§. 46. Es ſollen nun 3) in dem **Minuendus** einzelne Nullen, wozwiſchen Zahlen ſind, ſich befinden. Z. E. von 450304 ziehe man ab 326153. Hier iſt zu bemerken, daß, wenn die vorhergehende Zahl ſo groß iſt, daß die unter ihr ſich befindende Zahl ohne Borgen kann von ihr abgezogen werden, alsdenn, wenn man an die Null kömmt, und von ihr die untere Zahl abziehen will, welches man, wenn die untere Zahl keine Null

iſt,

iſt, nicht kann, und alſo durchaus von der nächſten Zahl 1 borgen muß, alsdenn aus der Null, wegen des 1, das ich geborgt habe, 10 wird; wie dieſes gegebene Exempel es lehren wird, auch die Natur der Sache es ſo mit ſich bringt. Wir wollen dieſes Exempel erklären. Es ſtehet alſo:

45.0304
326153
―――――――
124151

3 von 4 läßt 1: 5 von 0 geht nicht an, alſo eins geborgt, 5 von 10 läßt 5: 1 von 2 läßt 1, 6 von 0 geht nicht an, 1 geborgt, 6 von 10 läßt 4: 2 von 4 läßt 2: 3 von 4 läßt 1, alſo der ganze Reſt 124151.

Allein wäre die vor der Null rechter Hand ſtehende Zahl ſo klein, daß man von ihr die unter ihr ſtehende Zahl nicht abziehen könnte, und alſo borgen müſte, welches von der Null nicht anginge, ſondern man müſte eine Zahl weiter borgen, ſo würde die Null zur **Neune**, und zu der Zahl, von welcher man nun zuerſt abziehen wollte, kämen 10 hinzu. Ein Exempel wird das, was hierin undeutlich ſcheinet, ſattſam erläutern und auch den Grund hievon anzeigen. Von 450304 ziehe man ab 326145. Es ſtünde alſo:

9
10
45.030.4
326145
―――――――
124159

5 von 4 geht nicht; von der Null kann man nun nichts borgen, weil ſie ſelbſt nichts iſt, man muß

alſo

alſo von der nächſten Zahl, hier von der 3 borgen. Borget man da 1, ſo giebt dies 10 Einheiten in dem Platze der 0; die wollen wir einmal darüber ſetzen, allein ich will zu der 4 auch noch etwas haben. Ich borge alſo von dieſen 10 Einheiten wieder 1 weg: das wird nun 10 in dem Platz der 4, aber in dem Platz der 0 bleiben auch nur 9. Und nun kann man ſagen, 5 von 14 bleiben 9. Da aus der 0 nun 9 geworden ſind, ſo kann man die unter ihr ſtehende Zahl allezeit von ihr abziehen, denn die kann doch am wenigſten 0, und zum größten 9 ſeyn. Hier iſt ſie 4; alſo 4 von 9 läßt 5. Ferner, 1 von 2 läßt 1, denn von 3 war 1 geborgt. 6 von 0 geht nicht, alſo von der 5 geborgt, 6 von 10 läßt 4; 2 von 4 läßt 2; 3 von 4 läßt 1. Die ganze Differenz = 124159.

Nun wird man einige Exempel, die ich hierunter ſetzen will, leicht verſtehen, auch einſehen, warum 10 und 9 über die 0 geſchrieben iſt. Es iſt eben der Grund, wie in dieſem erklärten Exempel.

9 9 9	9 9 9
10 10 10 10 10 10	10 10 10 10 10 10
6.0.3 8.0.4.0.5	9.0.8.0.7.0.6.0
3 3 5 7 2 5 4 7	8 9 9 8 8 9 7 8
2 6 8 0 7 8 5 8	8 1 8 0 8 2

Hier bey dieſem letztern Exempel war von den letzten beyden Zahlen linker Hand nichts abzuziehen, weil die unterſten eben ſo groß waren, nachdem von den obern war geborgt worden, denn 9 von 9 läßt 0, und 8 von 8 läßt 0, aber die 0 hinzuſetzen, wäre unſchicklich. Denn 0 iſt nichts, und es iſt

keine Zahl mehr da, deren Platz ſie etwa anzeigen müſſen.

§. 47. Der 4te Fall. Es ſollen in der obern Zahl mehrere Nullen auf einander folgen, und in der untern Zahl blos ganze Zahlen, oder Zahlen mit Nullen vermiſcht, oder auch Zahlen, wo mehrere Nullen hinter einander ſind, ſich befinden. Von allen Exempel, und auch Gründe.

Wann in der obern Größe oder dem Minuendus mehrere Nullen hinter einander ſich befinden, ſo muß man, wenn zu der Zahl, von welcher man etwas abziehen will, muß geborgt werden, über alle Nullen weg borgen, die alle zu Neunen werden. Zu der letzten Zahl, von welcher man aber abziehen wollte, es ſey eine Zahl, oder auch eine Null, kommt zehn hinzu.

Der Subtrahendus mag nun beſchaffen ſeyn wie er will, ſo iſt das auf alle Fälle leicht. Denn beſteht er blos aus Zahlen, ſo kann doch keine über 9 ſeyn, und alſo, wenn oben die Nullen in Neunen verwandelt ſind, ſo läßt ſich immer auf alle Fälle davon abziehen. Sind Nullen zwiſchen dem Subtrahendus, oder auch mehrere hinter einander, ſo ſind die allezeit Nichts, und wenn ich nichts von der obern Zahl abzuziehen habe, ſo wird ſie ſo hingeſetzet, wie ſie iſt.

Die Exempel werden dieſes deutlicher erklären. Von 90000006 ziehe man ab 75432158.

Es

```
                 9 9 9 9 9 9
              10·10·10·10·10·10·10
Es ſtehet alſo:  9.0.0.0.0.0.0.6
                 7 5 4 3 2 1 5 8
           ─────────────────────────
                 1 4 5 6 7 8 4 8
```

8 von 6 geht nicht an; nun iſt von allen Nullen nichts zu borgen, ich borge alſo über alle weg, und 1 von der 9, das ſind 10 Einheiten in der nächſten Null bey der 9, die wollen wir darüber ſetzen, davon nimmt man wieder eine Einheit für die nächſte Null rechter Hand, ſo bleiben hier 9, und da kommen 10 hin, davon wollen wir wider 1 nehmen für die nächſte Null, da wird die 1 zur 10, und bey dieſer bleiben 9, ſo macht man es wieder für die nächſte Null, und ſo für alle. Wenn ich nun von der letzten Null bey der 6, die 10 geworden war, auch 1 zur 6 nehme, wie ich hier thun muſte, weil die unter der Sechſe ſtehende Zahl größer als 6 war, ſo wird die 0 auch zur 9 und zu der 6 kömmt 10. Wäre die letztere 6 eine 0 geweſen, ſo wären blos 10 daraus geworden, da es hier nun 16 werden. Nun wollen wir abziehen: 8 von 16 läßt 8: 5 von 9 läßt 4: 1 von 9 läßt 8: 2 von 9 läßt 7, 3 von 9 läßt 6: 4 von 9 läßt 5: 5 von 9 läßt 4: 7 von 8 läßt 1. Man ſieht leicht ein, daß, wenn in der unterern Zahl, im Subtrahendus, auch Nullen geweſen wären, das Abziehen eben ſo leicht würde von ſtatten gegangen ſeyn. Nun wird es nicht ſchwer ſeyn, nebenſtehende Exempel zu verſtehen und zu erklären.

```
   9                     9 9 9       9 9
 10.10                 10.10.10.10  10.10.10
54.0.003002            54.0.0.0.067.8.0.0.3.
236400001              3900450800 7
---------              ------------
303603001              500996169996

 9 9 9 9 9 9 9              9 9       9 9
10.10.10.10.10.10.10.10    10.10.10.10.10.10.10
1.0.0.0.0.0.0.0.0          78.0.0.03.08.0.0.2
 99999999                      2070405
---------                  -----------
        1                  77998237597

 9 9 9 9 9  9               9 9 9 9 9 9 9 9
10.10.10.10.10.10.10       10.10.10.10.10.10.10.10.10
5.0.0.0.0.0.0.0.04         6.0.0.0.0.0.0.0.0.2
      56782                                  7
---------                  ------------------
499943222                  5999999995
```

Bey dem leztern Exempel wird man den Grund dieſes Verfahrens auch leicht einſehen, wenn man nur bedenket, daß, weil die Nullen zu Neunen geworden, und nichts weiter von ihnen abgezogen wird, man ſie auch alsdenn ſo unter den Strich ſchreibet.

§. 48. Noch einen Fall wollen wir berühren. Es kann 5) kommen, daß der ganze Subtrahendus größer iſt als der obere Minuendus. Z. E. von 4 ſollte ich 7 abziehen, welches alſo ſtünde:

```
   4 Minuendus
   7 Subtrahendus
-----------------
 — 3 Differenz
```

Alsdenn ziehe ich die obere Zahl von der untern ab, und ſetze die Differenz mit dem Minuszeichen unter den Strich. Die Urſache iſt ſehr begreiflich.

Wollte

Wollte ich 7 von 4 nehmen, ſo gingen nicht nur alle viere verlohren, ſondern ich komme auch noch um 3 auf die entgegengeſetzte, das iſt die Minusſeite. Ich hätte 4 Thlr. Vermögen, und wollte 7 Thl. ausgeben, das hätte ich nicht, ich müſte alſo noch 3 dazu borgen, und was ich alsdenn noch hätte, wäre 3 Thlr. Schuld, die ich alſo mit dem Minuszeichen (—) bemerkte. Oder wenn dieſes deutlicher iſt: die Differenz zeigt mir an, um wie viel der Minuendus und Subtrahendus verſchieden ſind. Hier iſt der Subtrahendus vom Minuendus um — 3 verſchieden, denn, wenn ich die dazu addire (welches uns aus §. 32 noch bekannt ſeyn muß,) ſo kömmt der Minuendus heraus §. 41. denn — 3 + 7 addirt iſt = + 4. §. 29 und 32. Wobey man ſich hiebey an die Addition der entgegengeſetzten Größen wieder erinnern muß.

Alſo von	5 9 4 3 6
abgezogen	7.8.2.3.1
giebt zur Diff.	— 1 8 7 9 5

Uebrigens geht es auch bey dieſem Falle, was das übrige der Subtraktion betrift, auf die gelehrte Art.

§. 49. Die Probe für die Subtraktion, oder wenn man wiſſen will, ob man richtig ſubtrahirt hat, iſt auf alle Fälle, wenn man die Differenz und den Subtrahendus zuſammen addirt, da muß alsdenn die obere Zahl oder der Minuendus heraus kommen.

Ich habe 6.0.38.0.4.0.5 Minuendus
3 3 5 7 2 5 4 7 Subtrahendus

2 6 8 0 7 8 5 8 Differenz

60 380 405

Differenz und Subtrahendus addirt, welches wieder der Minuendus iſt. Es muß dieſes auf alle Fälle richtig ſeyn, weil die Differenz anzeiget, um wie viel der Subtrahendus kleiner iſt als der Minuendus, wenn man nun dieſes, was er kleiner iſt, hinzuſetzet, ſo muß ja nothwendig der Minuendus heraus kommen. Auch wenn die untere Zahl oder der Subtrahendus größer iſt, als die obere Zahl, ſo iſt dieſe Probe richtig, nur muß man alsdenn mit entgegengeſetzten Zeichen addiren, wovon wir ſchon im vorhergehenden Paragraphen etwas angeführt haben; das heißt die Differenz von dem Subtrahendus abziehen. Z. E.

8 Minuendus
12 Subtrahendus

— 4 Differenz

— 4 zu + 12 giebt 8 oder den Minuendus, oder 4 von 12 bleibt 8.

7453 Minuendus
8724 Suberahendus

— 1271 Differenz

7453

Differenz abgezogen vom Subtrahendus, welches wieder den Minuendus giebt.

§. 50. Zuweilen fügt es ſich, daß man von zuſammengeſetzten Größen, oder auch von Größen, die

die aus plus und minus Größen beſtehen, und zuſammen geſetzet ſind, andere zuſammengeſetzte abziehen ſoll. Z. E. Man ſollte von + 4 − 3 + 7 abziehen + 5 + 2 − 4. Alsdenn ſchließt man jede Größe in Klammern, ( ) und ſetzet das Minuszeichen dazwiſchen, um anzuzeigen, daß von der einen Größe die andere ſolle abgezogen werden. Man würde dieſes alſo ſchreiben:

(4 − 3 + 7) − (5 + 2 − 4) Die Klammern zeigen an, was zu jeder Größe gehöret, und daß man hier von der ganzen zuſammengeſetzten Größe die ganze andere zuſammengeſetzte Größe abziehen ſolle. Bey Zahlen geht es nun an, daß man die zuſammengeſetzten Größen auf eine bringen kann. Hier geht es an. Die Größe, welche hier den Minuendus vorſtellet, beſteht aus + 4 und + 7 und − 3. Das heißt, ich ſoll 4 und 7 erſt addiren, und nachher 3 davon nehmen, alsdenn habe ich erſt den Minuendus in einer einfachen Größe. 4 und 7 iſt 11, und 3 davon iſt 8. Alſo der Minuendus hier = 8. Der Subtrahendus beſteht aus 5 und 2, welches 7 ausmacht, und davon ſoll 4 abgenommen werden, alſo bleibt noch 3. Ich ſoll alſo nach dieſem Exempel von 8 die 3 abziehen, und denn bleibt noch 5. Dieſes Exempel würde man überhaupt ſo ſchreiben.

$$(4 - 3 + 7) - (5 + 2 - 4) = 8 - 3 = 5.$$

So wäre dieſes folgende Exempel:

$$(9 + 8 - 5 - 2) - (6 + 4 - 2) = 10 - 8 = 2.$$

und $(5 - 4 + 6) - (8 + 6 - 3) = 7 - 11 = - 4$

Anmerkung. Es kömmt ſehr oft vor, daß Zahlen, auch Buchſtaben in Klammern eingeſchloſſen ſind, die aus plus und minus Größen beſtehen; das zeigt allezeit an, daß das, was in den Klammern ſteht, zuſammen gehört und eine Größe ausmacht. Mannigmal findet man um die Klammern noch mehr, und zwiſchen dieſen Klammern Größen. Ich werde in der Folge anzeigen, was dieſes bedeutet, um meinen Leſern nicht eher etwas vorzutragen, als bis ſie es gebrauchen müſſen.

§. 51. Wir haben das Nothwendigſte von der Subtraktion in Zahlen geſagt. Wir wollen noch einige Exempel zur Uebung hinzu ſetzen.

Man ſubtrahire: 33 von 54 Differenz 21
70 von 78 - - 8
204 von 564 - - 360

118 von 900 Differenz 782
7651 von 8354 - - 703
999 von 1000 - - 1

679542653 von 789674768 Diff. 110132115
654 von 7900000043 - - 7899999389
9 von 7000000008 - - 6999999999
4130000004 v. 9870003214 - - 5740003210
9999999999 v. 10000000000 - - 1
1 von 98000000000 - - 97999999999
999,999999 von 111111, 111111
Differenz 110111, 111112
59999,999997 von 600000,000002
Diff. 540000000005
(45962+765+33+7) — (654978+296+45+9)
Differenz — 608561

Bey

Bey allen dieſen Exempeln, das letzte ausgenommen, iſt die erſte Größe linker Hand der Subtrahendus oder die untere Zahl. Die zweyte der Minuendus oder die obere Zahl. Aber bey dem letztern iſt die erſte Größe die obere Zahl, und die rechter Hand die untere, und weil dieſe letztere größer iſt als die erſtere, muß die Differenz nothwendig eine minus Größe werden.

§. 52. Wir fangen nun die allgemeine Subtraktion, oder die Subtraktion mit Buchſtaben an. Hier haben wir verſchiedene Fälle zu bemerken, die ich deutlich aus einander zu ſetzen, mich bemühen werde. Ich werde alsdenn eine allgemeine Regel hinzu fügen, die auf alle dieſe Fälle gilt. Man kann 1) plus von plus: 2) minus von minus: 3) minus von plus: 4) plus von minus abziehen. Dieſes gilt nicht nur von Buchſtaben, es kann auch bey Zahlen gebraucht werden, da ohnedem die Buchſtaben Zahlen oder Größen vorſtellen. Man pflegt es aber gemeiniglich bey der Buchſtabenrechnung erſtlich vorzutragen. Ueberhaupt iſt wieder noch zu merken, daß man nur gleichnamichte Dinge von einander abziehen könne, was man mit den ungleichnamichten anfange, werden wir weiter unten zeigen.

§. 53. Plus von plus. Hier finden zwey Fälle ſtatt. Entweder der Minuendus oder die obere Größe iſt größer als der Subtrahendus, oder der Subtrahendus oder die untere Größe iſt größer als der Minuendus. Wenn eins von beyden das größeſte iſt, ſo muß es das durch ſeinen Coefficienten ſeyn. Was Coefficient ſey, haben wir

§. 35 angezeiget. Iſt der Minuendus größer, ſo iſt das Abziehen gar keiner Schwierigkeit unterworfen. Es geſchiehet auf die gewöhnliche Art. Von + 16a ziehe man ab + 6a. Steht alſo:

$$\begin{array}{r} 16a \\ 6a \\ \hline 10a \end{array}$$ denn 6a von 16a läßt 10a.

Von 4a + 2b + 5c ziehe man ab 3a + b. Steht alſo:

$$\begin{array}{l} 4a + 2b + 5c. \\ 3a + b \\ \hline + a + b + 5c \end{array}$$

Von den 5c war nichts abzuziehen, alſo ſetzte man ſie unverändert unter den Strich zu der Differenz. Iſt aber der Minuendus kleiner als der Subtrahendus, ſo verändert das ſchon die Sache. Von 5a ziehe man ab 7a. Es ſtünde alſo:

$$\begin{array}{r} 5a \\ 7a \\ \hline -2a \end{array}$$

Wenn man von 5a die 7a wegnehmen ſoll, ſo gehen nicht nur die 5a verlohren, ſondern noch 2a dazu; dieſe 2a müſſen alſo in das entgegengeſetzte, in die minus Größen fallen. Wenn man 5 Thlr. hat, giebt aber 7 Thlr. aus, ſo hat man 2 Thlr. Schuld, die als − 2 angeſehen werden können. Iſt alſo der Subtrahendus größer als der Minuendus, ſo muß aus der Differenz nothwendig eine minus Größe werden.

Sollte alſo von 4a + b + 5c + 3d, 6a + 2b + 2d abgezogen werden, ſo ſtünde das alſo, gleichnamich.

nichtes unter gleichnamichtes:

$$\begin{array}{rrrr} 4a & + b & + 5c & + 3d \\ 6a & + 2b & & + 2d \\ \hline -2a & - b & + 5c & + d \end{array}$$

Denn 6a im Subtrahendus iſt größer als 4a im Minuendus, und zwar um 2a. Die Differenz wird alſo eine minus Größe, und = − 2a. 2b iſt auch größer als b, und zwar um 1b, die Differenz wird wieder eine minus Größe, und zwar − b. Von 5c war nichts abzuziehen, man ſetzet ſie alſo mit ihrem Zeichen zur Differenz. und von 3d konnte ich 2d wirklich abziehen, alſo blieb + d zur Differenz, weil der Unterſchied zwiſchen 3d und 2d wirklich = + d iſt. Man betrachte alle dieſe Exempel noch einmal:

$$\begin{array}{r} 16a \\ 6a \\ \hline 10a \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 4a & + 2b & + 5c \\ 3a & + b & \\ \hline a & + b & + 5c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5a \\ 7a \\ \hline -2a \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 4a & + b & + 5c & + 3d \\ 6a & + 2b & & + 2d \\ \hline -2a & - b & + 5c & + d \end{array}$$

Man würde aber eben das zur Differenz bekommen haben, wenn man in der untern Größe oder im Subtrahendus die Zeichen verändert, und wo plus ſteht, das Minuszeichen, und wo minus ſteht, das Pluszeichen gemacht, und nachher, anſtatt zu ſubtrahiren, addirt hätte. Wir wollen es gleich verſuchen. Nur muß man ſich aus §. 29. 32. erinnern, was die Addition mit entgegengeſetzten Größen ſey.

$$\begin{array}{r} 16a \\ 6a \\ \hline 10a \end{array}$$

Ver-

Verändert man das Zeichen im Subtrahendus, und addirt nun — 6a und + 16a giebt + 10a. Denn — 6a heben 6a von den obern 16a auf. Gleichfalls:

$$\begin{array}{rrrr} 4a & + b & + 5c & + 3d \\ 6a & + 2b & & + 2d \\ - & - & & - \\ \hline -2a & - b & + 5c & + d \end{array}$$

Wir haben die Zeichen im Subtrahendus verändert, und dieſe veränderten Zeichen unter die Größen geſetzet. Man addire nun — 2d und + 3d, giebt + d §. 29. 32. 5c bleibt wie es iſt. — 2b und + b giebt — b; — 6a und + 4a giebt — 2a: eben dieſes kam beym Subtrahiren heraus. Weil dieſes auf alle Fälle wahr iſt, ſo nennet man auch das Subtrahiren das **entgegengeſetzte Addiren.**

§. 54. **Minus von minus.** Hier ſind gleichfalls wieder zwey Fälle; entweder der Minuendus iſt größer, oder der Subtrahendus iſt größer. Der **Minuendus** ſey **größer.** Man ziehe von — 8a ab — 4a. Es ſteht alſo:

$$\begin{array}{r} -8a \\ -4a \\ \hline -4a \end{array}$$

— 4a von — 8a läßt — 4a.

Die Differenz iſt alsdenn allezeit eine minus Größe, und das Verfahren ſelbſt iſt der Beweis, daß man alſo verfahren

müſſe:

müſſe: $-6a-3d-2x$
$-2a-d-x$

$-4a-2d-x$

Wenn man hier wiederum die Zeichen des Subtrahendus verändert, und die Subtraktion in eine bloße Addition verwandelt, ſo kömmt eben das heraus: $-8a$
$-4a$
$+$

$-4a$

Denn $+4a$ zu $-8a$ addirt, giebt zur Differenz $-4a$

$$\begin{array}{r} -6a-3d-2x \\ -2a-d-x \\ +\quad+\quad+ \\ \hline -4a-2d-x \end{array}$$

$+2a$ und $-6a$ giebt $-4a$; (§. 29, 32) $+d$ und $-3d$ giebt $-2d$; $+x$ und $-2x$ giebt $-x$.

Der Subtrahendus ſey größer. Alsdenn kommen in die Differenz bey dieſem Falle, minus von minus ſubtrahirt, blos plus Größen. Wir wollen bey den Exempeln den Grund davon anzeigen. Von $-6a$ ziehe man ab $-10a$. Alſo: $-6a$
$-10a$

$+4a$

Denn von den $-10a$ werden $-6a$ gebraucht, die obern $-6a$ aufzuheben, und nun ſollten noch $-4a$ abgezogen werden, oder noch von der obern Größe ein Mangel von $4a$ genommen werden, es iſt aber nichts mehr abzuziehen, alſo wird der

Man=

Mangel der obern Größe noch um 4a mehr gehoben, das heißt: es werden noch 4a gegeben. Man habe 6 Thlr. Schuld, und verringere dieſe Schuld um 10 Thlr. das heißt, man behält noch 4 Thlr. übrig, wenn man alles bezahlet hat, oder man hat + 4 Thlr. Auf die Art wird aus folgendem Exempel $-2a - 3b - x$

$$-5a - 6b$$

die Differenz ſeyn $+ 3a + 3b - x$

Denn von dem letztern war nichts abzuziehen, das wird ſo hingeſetzt. Eben dieſe Differenz würde heraus gekommen ſeyn, wenn man die Zeichen des Subtrahendus umgekehrt, und die Subtraktion in eine Addition verwandelt hätte: $-6a$

$$\begin{array}{r} -10a \\ + \\ \hline 4a \end{array}$$

Denn + 10a und − 6a addirt, giebt + 4a.

$$\begin{array}{l} -2a - 3b - x \\ -5a - 6b \\ + \quad + \\ \hline 3a + 3b - x \end{array}$$

+ 5a und − 2a addirt, giebt + 3a; + 6b und − 3b giebt + 3b, und zu − x iſt nichts zu addiren, alſo wird es ſo hingeſetzt.

§. 55. Wir wollen nun **minus** von **plus** abziehen. Abermal zwey Fälle, entweder der Minuendus oder der Subtrahendus iſt der größeſte von beyden.

Der

Der Minuendus ſey der gröſzeſte. Man ziehe von + 8a ab − 3a. Es ſteht alſo:

$$\begin{array}{r} 8a \\ -3a \\ \hline +11a \end{array}$$

Hier wird die Differenz plus, und das iſt auch leicht zu begreifen. Ich ſollte von 8a nicht wirklich 3a abnehmen, ſondern das entgegengeſetzte, den Mangel von 3a, den Mangel, daß der Subtrahendus nicht gröſzer als 8a war, dieſen ſollte ich um 3a noch vermindern, da muſten nothwendig + 11a heraus kommen. Wenn ich 8 Thlr. habe, ſo fehlen mir noch 3 Thlr., daß ich nicht 11 habe. Wenn ich dieſen Mangel wegnehme, oder − 3 Thlr. davon ſubtrahire, ſo bekomme ich wirklich + 11 Thlr. Alſo folgendes Exempel:

$$\begin{array}{r} 5a + 3b + y \\ -2a - b - y \\ \hline \end{array}$$

würde zur Differenz haben + 7a + 4b + 2y

Betrachtet man beyde Exempel nochmal, und verwandelt im Subtrahendus die Zeichen ins entgegengeſetzte, und verändert die Subtraktion in eine Addition, ſo kömmt eben die Differenz heraus:

$$\begin{array}{r} 8a \\ -3a \\ + \\ \hline +11a \end{array}$$

Denn + 8a und + 3a giebt + 11a.

$$\begin{array}{r} 5a + 3b + y \\ -2a - b - y \\ + \quad + \quad + \\ \hline 7a + 4b + 2y \end{array}$$

+ y und noch + y giebt + 2y
+ b und + 3b giebt + 4b
+ 2a und + 5a giebt + 7a.

Der

Der Subtrahendus ſey der größeſte.

Von 5a ziehe man ab $-8a$

$$\begin{array}{r} 5a \\ -8a \\ \hline +13a \end{array}$$

Hier wird wieder die Differenz plus, weil man, wie wir vorher gezeiget, immer einen Mangel von dem Minuendus nehmen, das heißt, ihn wirklich größer machen ſoll. Folgendes Exempel:

$$\begin{array}{r} 7a+3b+x+y \\ -6a-b\quad-5y \\ \hline \end{array}$$

hätte zur Differenz $+13a+4b+x+6y$

Eben dieſe Differenz würde herauskommen, wenn man die Zeichen des Subtrahendus umkehrt, und die Subtraktion in eine Addition verwandelt:

$$\begin{array}{r} 5a \\ -8a \\ + \\ \hline +13a \end{array}$$

$+5a$ und $+8a$ geben $+13a$. Eben ſo bey dem 2ten Exempel:

$$\begin{array}{r} 7a+3b+x+y \\ -6a-b\quad-5y \\ +\quad+\quad\;+ \\ \hline +13a+4b+x+6y \end{array}$$

Man ſiehet, es kömmt eben das heraus, wenn man nach veränderten Zeichen aus der Subtraktion die Addition macht.

§. 56. Der letzte Fall. **Plus von minus.** Hier ſind auch zwey Fälle, entweder der Minuendus iſt größer, oder der Subtrahendus. Aber auf beyde Fälle wird die Differenz immer

minus

minus, denn ich ſoll immer eine Größe noch um eine poſitive Größe vermindern. Man ſoll von $-5b$ abziehen $+3b$ ſtehet alſo:

$$\begin{array}{r} -5b \\ +3b \\ \hline -8b \end{array}$$

Das heißt, ich ſoll die $5b$ wirklich noch um $3b$ vermindern, oder ins entgegengeſetzte bringen, das gäbe $-8b$. Wäre auch hier der Subtrahendus größer, ſo käme doch eine negative Größe zur Differenz.

$$\begin{array}{r} -9a \\ +10a \\ \hline -19a \end{array}$$

Von $-9a$ die $+10a$ abgezogen, giebt $-19a$. Wer ſchon 9 Thlr. Schulden hat, und will noch wirkliche 10 Thlr. verwenden, da er vorher ſchon nichts auszugeben hatte, bekömmt 19 Thlr. Schulden. Folglich würde von dieſem Exempel:

$$\begin{array}{r} -4a-6b-3c \\ +5a+b+c \\ \hline -9a-7b-4c \end{array}$$

Verwandelt man in allen dieſen Exempeln die Zeichen des Subtrahendus ins entgegengeſetzte, und addirt alsdenn, anſtatt zu ſubtrahiren, ſo kommt eben die Differenz heraus:

$$\begin{array}{r} -5b \\ +3b \\ - \\ \hline -8b \end{array} \qquad \begin{array}{r} -9a \\ +10a \\ - \\ \hline -19a \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} -4a & -6b & -3c \\ +5a & +b & +c \\ - & - & - \\ \hline -9a & -7b & -4c \end{array}$$

Man ſieht, daß das auf alle Fälle eintrift, denn nur das letzte Exempel zu nehmen, wenn die Zeichen verändert ſind, und man nur aus der Subtraktion die Addition macht, — 5a und 4a macht — 9a; — b und — 6b giebt — 7b; — c und — 3c giebt — 4c, welches eben die Differenz als bey der Subtraktion iſt.

§. 57. Wir haben bey allen möglichen Fällen die im Subtrahiren vorkommen können, nach der Anweiſung der §. 53, 54, 55, 56 gefunden, daß eben die Differenz herauskomme, wenn ich in der untern Größe oder im Subtrahendus die Zeichen verändere, und hernach die Subtraktion in eine Addition verwandle. Die allgemeine und ſehr kurze Regel für alle mögliche Subtraktionsexempel iſt alſo folgende: **Man verwandle die Zeichen der Größen des Subtrahendus in die entgegengeſetzten, und verändere die Subtraktion in eine Addition.** Nun wollen wir davon einige Exempel geben. Von 5a — 7y + 3x — 2f ziehe man ab 7a + 2y + 6x — 5f. Es ſtünde alſo:

$$\begin{array}{rrrr} 5a & -7y & +3x & -2f \\ 7a & +2y & +6x & -5f \\ - & - & - & + \\ \hline -2a & -9y & -3x & +3f \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} \text{von} & 8a & -5c & +9d \\ \text{ziehe ab} & 6a & -8c & -7d \\ & - & + & + \\ \hline & 2a & +3c & +16d \end{array}$$

von

$$\begin{array}{lrrrrr} \text{von} & 9b & +15c & -7d & +8e & -f \\ \text{ziehe ab} & 6b & +20c & -9d & -9e & +7f \\ & - & - & + & + & - \\ \hline & 3b & -5c & +2d & +17e & -8f \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} \text{von} & 3a & -4b & +5c \\ \text{ziehe ab} & -6a & +2b & +4c \\ & + & - & - \\ \hline & 9a & -6b & +c \end{array}$$

§. 56. Es kann kommen, daß Größen im Subtrahendus ſo groß ſind, als ſie im Minuendus ſich befinden, und beyde gleiche Zeichen haben, alsdenn heben ſie ſich einander auf, und ihre Differenz iſt $= 0$, oder ſie laſſen nichts zum Reſte. In Zahlen wiſſen wir das ſchon, und das muß auch in Buchſtaben gelten, denn 6 von 6 iſt $= 0$, und $+ b$ von $+ b$ iſt auch $= 0$, oder $+ 6ac$ von $6ac$ iſt $= 0$. Eben das geſchieht auch, wenn man, wie wir gelehret haben, die Subtraktion in eine Addition verwandelt, weil ſich alsdenn die einander entgegengeſetzten Zeichen von gleichen Größen aufheben. Exempel:

$$\begin{array}{rrr} 2a & +ab & +3b \\ 2a & -ab & +3b \\ - & + & - \\ \hline & 2ab & \end{array}$$

Denn $- 2a$ und $+ 2a$ ſind $= 0$, $+ ab$ und noch $+ ab$ $= 2ab$, und $+ 3b$ und $- 3b = 0$.

$$\begin{array}{llll} a + 3aab + 3abb + b & & & a + b \\ a - 3aab + 3abb - b & & & a - b \\ - + \quad - \quad + & & & - + \\ \hline + 6aab \quad\quad +2b & & & +2b \end{array}$$

Man ſieht, daß auch hier die allgemeine Regel gelte, daß man die Zeichen im Subtrahendus verwandle, und anſtatt des Subtrahirens nun addire.

§. 59. Allein öfters kömmt es auch, daß im Minuendus Größen vorkommen, die ſich im Subtrahendus nicht finden (welchen Fall wir ſchon einigemal gezeigt haben) ſo ſetzet man die Größen des Minuendus ohne Veränderung des Zeichens zur Differenz, oder im Subtrahendus befinden ſich Größen, die im Minuendus nicht ſind. Bey dieſen gilt gleichfalls die Regel, daß man die Zeichen verändere, und die Subtraktion in eine Addition verwandle, und weil in der obern Größe ſich nichts findet, das man dazu addiren konnte, ſo iſt es ganz natürlich, daß man ſie mit den veränderten Zeichen zur Differenz herunter ſetzet.

Z. E. von $+ b$
ziehe ab $+ f$
$-$
$\overline{\quad b - f \quad}$

Denn ich ſoll ja wirklich f von b abziehen, oder b um f kleiner machen.

von $+ b$
ziehe ab $- f$
$+$
$\overline{\quad + b + f \quad}$

Denn

Denn b ſoll nicht um f kleiner gemacht werden, ſondern um den Mangel des f, alſo um f vermehret werden.

Unſere Regel, nach veränderten Zeichen des Subtrahendus die Subtraktion in eine Addition zu verwandeln, iſt alſo im höchſten Grade allgemein.

Nun werden wir alle Exempel leicht ſubtrahiren können. Exempel zur Uebung:

$$\begin{array}{l} 5a - 3b + f - 9h + 8 \\ 2a + 3b + f - 8h - 8 + g - x \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \\ \hline 3a - 6b - h + 16 - g + x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4a + 3b - 5c + 8d - 7e - 2f \\ 3a + 8b + 4c - 8d - 3e - 6f + g - 2h \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \\ \hline a - 5b - 9c + 16d - 4e + 4f - g + 2h \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -17a - b + 5c + g - 3h \\ -17a - 6b + 7c - r + s \\ + \quad + \quad - \quad + \quad - \\ \hline +5b - 2c + g - 3h + r - s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -5a + 3b - c + 6f - g \\ -6a + 4b - 2c + 7f + 2g + r \\ + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad - \\ \hline +a - b + c - f - 3g - r \end{array}$$

§. 60. Die Probe beym Subtrahiren mit Buchſtaben wird eben ſo gemacht, wie bey den

Zahlen. Man addirt nemlich die Differenz zum Subtrahendus, ſo kömmt der Minuendus heraus. Der Grund hievon iſt auch eben der, als bey den Zahlen, denn die Differenz zeiget den Unterſchied zwiſchen dem Subtrahendus und Minuendus an. Wenn man dieſen Unterſchied dem Subtrahendus zugiebt, und das geſchieht, wenn man ihn dazu addirt, ſo muß der Minuendus nothwendig heraus kommen. Eines der letzten Exempel ſoll hievon die Probe ſeyn.

$$\begin{array}{ll} \text{Minuendus} & 5a - 3b + f - 9h + 8 \\ \text{Subtrahendus} & \underline{2a + 3b + f - 8h - 8 + g - x} \\ & 3a - 6b \quad - h + 16 - g + x \end{array}$$

Differenz und Subtrahendus addirt, giebt Minuendus $5a - 3b + f - 9h + 8$

Denn $3a$ und $2a$ machen $5a$; $-6b$ und $+3b$ geben $-3b$; Null und $+f$ geben $+f$; $-h$ und $-8h$ geben $-9h$; $+16$ und -8 geben $+8$; $-g$ und $+g$ ſind Null; $+x$ und $-x$ auch 0, und dieſe beyden letzten ſtanden auch im Minuendus nicht.

§. 61. Um unſere Leſer zu vergnügen, wollen wir auch nun in einem Exempel der Buchſtabenſubtraktion die Buchſtaben in Zahlen beſtimmen. Wir wollen von $a - b + c + d$

$$\begin{array}{ll} \text{abziehen} & -a + b - c + d \\ & \underline{\;+ \quad - \quad + \quad -\;} \\ & 2a - 2b + 2c \end{array}$$

Wir haben ſchon im Anfang geſagt, daß man alle mögliche Größen durch die Buchſtaben verſtehen könne. In dieſem Exempel ſey nun:

$$a = 2;\ b = 3;\ c = 4 \text{ und } d = 5$$

ſo

ſo wäre, wenn man ſtatt der Buchſtaben im Exempel dieſe Zahlen ſetzet, der Minuendus

$$2 - 3 + 4 + 5$$

Das wäre nun in einer Größe; 4 und 5 = 9, und 2 dazu = 11, und da ſollen noch 3 von ab, alſo 8. Der Subtrahendus wäre − 2 + 3 − 4 + 5. Das wäre: + 5 und + 3 = + 8, davon ſoll noch − 2 und − 4, alſo − 6 abgezogen werden, alſo bliebe im Subtrahendus + 2. Im Minuendus war + 8 und im Subtrahendus + 2. Ziehe ich nun die + 2 von der + 8 ab, ſo bleiben + 6, und das iſt die Differenz. Dieſes muß nun auch die Buchſtabendifferenz in ſich enthalten. Sie war 2a − 2b + 2c. a war 2, alſo + 2a = 4; b war 3, alſo − 2b = − 6; c war 4, alſo + 2c = 8.

Folglich ſteht in der Buchſtabendifferenz, die Buchſtaben in Zahlen verwandelt, 4 − 6 + 8, dieſes iſt = 12 − 6 (denn + 8 und + 4 iſt = 12) aber 12 − 6 iſt = + 6. Alſo eben das, was wir in bloßen Zahlen fanden.

Man urtheile nicht ſo voreilig, daß man alſo durch die Buchſtabenrechnung nur weitläuftig rechne. Wir werden immer mehr in der Folge einſehen, daß man im höchſten Grade allgemein dadurch rechnen könne, und daß ſie eine der erhabenſten Erfindungen des menſchlichen Verſtandes ſey. Und dieſer Einwurf wird alsdenn von ſelbſt wegfallen.

§. 62. Man hat mannichmal auch zuſammengeſetzte Größen in Buchſtaben, die ſich nicht von einander abziehen laſſen. Deren Subtraktion wird öfters nur angezeiget. Man ſchließet, was zum

Minuendus gehört, in eine Klammer, ingleichen auch was zum Subtrahendus gehört, und macht dazwiſchen das Minuszeichen. Z. E. $(4a - 3b + 2c) - (7g + x - y)$ Das zeiget an, daß die letztere Größe, nachdem ſie addirt iſt, von der erſteren, nachdem ſie auch vorher addirt iſt, (welches beydes erſt geſchehen kann, wenn die Buchſtaben bekannt ſind) ſoll abgezogen werden. Die Differenz dieſes Exempels würde ſeyn $4a - 3b + 2c - 7g - x + y$.

§. 63. Wir beſchließen die Lehre von der Subtraktion mit einigen Anmerkungen, welche in der That ſehr leicht und begreiflich ſind, welche aber doch oft ſehr wichtig werden.

Die erſte Anmerkung. Wenn zwey Größen gleich ſind, und man ſubtrahiret von ihnen gleiche Größen, ſo bleiben die Reſte gleich. Nur ein Exempel, und die Regel wird ſehr verſtändlich ſeyn:

$8 = 8$

$2 = 2$ davon ſubtrahirt

$6 = 6$ folglich ſind die Reſte gleich,

oder $8 - 2 = 8 - 2$

In Buchſtaben. Es ſey $a = r$

$c = d$

folglich $a - c = r - d$

Wir haben mit Vorbedacht verſchiedene Buchſtaben gewählet, die wir einander gleich geſetzet haben, welches man doch thun kann, um den Anfänger dazu zu gewöhnen.

Die

Die zweyte Anmerkung. Wenn zwey Größen ungleich ſind, ſo, daß eine größer iſt als die andere, und man ſubtrahiret von beyden gleich viel, ſo muß der Reſt der größern auch größer ſeyn als der Reſt der kleinern. Ein Exempel ſoll es erläutern:

$$\begin{array}{ll} & 10 > 8 \\ \text{gleiches ſubtrahirt} & \underline{5 = 5} \end{array}$$

folglich $10 - 5 > 8 - 5$ oder $5 > 3$

Im Buchſtaben $\begin{array}{l} a > b \\ \underline{c = c} \\ a - c > b - c \end{array}$ oder $\begin{array}{l} a > b \\ \underline{c = d} \\ a - c > b - d \end{array}$

Die dritte Anmerkung. Wenn aber zwey Größen gleich ſind, und man ſubtrahiret von der erſten mehr als von der andern, ſo wird der Reſt der erſten kleiner, als der Reſt der andern.

Ein Exempel: $\begin{array}{l} 12 = 12 \\ \underline{5 > 3} \\ 12 - 5 < 12 - 3 \end{array}$ oder $7 < 9$

In Buchſtaben $\begin{array}{l} a = a \\ \underline{b > c} \\ a - b < a - c \end{array}$ auch es ſey $\begin{array}{l} a = b \\ \underline{c > d} \\ a - c < b - d \end{array}$

Man muß nothwendig dieſe Sätze leicht verſtehen, aber man bemerke ſie wohl, ſie werden in der Folge wichtig.

Das vierte Kapitel.

Von der Multiplikation in ganzen Zahlen und Buchſtaben.

§. 64. Man konnte eine Größe durch die Addition vermehren, wenn man zu ihr eine oder mehrere Größen hinzu addirte; wir haben dieſes weitläuftig genug in der Lehre von der Addition geſehen. Man ſiehet auch leicht ein, daß man eine und eben dieſelbe Größe etliche mal zu ſich ſelbſt addiren könne. Man könnte z. E. 16, oder jede andere Zahl, viermal, ſechsmal, zwanzig- und mehrmal zu ſich ſelbſt addiren. Allein man erwäge, wie beſchwerlich das ſeyn, wie viel Raum es erfordern, und wie vieler Gefahr, ſich zu verzählen, man ausgeſetzt ſeyn würde, wenn man eine groſe Zahl ſehr vielmal zu ſich ſelbſt addiren ſollte. Wenn man z. E. 12344 2420mal zu ſich ſelbſt addiren ſollte, wie groß müſte nicht der Raum ſeyn, dieſe Zahl 12344 2420mal unter einander zu ſetzen, und wie leicht würde man nicht irren? Man hat daher eine andere kurze Methode erfunden, die ſich zum Theil auf das dekadiſche Geſetz gründet, das **Vielfache** einer Zahl zu finden, oder zu wiſſen, was herauskomme, wenn ſie vielmal zu einander addirt würde, und dieſe Methode nen-

nennet man die **Multiplikation**, oder die **Vermehrung** einer Zahl oder Größe.

Multipliciren heißt alſo, eine gegebene Größe ſo vielmal nehmen, als es gefordert wird, oder als die Zahl, ſo vielmal es gefordert wird, die Einheit in ſich enthält. 36 mit 12 multipliciren, heißt 36 ſo vielmal nehmen, als die 12 die Einheit in ſich enthält. Nun enthält die 12 die Einheit zwölfmal in ſich, alſo 36 mit 12 multipliciren, heißt 36 zwölfmal nehmen.

§. 65. Die gewöhnlichſten Zeichen der Multiplikation ſind ein Punkt zwiſchen zwey Größen oder Zahlen, oder ein liegendes Kreuz × 36 mit 12 multiplicirt, wird alſo angezeiget; 36 . 12 oder 36 × 12. Wenn man mit Zahlen zu multipliciren anzeigen will, muß man dieſen Punkt oder Kreuz nicht vergeſſen, weil man ſonſt z. E. anſtatt 36 multiplicieret mit 12 anzuzeigen, darunter 3612 verſtehen möchte, welches ſehr von einander verſchieden iſt. Wenn man Buchſtaben mit einander zu multipliciren anzeigen will, ſo werden die nur an einander ſetzet, weil das keine Irrung verurſachen kann. Doch davon weitläuftiger unten.

§. 66. Die Größen, die man mit einander multipliciren ſoll, wie auch die Größe, die man durch die Multiplikation findet, haben ihre eignen Namen. Die Größe oder Zahl, die man einige

maß

mal vermehren ſoll, heißt der **Multiplicandus** (die zu vermehrende Zahl). Die Größe oder Zahl, womit man ſie vermehren ſoll, heißt der **Multiplicator**, (oder Vermehrer). Beyde werden auch wohl gewöhnlich **Faktoren** genannt, oder **Efficienten** (die ſich einander multiplicirenden Größen.) Die Zahl oder Größen, welche durch die Multiplikation heraus kömmt, heißt das **Faktum**, oder am gewöhnlichſten das **Produkt**.

Z. E. 5 Multiplicandus } beyde heiſſen **Faktoren**
6 Multiplicator } oder **Efficienten**

30 das **Produkt** oder das **Faktum**.

§. 67. Wir wollen von kleinen, oder von der Multiplikation der Einer mit einander anfangen, weil ſich darauf alle andere Multiplikation der grösſern Zahlen gründet. Um die Produkte aller Einer mit einander, nemlich von 1 bis 9 zu finden, addire man ſie zu einander. Addirt man erſt die 1, einmal, zweymal, dreymal ꝛc. bis neunmal zu einander, ſo bekömmt man die einfachen Zahlzeichen von 1 bis 9; alſo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nun addire man die 2 auch einmal, zweymal, dreymal ꝛc. bis neunmal zu einander, ſo bekömmt man, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. Verfährt man mit der 3 eben ſo, ſo bekommt man 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Und mit der 4 ſo verfahren, giebt 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36. Die 5 giebt auf die Art 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45.

Die

Die 6 giebt 6, 12, 18 24, 30, 36, 42 48, 54. Die 7 alſo behandelt, giebt 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63. Die 8 giebt 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72. Die 9 giebt 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

Dieſe gefundenen Größen kann man um der Bequemlichkeit willen in ein Täflein tragen, welches das Pyragoriſche Rechentäflein genennet wird und beyſtehende Figur hat.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Dieſes Rechentäflein wird alſo gemacht. In der erſten Reihe linker Hand ſetzet man die 1, nach einander neunmal zu ſich ſelbſt addirt, unter einander, da kommen alſo die neun einfachen Zahl-

zeichen

zeichen hin. Zwiſchen jeder Zahl kömmt ein Strich. Zu der zweyten Reihe herunter ſetzet man die 2, einmal, zweymal bis neunmal zu ſich ſelbſt addirt, welches wir ſchon im Vorhergehenden angezeiget haben. In der dritten Reihe macht man es eben ſo mit der 3, und ſo fähret man in den Reihen fort bis 9. Hieraus entſteht, daß auch in den Querreihen eben das **Vielfache** der einfachen Zahlzeichen kömmt, als in den heruntergehenden Reihen. Will man das nun Vielfache einer Zahl von 1 bis 9 wiſſen, ſo ſucht man die Zahl in der erſten heruntergehenden Reihe linker Hand auf, wie auch in der oberſten Querreihe die andere gegebene Zahl. Nun fährt man von der Zahl in der heruntergehenden Reihe in die Quer gerade hin, und von der Zahl in der Querreihe gerade herunter. Wo nun beyde Linien, die man in die Quer und herunter ziehet, einander durchſchneiden, da iſt das Produkt der beyden geſuchten Zahlen. Z. E. Ich wollte 5 mal 7 wiſſen. Suche in der erſten heruntergehenden Reihe linker Hand die 5, und in der oberſten Querreihe die 7; fahre von der 5 in die Quer gerade, und von der 7 gerade herunter, ſo durchſchneiden die beyden Linien einander in dem Quadrat, wo 35 ſteht, und das iſt das Produkt von 5 mal 7. Es würde unnöthig ſeyn, mehr Exempel anzuführen, die jeder leicht ſelbſt machen kann.

Am beſten iſt es, den Inhalt dieſes Rechentäfleins, welches das **Einmaleins** heißt, auswendig zu lernen, indem man es doch beſtändig gebrauchet. Wir wollen es deswegen hieher ſetzen,

damit

damit es ein Anfänger nicht aus andern Büchern ſuchen dürfe. Hier iſt es:

Ein mal ein iſt ein.

2 mal	2	iſt	4
2 mal	3	iſt	6
2 mal	4	iſt	8
2 mal	5	iſt	10
2 mal	6	iſt	12
2 mal	7	iſt	14
2 mal	8	iſt	16
2 mal	9	iſt	18
2 mal	10	iſt	20
3 mal	3	iſt	9
3 mal	4	iſt	12
3 mal	5	iſt	15
3 mal	6	iſt	18
3 mal	7	iſt	21
3 mal	8	iſt	24
3 mal	9	iſt	27
3 mal	10	iſt	30
4 mal	4	iſt	16
4 mal	5	iſt	20
4 mal	6	iſt	24
4 mal	7	iſt	28
4 mal	8	iſt	32
4 mal	9	iſt	36
4 mal	10	iſt	40

5 mal	5	iſt	25
5 mal	6	iſt	30
5 mal	7	iſt	35
5 mal	8	iſt	40
5 mal	9	iſt	45
5 mal	10	iſt	50
6 mal	6	iſt	36
6 mal	7	iſt	42
6 mal	8	iſt	48
6 mal	9	iſt	54
6 mal	10	iſt	60
7 mal	7	iſt	49
7 mal	8	iſt	56
7 mal	9	iſt	63
7 mal	10	iſt	70
8 mal	8	iſt	64
8 mal	9	iſt	72
8 mal	10	iſt	80
9 mal	9	iſt	81
9 mal	10	iſt	90
10 mal	10	iſt	100
10 mal	100	iſt	1000

10 mal 1000 iſt 10000
10 mal 10000 iſt 100000
10 mal 100000 iſt 1000000,
oder Million.

Di=

Dieſes **Einmaleins** muß man rückwärts und vorwärts, außer und in der Reihe vollkommen aus dem Kopfe lernen, wenn man im Multipliciren mit Zahlen fortkommen will.

§. 68. Wenn man dieſes **Einmaleins** auswendig kann, ſo wird es gar nicht ſchwer ſeyn, Zahlen mit einander zu multipliciren, ſie mögen ſo groß ſeyn als ſie wollen. Wir wollen anfangen, eine zuſammengeſetzte Zahl mit einer einfachen zu multipliciren. Dieſes wird es uns lehren, auch zuſammengeſetzte Ziffern mit zuſammengeſetzten zu multipliciren. Wir wollen bey dem Verfahren auch den Grund des Verfahrens anzeigen. Man multiplicire 546843 mit 8. Man ſetzt die 8, welches hier eine Zahl aus den Einern iſt, unter die Einheit der zu multiplicirenden Zahl, und fängt nun an, jede einzelne Zahl zu multipliciren:

$$
\begin{array}{r}
546843 \\
8 \\
\hline
24 \\
32 \\
64 \\
48 \\
32 \\
40 \\
\hline
4374744
\end{array}
$$

3 mal 8 iſt 24, hingeſetzt. Nun kommt eine Zahl im oberſten Faktor, die in die Klaſſe der Zehner gehört, die alſo auch zehnmal mehr durch die Multiplikation werden muß. Alſo 4 mal 8 iſt 32. Weil ſie aber zehnmal mehr iſt, ſo ſetzet man ſie um ei-

nen

nen Platz weiter. Es iſt gleichviel, ob man an der hinterſten Zahl von ihr eine Null anhänget oder nicht, denn eine Null iſt nichts, und zeiget nur den Rang der Zahl an, und der wird hier ſchon durch ihren Platz angezeiget, da die niedrigſte Zahl von ihr unter dem Zehner des erſten Produkts ſteht, und auch ſtehen muſte, weil der eine Faktor, nemlich die 4 zehnmal mehr am Range war, alſo auch das Produkt ganz natürlich zehnmal größer im Range ſeyn muß. Nun mit der dritten Zahl, die iſt wieder zehnmal mehr als die zweyte am Range, alſo muß auch ihr Produkt zehnmal größer am Range ſeyn, und man rücket daher ihre kleinſte Zahl wieder um eine Stelle weiter. Alſo 8 mal 8 iſt 64. Und ſo geht es mit allen übrigen. 8 mal 6 iſt 48. 8 mal 4 iſt 32. 8 mal 5 iſt 40. Dieſes ſind nun die einzelnen Produkte von jeder Zahl. Will man wiſſen, was ſie zuſammen ausmachen, ſo müſſen ſie zuſammen addirt werden. Geſchiehet das, ſo iſt das allgemeine Produkt 4374744. Und, daß das wirklich das Produkt der beyden in einander multiplicirten Größen ſey, folget daraus, weil es aus allen Partialprodukten, oder Produkten der einzelnen Theile beſteht. Auf dieſe Art könnte man nun wirklich multipliciren, aber das Verfahren würde doch weitläuftig ſeyn. Wenn man dieſes Exempel genau anſiehet, ſo wird man finden, daß man ja gleich beym Multipliciren der Größen, daß, was man nachher zuſammen addirt, jetzt gleich hätte addiren können; und daß eben das am Ende herausgekommen wäre, und man anſtatt der vielen untereinander geſetzten Zahlen nur eine einzige

Reihe von Zahlen erhalten hätte. Wir wollen dieſes einmal verſuchen:

$$\begin{array}{r} 546843 \\ 8 \\ \hline 4374744 \end{array}$$

3 mal 8 iſt 24. Setzet man davon nur die hinterſte als die Einer hin, ſo behält man noch 2 Zehner, die man zu der folgenden Klaſſe mit zählen muß, aber das iſt ja bey dem erſten Exempel auch geſchehen. Alſo 4 mal 8 iſt 32 und 2 dazu, die noch von den vorigen da waren, 34. Eigentlich ſollte man ſagen 8 mal 4 Zehner. Allein man kann nur 8 mal 4 ſagen, weil die Stelle, wo das Produkt hievon zu ſtehen kömmt, ſchon ſeinen Werth zeiget, daß ich wirklich Zehner multiplicirt habe. Alſo 8 mal 4 iſt 32, und 2 dazu 34. Hievon ſetzet man nur die hinterſte, als die geringſte am Range hin, weil die 3 ſchon zur folgenden Klaſſe der Hunderter gehöret. Man verfährt weiter: 8 mal 8 iſt 64, und 3 aus dem vorigen Produkte macht 67. Man ſetzet wieder 7 hin, und behält aus eben angeführten Gründen die 6 zur folgenden Klaſſe. 8 mal 6 iſt 48 und 6 dazu iſt 54. Die 4 hingeſetzt, und die 5 zur folgenden Klaſſe. 4 mal 8 iſt 32, und 5 dazu iſt 37. Die 7 hingeſetzt, und die 3 zur folgenden Klaſſe. 5 mal 8 iſt 40 und 3 iſt 43. Dieſes ganz hingeſetzt, weil ſich nun nichts mehr zu multipliciren findet. Man ſiehet nun, daß auf dieſe Art eben das Produkt als bey der vorigen Methode, aber um eine weit kürzere Art heraus gebracht iſt. Ich will gleich einige Exempel zur Uebung beyfügen. 48 mit 2 giebt 96.

Man

Man multiplieire	37	mit	6	giebt	222
	478	-	7	-	3346
	9723	-	8	-	77784
	746853962	-	9	-	6721685658

§. 69. Wenn man mit einer Zahl eine zuſammengeſetzte Zahl multipliciren kann, ſo iſt es auch leicht, eine zuſammengeſetzte Zahl mit mehrern Ziffern zu multipliciren. Wir wollen zeigen, wie das geſchehen muß, und das iſt auch wirklich der Beweis davon. Man ſollte 8641 mit 36 multipliciren. Das heißt 8641 erſtlich 6 mal und nachher noch 30 mal nehmen. Wie wir dieſes erſtlich mit 6 multipliciren ſollen, haben wir im vorhergehenden § gelernet. Nun aber ſoll es auch noch mit 30 multipliciret werden. Mit 6 multipliciret, ſtünde es alſo:

$$\begin{array}{r} 8641 \\ 6 \\ \hline 51846 \end{array}$$

Wenn ich nun betrachte, daß die 30 in die Klaſſe der Zehner gehört, alſo einen zehnmal größern Rang hat als die 6, ſo dürfte ich ja nur das Produkt von der 30 ſo unter dieſes Produkt der 6 ſchreiben, daß alle ſeine Zahlzeichen einen zehnmal höhern Rang haben, als wenn ſie mit einer Zahl aus dem Range der Einer wäre multipliciret worden. Und das geſchieht, wenn ich alle Zahlen des zweyten Produkts von der 30 um eine Ziffer weiter nach der linken Hand rücke, wenn ich ſie unter die Ziffern des Produkts der 6 ſetze. Ich ſetze daher die erſte Ziffer des Produkts der 30 unter die zweyte Ziffer des Produkts von der 6, von der

rechten Hand an gerechnet. Ich könnte noch eine o hinten an das Produkt der 30 machen. Allein das iſt nicht nöthig, denn eine o iſt nichts, und die Stellen der Zahlen ſind ſchon ohnedem hier in der gehörigen Ordnung. Nun ſtünde das Exempel alſo:

```
  8641
    36
------
 51846
25923
------
311076
```

Wenn ich beyde Produkte nun zuſammen addire, ſo habe ich das Produkt von 36, denn alsdenn habe ich das Produkt von 30 + 6, welches 36 iſt.

§. 70. Man wird ſchon zum voraus urtheilen, daß, wenn ich 8641 mit 863 hätte multipliciren ſollen, ich alsdenn das Produkt der 8 noch um eine Stelle weiter nach der linken Hand hätte rücken müſſen, weil die 8, oder eigentlich 800 wieder von einer Klaſſe iſt, die einen zehnmal höhern Rang hat als die 3, oder vielmehr 30. Und alſo würde das alſo ſtehen:

```
   8641
    836
-------
  51846
 25923
69128
-------
7223876
```

Das verſteht ſich von ſelbſt, daß man die Partialprodukte addiren muß, und iſt aus dem Vorhergehenden ſehr klar. Wenn man 8641 mit 4 Zahlen multipliciren ſoll, z. E. mit 2836, ſo iſt aus dem Vor-

Vorhergehenden leicht zu ſchließen, daß das Produkt der 2, oder vielmehr der 2000 wiederum eine Stelle weiter linker Hand hinſtehen müſſe, und bey jeder Zahl mehr, damit man es hätte multipliciren ſollen, wäre das Partialprodukt immer um eine Stelle weiter gerückt.

§. 71. Hieraus wollen wir nun eine allgemeine Regel ziehen. **Man ſetzet, wie bey der Addition die Zahlen, alſo auch hier die beyden Faktoren unter einander, und wählet, wie ganz natürlich iſt, den kleineſten zum Multiplicator. Man fängt mit der Zahl die in der Klaſſe der Einheit im Multiplicator ſteht, zum multipliciren an, und ſetzet ihr ganzes Produkt hin; man multipliciret darauf mit der nächſten Zahl linker Hand, ſetzet aber ihr Produkt weiter um eine Stelle linker Hand hin, unter das erſte Produkt; nun verfähret man eben ſo wieder mit der nächſten Zahl linker Hand, deren Produkt man wieder unter das Produkt der zweyten, aber wieder um eine Stelle weiter linker Hand ſetzet, und ſo verfähret man fort, bis man mit allen Zahlen des Multiplicators zu Ende iſt, da man alle die Partialprodukte zuſammen addirt.**

Wir wollen ein ziemlich großes Exempel hinſetzen, deſſen bloße Betrachtung dieſe Regel ſattſam erläutert:

 4532671

```
         4532671
          324234
  --------------
        18130684
       13598013
      9065342
     18130684
    9065342
   13598013
  --------------
   1469646049014
```

Am Ende dieſer Lehre werden wir noch Exempel zur Uebung hinſetzen.

§. 72. Wir haben in dieſer Regel, die wir eben gegeben haben, geſagt, man möchte von zwey Zahlen die kleinſte zum Multiplicator machen. Man wird dieſes leicht einſehen, wenn man betrachtet, daß, wenn man zwey Zahlen mit einander zu multipliciren hat, es gleich viel iſt, welche man als den Multiplicator anſiehet, weil ich ja die eine Zahl ſo vielmal nehmen ſoll, als die andre die Einheit in ſich enthält, §. 64. Um dieſes durch ein Exempel zu erläutern, ſo iſt es gleich viel, wenn man 364 mit 36 multipliciren ſollte, ob man 346 36mal, oder 36, 364 mal nehme.

§. 73. Es geſchieht oft, daß in einem der beyden Faktoren, die mit einander multiplicirt werden ſollen, eine oder mehrere Nullen vorkommen. Dieſes macht bey der Multiplikation gar keine Schwierigkeit, weil eine 0 allezeit nichts bedeutet, und nur da ſteht, den Rang der andern Zahlzeichen mit zu beſtimmen, und alſo auch mit

einer

einer andern Zahl multiplicirt, immer nichts bleibt, weil nichts immer nichts bleibt, man mag es ſo vielmal zu ſich ſelbſt addiren als man will. Wir wollen einmal annehmen, es ſollen im Multiplicandus Nullen ſeyn. Z. E. 5043002 ſollte mit 27 multipliciret werden. So ſtünde das alſo:

```
 5043002
      27
---------
35301014
10086004
---------
136161054
```

2 mal 7 iſt 14, ich ſetze die 4 hin, und behalte die 1 für die nächſte Klaſſe. Aber nun, 7 mal 0 iſt 0 oder nichts, denn man mag 0 ſo oft nehmen als man will, ſo iſt es nichts; nun ſetzt man an den Platz die überbliebene 1, die man ſonſt zu dem Produkt der nächſten Zahl würde zu addirt haben. Man addire es auch jetzt wirklich zu dieſem Produkt; denn 0 und 1 iſt 1. Nun weiter 7 mal 0 iſt 0, man ſetzt die 0 hin. 3 mal 7 iſt 21, die 1 hingeſetzt, und die 2 zum Produkt der nächſten Zahl. 4 mal 7 iſt 28, und 2 iſt 30, natürlich ſetzt man die 0 hin, weil die 3 zur nächſt höhern Klaſſe gehöret. Aber da befindet ſich nun 0, alſo 7 mal 0 iſt 0, und man ſetzt nun die 3 hin. 5 mal 7 iſt 35. Man verfähret mit der Multiplikation der zweyten Zahl mit der 2 eben alſo, und addirt alsdenn, wie gewöhnlich, die Partialprodukte zuſammen. Man wird nun auch gar keine Schwierigkeiten jetzt finden, wenn auch am Ende des Multiplicandus Nullen ſind. Um allen

Irrthum bey Anfängern zu vermeiden, multiplicire man ſie ordentlich mit, ob ſie ſchon wirklich nichts ſind, und man, ſie mögen multipliciret werden womit man wolle, an ihre Stelle eine 0 ſetzet; ſonſt könnte man ſie nur hin in die Partialprodukte ſchreiben, weil ſie doch die Stelle der andern Zahlen beſtimmen Beyſtehendes Exempel und ſein bloßer Anblick wird dieſes ſattſam erläutern:

```
     725000
         27
-----------
    5075000
   1450000
-----------
   19575000
```

Wenn im Multiplikator Nullen vorkommen, ſo finden ſie ſich entweder mitten zwiſchen den Zahlen zerſtreuet, oder ſie befinden ſich auch vielleicht nur am Ende. Finden ſie ſich mitten zwiſchen den Zahlen zerſtreut, ſo thun Anfänger am beſten, im Anfang ordentlich mit ihnen zu multipliciren, um ſich nicht ſo leicht zu irren, obſchon die ganze Reihe des Partialprodukts nichts wird. Denn das muß es auch werden, weil ja in dem Platze, wo die 0 ſtand, gar keine Größe war, und alſo auch keine durch die Multiplikation entſtehen kann; hernach addirt man die Partialprodukte auf die gewöhnliche Art. Z. E.

452378

```
     452378
       4005
-----------
    2261890
   000000
  000000
 1809512
-----------
 1811773890
```

Dieſes einzige Exempel wird hinreichend ſeyn, den Anfänger zu belehren. Man wird bey der Betrachtung deſſelben leicht ſehen, daß man auch die Produkte der Nullen, hier beyde Reihen Nullen in den Partialprodukten hätte weglaſſen können, und nur nöthig gehabt hätte, das Produkt der 4 um zwey Stellen weiter nach der linken Hand zu rücken. Das iſt ganz richtig, und wenn man geübter iſt ſo rücke man wenn Nullen mitten in den Zahlen des Multiplicators vorkommen, nur das Partialprodukt der nächſt folgenden Zahl, um ſo viel Stellen mehr linker Hand, als Nullen zwiſchen dieſer und der nächſt vorhergehenden Zahl waren. Oder um es noch kürzer zu ſagen: Setze jede erſte Zahl der Partialprodukte, von der rechten Hand angerechnet, in den Platz, den eben die Zahl des Multiplicators hat. Iſt dieſe zum Exempel die 4te, ſo wird die erſte Zahl ihres Produkts auch in die 4te Stelle, von der rechten Hand an gerechnet, hinkommen. Iſt ſie die 5te, denn in den 5ten Platz.

Z. E. 432785
20003
—————————
1298355
865570
—————————
8656998355

Sind hinten in dem Multiplicator, oder auch Multiplicandus, oder in beyden, Nullen, ſo multiplicirt man auf die gewöhnliche Art, und hängt dem Generalprodukte oder der Größe, die man nun durch die Addition der Partialprodukte bekommen hat, ſo viel Nullen an, ſo viel in einem der beyden Faktoren, oder letzternfalls in beyden Faktoren am Ende ſtehn. Es iſt dieſes ganz begreiflich, weil die Zahlen des Generalprodukts nun wirklich doch um ſo viel Plätze höher ſeyn müſſen, als Nullen ſich noch an einem Faktor oder an beyden befanden. Z. E.

40502000
37000
—————————
283514
121506
—————————
1498574000000

Die Betrachtung dieſes Exempels wird jeden belehren. Wenn einer der Faktoren blos die 1 mit noch ſo viel angehängten Nullen iſt, ſo wird man nun leichtlich einſehen, daß dieſe Multiplikation die leichteſte unter allen iſt. Man ſetzet blos den einen Faktor hin, und hängt ihm ſo viel Nullen an, als der andere Faktor hat. Z. E.

z. E. 543275
1000
―――――――――
543275000

Das iſt auch ganz natürlich. Denn die Zahlen des einen Faktor ſollten nur jede einmal genommen, aber auch um ſo viel Plätze in einen höhern Rang erhoben werden, als in dem andern Faktor durch die Nullen hinter der Eins angezeiget wurde, und das geſchiehet auch wirklich, wenn man die Nullen des andern Faktors anhängt. Hier z. E. ſollte jede Zahl einen viermal höhern Rang bekommen, aus der 5 ſollte 5000 werden, aus der 7 oder vielmehr 70 ſollte 70000 werden, und das geſchiehet ja, wenn man die Nullen des einen Faktors dem andern anhängt, weil alsdenn jede Zahl einen viermal höhern Rang bekömmt.

§. 74. **Was mit eins multiplicirt wird, bleibt ungeändert, oder eins multiplicirt nicht.** Das begreift man leicht. Denn 1 mal 30 iſt 30, 1 mal 1000 iſt 1000 u. ſ. w. Eben ſo leicht müſte man es begreifen **was mit 0 multipliciret wird, wird zu nichts, oder wird = 0.** Es fällt eben ſo ſehr in die Augen, denn man mag ja die Null ſo vielmal nehmen' wie man will, ſo bleibt ſie **nichts**. 6 mal 0 iſt = 0. Aber auch 0 mal 6, oder nichts mal 6, iſt auch nichts, und eine Größe, ſie ſey ſo groß als ſie wolle, wird ſie 0 mal oder nichts mal genommen, ſo wird ſie nichts oder = 0 ſeyn. So leicht dieſe beyden Sätze ſind, ſo wichtig ſind ſie auch, wie ſich ge-

genug zeigen wird, muß man ſie daher wohl bemerken.

§. 75. Wir kommen noch auf einen wichtigen Satz. Das Produkt zweyer Größen enthält den einen Faktor ſo vielmal in ſich, als der andere Faktor die Einheit. So drückt man dieſen Satz gewöhnlich aus, den wir gleich erläutern wollen. Das Produkt von 3 mal 5 iſt = 15, oder ich ſage: 15 als das Produkt enthält den einen Faktor, z. E. die 3 ſo vielmal in ſich, als in dem andern Faktor, oder in der 5 die Einheit ſteckt. Die ſteckt 5 mal darin, alſo will ich ſagen, in 15 iſt die 3 fünfmal enthalten, und das iſt ja ſehr richtig, denn 5 mal 3 iſt 15. Eben ſo würde man auch ſagen können, in dem Produkte 15 iſt der eine Faktor, z. E. die 5 ſo vielmal enthalten, als in dem andern Faktor, in der 3, die Einheit. Die ſteckt 3 mal in der 3; alſo 3 mal iſt die 5 in der 15 enthalten, und 3 mal 5 iſt ja auch 15. Das muß auch für Produkte großer Zahlen und allgemein gelten, denn die entſtehen auch durch die Multiplication mit einander. Das Produkt von 3456 mit 324 iſt = 1119744. Ich muß alſo auch ſagen: In dem Produkt 1119744 iſt die 3456 ſo vielmal enthalten, als die Einheit in 324, oder ſie iſt 324 mal darin enthalten. Gleichfalls, auch in dem Produkte 1119744 iſt die 324 ſo vielmal enthalten, als die Eins in 3456, oder 3456 mal enthalten. Denn wenn man multiplicirt:

plicirt:

3456	oder 324
324	3456
13824	1944
6912	1620
10368	1296
1119744	972
	1119744

ſo kömmt ja einerley heraus, und bey dem einen war die 3456, 324 mal genommen, und bey dem andern die 324, 3456 mal.

§. 76. Wir kommen noch auf einen merkwürdigen Satz. **Faktores in veränderter Ordnung haben einerley Produkt**, oder wenn man mehr als zwey Größen mit einander zu multipliciren hätte, ſo wird immer einerley Produkt heraus kommen, man mag ſie multipliciren, in welcher Ordnung man auch wolle. Z. E. ich ſollte 2. 6. 5. 4. (das Multiplikationszeichen wird noch aus §. 65 bekannt ſeyn) mit einander multipliciren. Das hieße, ich ſollte 2 mit 6 multipliciren, das Produkt davon noch mit 5, und was man nun wieder für ein Produkt bekäme, das nun noch mit 4. Ich ſage, ich mag von dieſen Zahlen anfangen, mit welcher ich will, und nachher nehmen welche ich will, daß, wenn man nur ſie alle viere mit einander multiplicirt, alsdenn einerley Produkt heraus kommen werde. Es würde alſo z. E. als 2. 6. 5. 4 = 2. 4. 5. 6 und ſo auch auf andre Art verändert, doch immer einerley Produkt heraus kommen. Das wollen wir nun beweiſen. Wem es noch nicht begreiflich genug iſt, halte ſich

an

an die letzte Probe, welche er auf mehrere Art machen kann, und überſchlage den Beweis vors erſte, der überdem, weil wir noch nicht Buchſtabenrechnung genug wiſſen, nur eine Induktion iſt. Weil wir keine Buchſtabenrechnung noch nicht gebrauchen können, ſo wollen wir es bey dieſen Zahlen zeigen, daß ſich bey einem fähigen Kopfe auf welche andre man will, wird anwenden laſſen. Wir wollen ſie einmal wieder erwehnen. 2. 6. 5. 4. Das ſiehet man gleich, daß 2 multiplicirt mit 6, oder 6 multiplicirt mit 2, einerley Produkt giebt, auf beyde Fälle 12. Alſo könnte man ſchon die Ordnung auch ſo ſetzen. 6. 2. 5. 4. Anſtatt der 12 kann ich doch nun ſetzen. 6. 2. oder 2. 6. = 12. Wir wollen nun einmal wirklich 12 hinſetzen, das ſoll nun mit 5 multipliciret werden. Es wird aber einerley ſeyn, ob man nun 12. 5. oder 5. 12 ſetzet, auf beyde Fälle kömmt 60. Alſo, wenn ich ſtatt 12 und 2. 6. oder 6. 2 ſetze, welches mir doch unverwehrt iſt, ſo müſte ich alſo, ſtatt 12. 5. oder 5. 12. ſetzen können, entweder 6. 2. 5. oder 2. 6. 5. oder 5. 6. 2. oder 5. 2. 6. Alſo das ſoll noch mit 4 multipliciret werden; es iſt einerley, ob ich nun die 4 vorne oder hinten hinſetze, beyde male wird es mit 4 multiplicirt. Alſo würde es einerley ſeyn, ob man nun 4. 6. 2. 5. oder 6. 2. 5. 4, oder 4. 2. 6. 5, oder 2. 6. 5. 4, oder 4. 5. 6. 2, oder 5. 6. 2. 4, oder 4. 5. 2. 6, oder 5. 2. 6. 4 ſetzet; eins wäre ſo viel als das andere, und man hat nun ſchon acht Veränderungen, von denen die Produkte völlig gleich waren. Dieſe waren:

4. 6. 2. 5.

4. 6. 2. 5 = 6. 2. 5. 4 = 4. 2. 6. 5 = 2. 6. 5. 4
= 4. 5. 6. 2 = 5. 6. 2. 4 = 4. 5. 2. 6 = 5. 2. 6. 4.

Nun verändre man bey jeden die beyden vorderſten Zahlen, das geht an, wie wir eben gezeigt haben, ſo haben wir abermals acht Veränderungen, alle zuſammen ſechszehn, und wir hätten denn überhaupt folgende:

	4.6.2.5	6.2.5.4	4.2.6.5	2.6.5.4	4.5.6.2	
	6.4.2.5	2.6.5.4	2.4.6.5	6.2.5.4	5.4.6.2	
5.6.2.4	4.5.2.6	5.2.6.4				
6.5.2.4	5.4.2.6	2.6.5.4				

Unter dieſen ſind die beyden in der 2ten Ordnung völlig gleich, mit den beyden in der 4ten alſo fallen zwey weg, und es bleiben noch 14 Veränderungen. Nun wollen wir in dieſen 14 die beyden hinterſten Zahlen auch ihre Plätze verwechſeln laſſen, welches auch angeht, indem man ſie, wenn man ſie mit einander multipliciret, als einen Faktor anſehen kann, und wir bekämen alsdenn 28 Veränderungen. Die wären:

4. 6. 2. 5	6. 2. 5. 4	4. 2. 6. 5	4. 5. 6. 2	5. 6. 2. 4
6. 4. 2. 5	2. 6. 5. 4	2. 4. 6. 5	5. 4. 6. 2	6. 5. 2. 4
4. 6. 5. 2	6. 2. 4. 5	4. 2. 5. 6	4. 5. 2. 6	5. 6. 4. 2
6. 4. 5. 2	2. 6. 4. 5	2. 4. 5. 6	5. 4. 2. 6	6. 5. 4. 2
4. 5. 2. 6	5. 2. 6. 4			
5. 4. 2. 6	2. 5. 6. 4			
4. 5. 6. 2	5. 2. 4. 6			
5. 4. 6. 2	2. 5. 4. 6			

Hier ſind abermal alle Veränderungen der vierten Ordnung völlig gleich den Veränderungen der

ſechſten

ſechſten. Alſo fallen abermal vier Veränderungen weg, und es bleiben folgende vier und zwanzig.

4.6.2.5	6.2.5.4	4.2.6.5	4.5.6.2
6.4.2.5	2.6.5.4	2.4.6.5	5.4.6.2
4.6.5.2	6.2.4.5	4.2.5.6	4.5.2.6
6.4.5.2	2.6.4.5	2.4.5.6	5.4.2.6

5.6.2.4	5.2.6.4
6.5.2.4	2.5.6.4
5.6.4.2	5.2.4.6
6.5.4.2	2.5.4.6

Mehrmal aber können vier Zahlen nicht unter einander verſetzt werden, wie wir unten in der Lehre von der Combination weitläuftiger zeigen werden. Man multiplicire nun von dieſen Veränderungen welche man wolle, man wird allezeit 240 zum Produkte bekommen. Man ſieht leicht ein, daß man auf eine ähnliche Art dieſen Satz auch von 5, 6 und ſo viel Zahlen, als man will, beweiſen könne.

§. 77. Wir ſollten nun noch von der Probe der Multiplikation in Zahlen reden, weil wir aber noch nicht dividiren können, verſpahren wir es, ſie zu lehren, bis wir auch zugleich die Probe der Diviſion zeigen können. Wir ſetzen zu der Multiplikation mit Zahlen noch einige Exempel, die wir zur Uebung geben, und die jeder nach ſeinem Gefallen vermehren kann.

Man

Man multiplicire:

37 mit 6 giebt zum Produkt 222
9723 - 8 - - - 77784
4056 - 9 - - - 36504

ferner:

6987 mit 45 giebt zum Produkt 314415
7856 - 72 - - - 565632
7865 - 96 - - - 755040

ferner:

67432 mit 543 giebt zum Produkt 36615576
63800 - 780 - - - 49764000
98326 - 500 - - - 49163000

ferner:

543002 mit 1000 giebt zum Produkt 543002000
983200 - 5701 - - - 5605223200
326050 - 5003 - - - 1631228150

ferner:

7250042 mit 50002 iſt 362516600084
90405020 - 40302 - 3643503116040
70000001 - 51311 - 3591770051311

ferner:

564325 mit 111111 iſt 62702715075
7420000 - 100000 - 742000000000
94705000 - 305020 - 28886919000000

§. 78. Man multiplicirt auch wol Größen mit einander, die aus zuſammengeſetzten Zahlen be-

beſtehen. Man ſchließet alsdenn die aus Zahlen zuſammengeſetzten Größen in Klammern ein. Z. E. es ſoll $(4+5-4-1) \cdot (3+9+1-2-4) = 28$. Das heißt, die Größen, die in jeder Klammer ſich befinden, ſollen erſt addirt, und die herauskommenden Summen mit einander multiplicieret werden. In der erſten Größe $4+5$ iſt 9, dazu ſoll -4 und noch -1 addirt werden, welches zuſammen -5 iſt. Alſo bleibt noch 4. In der zweyten Größe $3+9+1$ iſt 13, dazu addirt $-2-4$, welches -6 iſt, ſo bleibt noch 7. Alſo 4 ſoll mit 7 multipliciret werden, welches 28 iſt.

§. 79. Wir kommen auf die Multiplikation mit Buchſtaben. Sie iſt ungemein leicht, denn die Buchſtaben, die mit einander ſollen multipliciret werden, werden nur zuſammen geſetzt. Man zeigt gleichſam die Multiplication nur an. Es ſoll a mit b multiplicirt werden, das iſt ab. Es ſoll ab mit pq multipliciret werden, das iſt $= abpq$, und ſo mit allen Multiplikationen, die mit Buchſtaben geſchehen. Man ſetzte bey der Multiplikation mit Zahlen, wenn man ſie nur anzeigen wollte, einen Punkt (.) zwiſchen die Zahlen, das iſt hier nicht nöthig, weil hier ſo leicht keine Verwirrung entſtehen kann. Hat man zwey mit Buchſtaben angezeigte Größen mit einander multiplicirt, und man ſollte die noch mit der dritten oder vierten multipliciren, ſo ſetzet man die gleichfalls an einander. Z. E. es ſoll multipliciret werden, $ab \times pq \times c \times d$ das iſt $= abpqcd$ (das $\times$ iſt auch ein Multiplikationszeichen §. 65). Oder weil man die Faktores gerne nach den Buchſtaben ordnet, und

Fak-

Faktores in geänderter Ordnung doch noch immer einerley Produkt geben, ſo iſt es auch = abcdpq.

§. 80. Die Größen welche man mit einander multipliciret, können aber auch Zahlzeichen zu Coefficienten §. 35 bey ſich haben. Alsdenn könnte man auch die Multiplikation blos anzeigen, nemlich die Größen zuſammen ſetzen, und die Zahlzeichen bey einander, nur daß man zwiſchen dieſe einen (.) machen muß, weil ſonſt leichtlich Verwirrung entſtehen könnte. Man ſollte 4a mit 5b und noch mit 6c multipliciren, das könnte man ſchreiben, 4. 5. 6. abc. Allein man thut dieſes nicht gerne; man multipliciret die Coefficienten lieber wirklich in einander; hier nun wäre 4.5 = 20 und das noch mit 6 multipliciret = 120. Alſo anſtatt 4. 5 . 6abc würde man ſchreiben müſſen 120abc.

Man wird hierin nichts ſchweres finden. Alſo z. E. 4pq multiplicirt mit 3x gäbe 12pqx, und 6a multipliciret mit 2bx gäbe 32abx. Sind die Coefficienten ſehr groß, ſo verbindet man ſie auch wol nur durch die bloßen Zeichen. Z. E. 72 . ſollte multiplicirt werden mit 84ab. Da wü de man ganz recht dieſes nur ſo ausdrücken können (720.84) abc, da man gerne die großen Zahlen in eine Klammer einſchließet.

§. 81. Allein ſo wie man mit entgegengeſetzten Zeichen addiren und ſubtrahiren muſte, ſo muß man auch damit multipliciren können. Und hier ſcheint die Sache etwas ſchwerer zu werden. Darüber wird man ſich wol nicht lange bedenken, daß

plus mit plus multipliciret, plus gäbe; allein was heraus kommt, wenn plus mit minus, oder gar minus mit minus multipliciret wird, das ſcheint ſchwerer zu ſeyn. Wir wollen es deutlich zu machen ſuchen.

§. 82. Es kommen vier Fälle vor. Entweder plus mit plus, oder plus mit minus, oder minus mit plus, oder minus mit minus. Plus mit plus giebt zum Produkte ohnſtreitig plus. Wenn + 4 mit + 4 multipliciret werden ſoll, ſo muß das + 16 geben. Denn es heißt ſo viel geſagt, man ſoll die + 4 wirklich 4 mal oder viermal poſitiv nehmen. Alſo + a mit + b giebt ab oder + ab.

Plus mit minus, muß daher minus zum Produkte geben, denn man ſoll alsdenn die Größe nicht poſitiv, ſondern das Entgegengeſetzte von ihr, welches minus iſt, ſo vielmal nehmen, als der andre Faktor erfordert. Es iſt ganz begreiflich, wenn man + 6 mit − 2 multipliciren ſoll, daß das ſo viel heißt, ich ſoll die + 6 nicht wirklich zweymal poſitiv, ſondern im entgegengeſetzten Verſtande, oder zweymal negativ nehmen, das muß nothwendig minus geben, alſo + 6. − 2 = − 12 und + a. − 2b iſt = − 2ab.

Daß minus mit plus auch minus zum Produkte gebe, folgt hieraus ſchon, indem es ja gleichviel iſt, welcher Faktor der Multiplicandus, und welcher der Multiplicator iſt, und z. E. − 2 mit + 6 eben das Produkt geben muß, als + 6 mit − 2 giebt und − 2b mit + a eben das, als + a mit

mit − ab. Es folget auch daraus, wenn ich die Minusgröße mit plus multiplicire, ſo ſoll ich die Minusgröße wirklich ſo vielmal nehmen, als der andere Faktor verlanget; alſo muß nothwendig minus zum Produkte kommen. − 4 mit + 6 muß nothwendig − 24 zum Produkte geben, denn ich ſoll − 4 wirklich 6mal nehmen, oder 6 mal zu ſich ſelbſt addiren. Und − x multipliciret mit + 3r muß − 3rx geben, ich ſoll − x wirklich 3rmal nehmen, oder zu ſich ſelbſt addiren.

Nun kommen wir aber auf eine Sache, darüber ſich die Anfänger verwundern werden. Minus mit minus giebt zum Produkte plus. Alſo z. E. − 4 . − 6 = + 24 und − a . − b = + ab. Man wird ſchon anfangen, dieſes zu muthmaßen, wenn man überlegt, daß ja, wenn man minus mit minus multiplicirte, ein ander Zeichen herauskommen müſſe, als wenn man minus und plus mit einander multiplicirt, da kam minus heraus, da nun keine Zeichen ſind als + und −, ſo muß hier wohl + herauskommen. Allein dieſes wird noch nicht völlig befriedigend ſeyn. Man überlege alſo, daß minus 4 mit minus 6 multiplicirt nicht ſagen will − 4 wirklich 6 mal nehmen, das wäre − 24, ſondern − 4 minus 6 mal nehmen, oder das Entgegengeſetzte von − 4 ſechsmal nehmen, das Entgegengeſetzte von − iſt aber + 4. Alſo heißt − 4 minus 6 mal nehmen, ſo viel als + 4 6 mal nehmen, oder + 4 mit + 6 multipliciren, und das giebt doch + 24. Alſo − a × − b = + ab. Ein Exempel ſoll es erläutern, wenn man 10 Thl. Schuld hätte, ſo könnte

te ich das als eine Minusgröße in Anſehung meines Vermögens anſehen, und es ſey alſo = — 10, die ſoll ich mit — 4 multipliciren, das heißt nicht, ich ſoll ſie 4mal größer machen, denn ſo müſte ich ſie mit + 4 multipliciren, ſondern ich ſoll dieſe Schuld viermal nicht hingeben, und da hat man ja wirklich + 40. Man ſehe aber dieſes Exempel ja für nichts weiter als eine Erläuterung an. Damit man ſehen möge, wie dieſes auch in Zahlen zutrift, wollen wir mal ein Paar Zahlen mit einander multipliciren.

Man multiplicire nun 9 — 2 mit 5 — 3. Man könnte damit bald fertig werden, weil 9 — 2 = 7, und 5 — 3 = 2 iſt, und 2mal 7 = 14. Allein wir wollen ſie jetzt nach der Regel multipliciren: alſo 9 — 2

$$\begin{array}{rrr} & 9 & -2 \\ & 5 & -3 \\ \hline & -27 & +6 \\ +45 & -10 & \\ \hline 45 & -37 & +6 \end{array}$$

alſo, man ſoll 2 Faktors, + 9 und — 2 mit 2 andern + 5 und — 3 multipliciren; das heißt: man ſoll + 9 und — 2 erſtlich mit + 5 und denn + 9 und — 2 mit — 3 multipliciren. Verfahren wir nun nach den gegebenen Regeln, ſo ſagt man — 3 mit — 2 giebt + 6; hingeſetzt. Ferner: — 3 mit + 9 giebt — 27, hingeſetzt. Nun mit der 5. + 5 mit — 2 giebt 10 hingeſetzt, und + 5 mit + 9 giebt + 45 hingeſetzt. Addirt man das, ſo hat man 45 — 37 + 6. Nun iſt + 6 und + 45 = 51 und davon 37 abgenommen = 14. Man

ſieht

ſieht alſo; daß die − 2 multiplicirt mit − 3 plus geben muſte, ſo wäre das rechte Produkt nicht heraus gekommen. Wir haben hier ſchon eine Art von Vorſchmack, wie man mit zuſammengeſetzten Größen multiplicirt, gegeben, den wir bald weiter ausführen wollen.

§. 83. Wenn man betrachtet, wie wir nun gelernet haben, daß plus mit plus + giebet, minus mit minus auch +; plus mit minus aber −, und minus mit plus auch − ſo kann man daraus die allgemeine Regel ziehen: **Einerley Zeichen mit einander multiplicirt, geben zum Produkte plus, und verſchiedene Zeichen mit einander multiplicirt, geben zum Produkte minus.** Man drückt ſich im Lateiniſchen ganz kurz darüber aus, eadem ſigna dant plus; diverſa, minus. Welche Regel man behalten muß.

§. 84. Die Multiplication mit entgegengeſetzten Größen, und alle Regeln dafür gelten auch bey Ziffern, wie ein jeder leicht begreifen wird; da ohnedem auch die Buchſtaben ſehr oft Ziffern bedeuten, und nur darum Buchſtaben genommen werden, um zu zeigen, daß eine Sache allgemein wahr ſey.

§. 85. Nun werden wir das übrige der Multiplikation mit Buchſtaben leicht begreifen. Wie man einfache Größen mit einander multiplicire, haben wir ſchon geſehen, und wenn man nicht dabey vergißt, was wir von den verſchiedenen Zeichen eben geſagt haben, ſo wird ſich hier keine Schwierigkeit mehr finden. Zuſammengeſetzte Größen multipli-

tiplicirt man alſo: man multiplicirt jeden Theil des Multiplicators in alle Theile des Multiplicandus, ſo wie man es bey einfachen Größen macht, und addiret denn von den Partialprodukten das zuſammen, was ſich zuſammen addiren läßt; das andre ſetzt man mit ſeinen Zeichen unter den Strich, oder zu dem Generalprodukt. Ein Exempel ſoll die Regel erläutern.

Man multiplicire:

$$\begin{array}{r} a + 2b + c \\ a - 2b - c \\ \hline - ac - 2bc - cc \\ - 2ba - 4bb - 2bc \\ + aa + 2ba + ac \\ \hline aa \quad - 4bb - 4bc - cc \end{array}$$

— c mit + c giebt — cc: ferner — c mit + 2b giebt — 2bc; — c mit + a giebt — ca. Nun mit dem 2ten Gliede des Multiplicators — 2b mit + c iſt — 2bc; — 2b mit + 2b giebt — 4bb; — 2b mit + a giebt — 2ba. Nun mit dem dritten Gliede; + a mit + c giebt + ac; + a mit + 2b giebt + 2ba; + a mit + a giebt + aa. Nun addire man dieſe Partialprodukte. Und wenn man ſich noch der Regeln der Addition mit entgegengeſetzten Größen erinnert, ſo wird man finden, daß man bekömmt:

$$aa - 4bb - 4bc - cc$$

Noch ein Exempel

$$\begin{array}{r} a - 4b \\ c - 6d \\ \hline - 6ad + 24bd \\ ac - 4bc \\ \hline ac - 6ad - 4bc + 24bd \end{array}$$

— 6

$-6d$ mit $-4b$ iſt $+24bd$; $-6d$ mit $+a$ iſt $-6ad$; ferner $+c$ mit $-4b$ iſt $-4bc$; $+a$ mit $+c$ iſt $+ac$. Das zuſammen addirt iſt $= ac - 6ad - 4bc + 24bd$.

In dem erſten Exempel waren verſchiedene Größen einerley Art, und ließen ſich alſo addiren: z. E. die $-2bc$, dazu kamen noch $-2bc$, die $+ca$, da kamen noch $-ca$ und hoben ſich alſo durch die Addition einander auf, und ſo gieng es auch mit $-2ba$ und $+2ba$. Aber bey dieſem letztern Exempel waren keine gleichartige Größen, man muſte ſie alſo ſo blos unter den Strich, den man unter die Partialprodukte zog, zum Generalprodukte ſetzen.

Wir wollen doch nun dem Anfänger zu Gefallen einmal die Buchſtaben in dieſem Exempel beſtimmen, und zeigen, wie das Generalprodukt dieſem gemäß iſt.

Es ſey $a = 36$; $b = 3$; $c = 48$; $d = 5$

ſo wäre alſo $a - 4b = 36 - 4 . 3 = 36 - 12 = 24$

und $c - 6d$ wäre $= 48 - 6 . 5 = 48 - 30 = 18$

alſo $a - 4b \times c - 6d$ wäre $= 24 . 18$ und dieſes $= 432$.

Dieſes muß nun aus unſerm Generalbuchſtabenprodukte $ac - 6ad - 4bc + 24bd$ auch herauskommen. Wir wollen es nach den beſtimmten Buchſtaben nun in Zahlen verwandeln, wenn wir für jeden Buchſtaben die Zahl ſetzen, die er be-

bedeutet. Dieſes wäre alſo 36. 48 — 6. 36. 5 — 4. 3. 48 + 24. 3. 5 dieſe zuſammengeſetzte Größen, was multipliciret werden muß; nun multipliciret = 1728 — 1080 — 576 + 360.

Wenn man nun die minus und plus Größen, jedes zuſammen addirt, ſo iſt hier 2088 — 1656 dieſes iſt = 432, wie oben heraus kam, wenn man gleich die Faktores zu ihrem beſtimmten Werthe brachte, und 24 mit 18 multiplicirte. Hier ſcheint nun zwar immer die Buchſtabenrechnung weitläuftiger, als die Zahlenrechnung, aber man urtheile noch nicht.

Die Buchſtabenrechnung iſt die allgemeine Rechnung, und lehret überhaupt die Eigenſchaften der Größen, wie das in der Folge immer einleuchtender werden wird.

§. 86. Wir wollen jetzt noch einige Exempel hinſetzen, ehe wir weiter gehen:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+2ab+bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline -ab+bb \\ aa-ab \\ \hline aa-2ab+bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5a + 6b - 9c + 2d \\ 2a + 5b - c \\ \hline -5ac - 6bc + 9cc - 2cd \\ +25ba + 30bb - 45bc + 10bd \\ +10aa + 12ba - 18ac + 4ad \\ \hline 10aa + 37ba + 30bb - 23ac - 51bc + 4ad + 9cc + 10bd - 2cd \end{array}$$

Hier iſt addirt, was ſich addiren lies und ins Produkt geſetzt:

$$\begin{array}{r} 3a - 5b + 3c + d \\ -2a - 3b + 6 \\ \hline +18a - 30b + 18c + 6d \\ -9ba + 15bb - 9bc - 3bd \\ -6aa + 10ba - 6ac - 2ad \\ \hline -6aa + ba + 18a + 15bb - 6ac - 30b - 9bc - 2ad + 18c - 3bd + 6d \end{array}$$

§. 87. Man multiplicire noch mit einander zur Uebung:

$a + b$

$a + b$ mit $a - b$; das Produkt iſt $aa - bb$

$a + b - c$ mit $b - c$; das Produkt iſt $ab - ac + bb - 2bc + cc$

$2a - 3b$ mit $4a + 5b$; das Produkt iſt $8aa - 2ab - 15bb$

$x + 6$ mit $x - 4$; das Produkt iſt $xx + 2x - 24$

$x + 3$ mit $c + 3$; das Produkt iſt $cx + 3x + 3c + 9$

$3a + 4b - 5d$ mit $2a - 3b - 4d$; das Produkt iſt $6aa - ab - 22ad - 12bb - bd + 20dd$

$a - 4$ mit $4 - a$ giebt zum Produkt $8a - aa - 16$

$a - 4$ mit $4 - x$ giebt zum Produkt $4a - ax + 4x - 16$

$a + b - 1$ mit $- a - b - 1$ giebt zum Produkt $- aa - 2ab - bb + 1$

$3a - 5b + c$ mit $c - 1$ giebt zum Produkte $3ac - 5cb - 3a + 5b + cc - c$

$a - 3b + 1$ mit $a - a$ giebt zum Produkte Null, denn der Multiplicator $a - a$ iſt Null, wie man ſiehet, und was mit Null multipliciret wird, wird Null §. 74. Man wird auch, wenn man würklich multipliciret, finden, daß ſich die Partialprodukte einander aufheben.

§. 88. Man pfleget gerne Produkte, wenn es angehen will, verkürzter zu ſchreiben, weil es öfters, wenn man die allgemeinen Größen in Zahlen verwandeln ſoll, oder auch ſonſt häufig beym Verfolg des Calculs vielen Vortheil ſchaffet. Bey einigen geht es leicht an. Wenn in allen oder nur einigen Gliedern ſich eine oder mehr einerley Buchſtaben,

ſtaben, oder Faktoren befinden, ſo nehme man dieſen, oder die Faktores, die den Größen gemein ſind, zum allgemeinen Faktor, und ſetze die Größen, welche durch ſie multiplicirt worden, in eine Klammer, und den allgemeinen Faktor dahinter.

Z. E. aa — 3ab ließe ſich auch ſo ſchreiben (a — 3b) a, denn man multiplicire nun den allgemeinen Faktor a mit a — 3b, ſo hat man aa — 3ab.

aabd + 2aabb — 5abd ließe ſich kürzer ſo ausdrücken (ad + 2ab — 5d) ab. Denn die a und die b ſind allgemeine Faktores aller Größen, und wenn man wirklich nun multiplicirt, kommt aabd + 2aabb — 5abd heraus.

Ferner 3aac — 9abd + 18a ließe ſich ſchreiben = (ac — 3bd + 6) . 3a
ferner 5pqx — 30qx + 25px alſo (pq — 6q + 5p). 5x.
noch 9aab — 18abb + 9ab alſo (a — 2b + 1). 9ab
und 48ab — 16apbx alſo (3 — px). 16ab.

Indeſſen beruhige man ſich, wenn man ſolche Verkürzungen nicht gleich geſchwinde machen kann; man wird ſie durch fleißige Uebung und Leſung algebraiſcher Bücher nach gerade lernen.

§. 89. Wir haben im §. 79 und folgenden geſehen, daß, wenn man Größen in Buchſtaben mit andern Größen in Buchſtaben multiplicirt, man ſie blos zuſammen ſetzet. Man ſiehet leicht ein, daß, wenn ſowol der Multiplicandus als der Multiplicator einerley ſind, dieſes auch geſchehen werde. Man hätte z. E. a mit a zu multipliciren, ſo wä-

re

re das Produkt aa, ſollte man das wieder mit a multipliciren, ſo wäre das aaa, und man ſetzte a ſo vielmal zuſammen, ſo vielmal man es mit einander multipliciren ſollte. Fände man z. E. aaaaa, ſo hieße das, a wäre 5mal mit ſich ſelbſt multipliciret worden. Und ſo auch mit andern Buchſtaben. xxx zeiget an, x ſey dreymal mit ſich ſelbſt multipliciret, das heißt x ſey erſtlich mit ſich multipliciret, und das Produkt, das daraus entſtand, ſey wieder mit x multipliciret, und wenn nun noch ein x da wäre, alſo xxxx da ſtünde, ſo wäre denn dieſes Produkt abermal mit x multipliciret. Ein Exempel in Zahlen ſoll dieſes erläutern. Es ſey x = 2, ſo wäre xxxx = 2.2.2.2.

Das heißt, erſtlich 2 mit 2
2 das giebt
4 wieder mit 2
2 das giebt
8 wieder mit 2
2 das giebt
16

Alſo 2.2.2.2. iſt = 16, nun wird man es hoffentlich deutlich einſehen. Aber es ſchien den Mathematikern zu unbequem, eine Größe, die einigemal mit ſich ſelbſt ſoll multipliciret werden, auch ſo vielmal an einander zu ſchreiben; ſie erwählten alſo folgende Mittel: ſie ſchrieben oben an den Kopf der Zahl oder des Buchſtaben eine kleine Zahl, welche anzeigte wie vielmal die Größe mit ſich ſelbſt ſey multipliciret worden. Anſtatt aa ſchreibt man a^2, anſtatt aaa ſchreibt man a^3, anſtatt xxxxx ſchreibt man

man x^5, überhaupt eine ſo große Zahl an den Kopf der Größe, ſo vielmal dieſe Größe mit ſich ſelbſt iſt multiplicirt worden, oder ſo vielmal ſie bey der gewöhnlichen Anzeige der Multiplication hätte an einander geſezt werden müſſen. Eben ſo in Zahlen 2.2.2.2. iſt 2^4 und 3.3.3.3.3. iſt 3^5. Man hüte ſich aber wohl, daß man nicht z. E. a.3 mit a^3 verwechsle, oder in Zahlen, 10.3 mit 10^3 u.ſ.w. Das eine hieße a mit 3 multipliciren, und das andre a dreymal mit ſich ſelbſt multipliciren, das iſt ein ſehr großer Unterſchied. Denn es ſey a = 5 ſo wäre a.3 = 5.3 = 15. Aber a^3 wäre 5.5.5. = 125. Eben ſo 10.3 wäre = 30, aber 10^3 wäre 10.10.10. = 1000.

§. 90. Wenn eine Größe, ſie ſey Zahl oder Buchſtabe, ein oder etliche mal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, ſo heißt ſie in der mathematiſchen Sprache eine **Potenz**, oder **Poteſtät**, **Dignität**, und die Zahl, die an ihrem Kopfe ſteht, und anzeigt, wie vielmal ſie mit ſich ſelbſt multipliciret iſt, zeiget auch an, die wievielſte **Potenz** ſie von der Größe ſey. Z. E. a^5 heißt a in der fünften **Potenz**, oder die fünfte Potenz von a. x^3 iſt die dritte Potenz von x. Ferner: 4^6 iſt die ſechſte Potenz von 4. oder 4.4.4.4.4.4. und wäre wirklich multiplicirt = 4096.

Die Größe, woraus eine Potenz durch ein oder mehrmalige Multiplikation mit ſich ſelbſt entſtanden iſt, heißt eine **Wurzel**, und wird geſchrieben alſo $\sqrt{}$. In dieſes Zeichen ſelbſt wird zuweilen eine kleine Zahl geſchrieben, die anzeigt, wie viel-

vielmal eine Größe mit ſich ſelbſt müſſe multiplicirет werden, bis eine ſolche verlangte Potenz heraus käme, als die iſt, wofür die $\sqrt{}$ ſteht. Die Wurzel einer Größe, welche Größe entſteht, wenn man dieſe Wurzel mit ſich ſelbſt multiplicirt, heißt die Quadratwurzel, und ſteht blos alſo $\sqrt{}$, oder auch wol $\sqrt[2]{}$. Die Wurzel einer Größe, welche Größe entſteht, wenn man dieſe Wurzel dreymal mit ſich ſelbſt multiplicirt, heißt die Cubikwurzel, und ſteht alſo $\sqrt[3]{}$. Die Wurzel einer Größe, welche Größe entſteht, wenn die Wurzel 4, 5, 6mal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, heißt die $\sqrt[4]{}$, oder $\sqrt[5]{}$, oder $\sqrt[6]{}$ u. ſ. w. Z. E. a^2 iſt, wenn a mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, und die Wurzel daraus, nemlich aus a^2 wäre a. Man ſchriebe alſo $\sqrt{a^2} = a$ a^5 entſteht, wenn a fünfmal mit ſich ſelbſt multipliciret würde, und die 5fache Wurzel aus a^5 wäre a. Alſo ſchriebe man $\sqrt[5]{a^5} = a$, ſo wäre $\sqrt[3]{a^3} = a$, und der $\sqrt[4]{6^4} = 6$.

Man könnte auch wol eine Potenz allgemein anzeigen, und das geſchieht öfters, wenn man anſtatt einer Zahl, einen Buchſtaben an den Kopf der Größe ſchriebe. Denn wir haben ja ſchon geſehen, daß ein Buchſtabe alle mögliche Größen bedeuten kann, und alſo auch alle mögliche Zahlen, wenn er am Kopfe einer Größe ſtünde, ſo könnte man ja auch ſolche Größen in Potenzen haben a^r, x^n auch wol mehrere Buchſtaben an den Kopf der Größe, die alle eine Bedeutung hätten, und entweder ſchon Zahlen vorſtellten, oder auch nach gefundener Beſtimmung vorſtellen könnten. Man könnte alſo auch wol Größen mit ſolchen Potenzen finden,

den, z. E. x^{n+m}, oder y^{n-m}, oder a^{n+2}, oder a^{r+2} oder auch a^{n-r}, oder a^{n-3} und ſo weiter. Man ſiehet auch, nach einiger Ueberlegung, daß die ſo vielſte Wurzel einer ſolchen mit allgemeinen Zeichen an dem Kopfe bemerkten Größe; welche Größe entſtanden iſt, wenn ich dieſe Wurzel ſo vielmal mit ſich ſelbſt multiplicirt habe, als das Zeichen am Kopfe anzeigt; eben mit ſolchen Zeichen inwendig bemerkt werden müſſe. So wäre z. E. der $\sqrt[n]{a^n} = a$, oder die a müſte nmal mit ſich ſelbſt multipliciret werden, wenn a^n heraus kommen ſollte, und a wäre die nfache Wurzel der Potenz, welche Potenz entſteht, wenn a nmal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird. Wir führen dieſe Lehre von den Wurzeln noch nicht weiter aus, und berühren jetzt nur ſo viel davon, als wir zu den nachfolgenden Betrachtungen vors erſte nothwendig gebrauchen, weil ſie eigentlich in einem beſondern Kapitel vorkommen ſoll, und machen jetzt die Lehre von den Potenzen deutlich.

§. 91. Die Zahl oder Buchſtabe an dem Kopfe einer Größe, welche anzeigt, wie vielmal eine Größe mit ſich ſelbſt multiplicirt ſey, heißt der Exponent der Größe. Stehet nichts da, ſo bedeutet es, daß die Größe in der erſten Potenz ſich befinde, oder noch gar nicht mit ſich ſelbſt multiplicirt ſey, ſo iſt z. E. a eben ſo viel als a^1, aber man ſchreibt nicht a^1, ſondern blos a. 5 iſt ſo viel als 5^1, aber man ſchreibt nur 5. Alſo a^2. Hier iſt 2 der Exponet von a in der zweyten Potenz; x^5 hier iſt 5 der Exponent von x in der fünften Potenz. a^r:

r iſt hier der Exponent von a in der rten Potenz. Und a^{n+1} oder a^{r-2} da $^{n+1}$ oder $^{r-2}$, der Exponent von a in der Potenz $^{n+1}$ oder $^{r-2}$ iſt.

§. 92. Man kann Potenzen mit einander multipliciren. Sind die Größen gleichnamicht, die in Potenzen erhoben ſind, ſo werden die Potenzen mit einander multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt.

Gleichnamichte Potenzen aber ſind Potenzen von einerley Buchſtaben. Z. E. $a^2 . a^3$ wäre $a^{2+3} = a^5$. Dieſes ſind gleichnamichte Potenzen von a, weil ſowol a^2 als a^3 gleiche Buchſtaben ſind, die nur verſchiedene Potenzexponenten haben. Man wird dieſes leicht begreifen, wenn man dieſe Dinge nur etwas weitläuftiger aus einander ſetzen will. a^2 iſt $=$ aa und a^3 iſt $=$ aaa. Alſo $a^2 . a^3$ iſt $=$ aa.aaa. Aber ich darf ja nur bey der Multiplikation die Buchſtaben zuſammen ſetzen: alſo aa.aaa iſt aaaaa. Aber das iſt a^5, das ſiehet man ja, daß eben das heraus komme, wenn man die Exponenten von a^2 und a^3 zuſammen addirt: ſo iſt z. E. $x^3 . x^4 = x^{3+4} = x^7$. Denn

$x^3 = xxx$ und $x^4 = xxxx$ folglich gleiches

$x^3 . x^4 = xxx.xxxx$ für gleiches geſetzt,

$xxxxxxx = x^7$ ꝛc. das iſt aber

alſo:

$x^3 . x^4 = x^{3+4} = x^7$

Dies gilt nicht nur bey einzelnen Größen, ſondern wenn auch ſchon mehrere Buchſtaben oder Zahlen durch die Multiplikation verbunden ſind. Z. E.

x^2y^2.

$x^2y^2.x^3y^4$ wäre $= x^{2+3}y^{2+4}$, alſo wirklich die Exponenten addirt $= x^5y^6$. ſo wäre auch $x^3y.xy = x^3y^1.x^1y^1 = x^{3+1}y^{1+1} = x^4y^2$. Eben das gilt auch bey Zahlen $2^4.6^5.2^3.6^2 = 2^{4+3}\,6^{5+2} = 2^7.6^7$. Hätte man aber Größen, die nicht gleichnamicht wären, ſo ſetzet man ſie blos zuſammen, weil ſich deren Exponenten nicht addiren laſſen. Z. E. Man ſollte y^3 mit x^4 multipliciren, da müſte man ſetzen y^3x^4, denn, wenn man dieſes aus einander ſetzet, ſo wäre es eben ſo viel als yyy xxxx das müſte nach der zuerſt gezeigten Art der Buchſtabenmultiplikation geſchrieben werden yyyxxxx und das iſt ja $= y^3x^4$.

Wenn die Exponenten **Buchſtaben** und die **Größen**, zu welchen die Potenzen gehören, **gleichnamichte** Größen ſind, ſo addirt man auch die Exponenten zuſammen, und zwar durch das Zeichen plus (+). Z. E. $a^r.a^m$ iſt $= a^{r+m}$ und $y^rx^m.y^4x^b$ iſt $= y^{r+4}.x^{n+b}$. Man ſieht bald ein, daß ſie auf keine andere Art können zuſammen addirt werden, weil die Exponenten allgemeine Größen anzeigen, die erſt beſtimmt werden müſſen, und man für jeden Exponenten noch alles mögliche ſetzen kann. Sind aber die Größen, die zu Potenzen erhoben ſind, die man multipliciren ſoll, keine gleichnamichte Größen, ſo ſetzt man ſie blos zuſammen, wie bey der gewöhnlichen Multiplikation geſchiehet. Z. E.

$x^r.y^n$ iſt $= x^ry^n$ oder $x^{r+n}.a^{m+1}$ iſt $= x^{r+n}\,a^{m+1}$

§. 93. Ueber alle dieſe Arten der Multiplikation der Potenzen mit einander wollen wir noch einige Exempel beyfügen.

Man multiplicire ay^3x^4 mit yx das iſt $= ay^3x^4 . x^1y^1 = ay^{3+1}x^{4+1} = ay^4x^5$

$x^2y^2a^4$ mit $a^3xy^3b = x^{2+1}y^{2+3}a^{4+3}b = x^3y^5a^7b$.

a^m mit $a^n = a^{m+n}$

a^{m+1} mit $a^m = a^{m+m+1} = a^{2m+1}$

$x^{m-2}y^r$ mit $x^ny^{r-3} = x^{m+n-2}y^{r+r-1} = x^{m+n-2}y^{2r-1}$

$x^{r+m}y^n$ mit $b^nd^x = x^{r+m}y^nb^nd^x$

noch $a^{n+1}x^{3n+1}y^{n+1} . a^{-n}x^{-3n}y^{-n} =$

$a^{n+1-n}x^{3n+1-3n}y^{n+1-n} = a^1x^1y^1 = axy$.

Man wird leicht einſehen, daß nicht nur bey ſolchen kleinen Exempeln, ſondern auch mannigmal bey recht großen, eine Multiplikation der Potenzen ſtatt finden kann, und daß ſie nach eben dieſen Regeln behandelt werden müſſen. Z. E. Man ſollte $px + ax^2 - a^2$ multipliciren mit $x^2 + a^2$ hier ſieht man gleich, daß man unſre Regel wird anbringen können, und anbringen müſſen. Potenzen multipliciren, heißt ihre Exponenten addiren. Dieſes Exempel würde alſo ſtehen:

$$
\begin{array}{r}
px + ax^2 - a^2 \\
x^2 + a^2 \\
\hline
+ a^2px + a^3x^2 - a^4 \\
px^3 + ax^4 - a^2x^2 \qquad\qquad \\
\hline
px^3 + a^2px + ax^4 + a^3x^2 - a^2x^2 - a^4
\end{array}
$$

Denn

Denn wenn man anfängt zu multipliciren, $+a^2$ mit $-a^2$, ſo ſieht man gleich nach unſern gegebenen Regeln, daß man dieſe Potenzen, weil ſie gleichnamicht ſind, dadurch multipliciret, wenn man ihre Potenzen addirt, unddas $-a^4$ heraus kommen müſſe, weil $-$ mit $+$ multipliciret, $-$ giebt. In dem zweyten Gliede des Multiplicandus findet ſich wieder ein a nemlich in ax^2. Das nun mit dem Multiplicator a^2 multipliciret, würde ax^2a^2 ſeyn: aber hier kann man ja a und a^2 wirklich multipliciren, wenn man ſeine Potenzen addiret, und es kömmt alsdenn a^3x^2 heraus: weil a oder a^1 einerley iſt u. ſ. w. Auch allgemein würde das oben gegebene Geſetz befolgt werden müſſen, wo es geſchehen könnte. Z. E.

$$\begin{array}{r} a^r p^m - bx^n + ax^{2n} \\ a^n - x^m \\ \hline -a^r p^m x^m + bx^{n+m} - ax^{2n+m} \\ +a^{r+n} p^m - a^n bx^n + a^{n+1} x^{2n} \\ \hline a^{r+n} p^m - a^n bx^n - a^r p^m x^m + a^{n+1} x^{2n} + bx^{n+m} - ax^{2n+m} \end{array}$$

Das ließe ſich wirklich gut inultiplicciren, und die Potenzen müſte man, wie es ſich gehöret, addiren. Man ſiehet dieſes ſogleich. Denn bey dem erſten Gliede $+ ax^{2n}$ multiplicirt mit $-x^m$, kann man gleich die Exponenten von dem Multiplicator und Multiplicandus addiren. Das Zeichen muß minus werden, weil die Zeichen in den Faktoren verſchieden ſind, und alſo muß dieſes Glied nothwendig nach der Multiplication werden $+ax^{2n+m}$; und wenn man die andern Glieder aufmerkſam betrachtet, und das Vorhergehende gut verſteht, ſo wird man hier keine Schwierigkeit finden.

§. 94. Daß Größen, die zu Potenzen erhoben ſind, auch addirt und von einander ſubtrahirt werden können, wird man leicht begreifen, allein dieſes geſchieht auf die gewöhnliche Art, welche wir in der Addition und Subtraktion gelernet haben. Sind ſie gleichnamicht, nemlich von gleichen Buchſtaben oder Zahlen und gleichen Exponenten, ſo addirt und ſubtrahirt man ſie zuſammen, wie man andre gleichnam. Größen addirt oder ſubtrahirt. Sind ſie nicht gleichnam. ſo kann dieſes nur durch die Zeich. angedeutet werden. Man ſetzte z. E. $2a^2$ und noch $3a^2$ addiren, das wäre $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$ und $3a^2x^3$ zu $5a^2x^3$ wäre $8a^2x^3$. Man ſollte $+ 4x^3y^2$ zu $- 2x^3y^2$ addiren, das hieße hier, Entgegengeſetztes addiren, und ſtünde alſo

$$\begin{array}{r} +4x^3y^2 \\ -2x^3y^2 \\ \hline +2x^3y^2 \end{array}$$

eben alſo wie wir bey der Addition mit entgegengeſetzten Größen gelernt haben. Man ſollte von $+ 4a^2$ abziehen $+ 2a^2$, ſo bliebe $2a^2$

$$\begin{array}{ll} \text{und von} & + 4a^nx^m \\ \text{abgezogen} & + a^nx^m \\ & - \\ \hline \text{wäre} & + 3a^nx^m \end{array}$$

(Man erinnere der ſich allgemeinen Regel der algebraiſchen Subtraktion §. 57.)

$$\begin{array}{ll} \text{von} & 4a^nx^m \\ \text{abgezogen} & - 3a^nx^m \\ & + \\ \hline & + 7a^nx^m \end{array}$$

Noch

Noch ein Exempel: $a^{2n+1}y - 3x^{3-m} + 5y^{r+1} - 18$

addire $-5a^{2n-1}y + 6x^{3-m} + 3y^{r+1} + 14$

$$-4a^{2n+1}y + 3x^{3-m} + 8y^{r+1} - 4$$

Sind aber die Größen, die Potenzen worden ſind, ungleichnamicht, und ſollen addirt oder ſubtrahirt werden, ſo wird das blos mit dem gewöhnlichen Zeichen angezeiget. Z. E. zu x^3 ſoll addirt werden y^2, das iſt $x^3 + y^2$; zu $x^n a^m$ ſoll addirt werden y^r, das iſt $x^n a^m + y^r$. Soll es davon abgezogen werden, ſo wird es auch blos mit dem gewöhnlichen Zeichen angedeutet. Wenn man von x^3 abziehen ſoll y^3, ſo ſchreibt man das alſo: $x^3 - y^3$, und von x^n abgezogen y^{m+r}, iſt $x^n - y^{m+r}$: Man verwechſele die Addition der Potenzen nicht mit ihrer Multiplikation, und erinnere ſich beſtändig der Regel, daß Potenzen mit einander multipliciren, ihre Exponenten addiren heißt.

§. 65. Wir haben gelernet, wie man Potenzen mit einander multipliciret, nemlich wenn ſie gleichnamicht oder von einerley Benennung ſind, durch die Addition ihre Exponenten. Aber man kann auch ſchon wirkliche Potenzen zu noch höhern Potenzen durch die **Multiplikation ihrer Exponenten erheben.**

Z. E. wenn ich a^2 habe, und ich will dieſe a^2 zur zweyten Potenz erheben, ſo multiplicire ich ihren Exponenten mit 2, und alsdenn wird die zweyte Potenz von a^2 zu $a^{2 \cdot 2} = a^4$; wollte ich a^2 zur dritten Potenz erheben, ſo multiplicire ich den Ex-

ponenten von a^2 mit 3, und die dritte Potenz von a^2 wird $a^{2.3} = a^6$. Alſo gegebene Potenzen werden zu höhern erhoben, wenn man ihren Exponenten mit der Größe multipliciret, zu welcher Potenz ſie erhoben werden ſollen. Man wird den Grund von dieſem Verfahren einſehen, wenn man nur ein Exempel gehörig aus einander ſetzet.

Wenn man eine Potenz zu einer höhern erheben ſoll, ſo heißt das, ſie mit ſo viel Potenzen von gleicher Benennung und von gleichen Exponenten ſo vielmal multipliciren, um ſo viel ſie zu einer höhern Potenz erhoben werden ſoll, alſo auch ſo vielmal die Exponenten dieſer Multiplicatoren dazu addiren; oder weil die Addition von einerley Größen in der That eine Multiplication iſt, den Exponenten der gegebenen Größe nur mit einer ſolchen Zahl multipliciren, ſo viele gleichnamichte Exponenten man ſonſt hätte dazu addiren müſſen. Exempel werden dieſes erläutern. Wenn man ſoll a^2 zur dritten Potenz erheben, das heißt, a^2 dreymal mit ſich ſelbſt multipliciren, welches wäre $a^2.a^2.a^2$. Nun heißt ja Potenzen multipliciren, ihre Exponenten addiren. Dieſes $a^2.a^2.a^2$ wäre alſo $= a^{2+2+2} = a^6$; allein man kömmt weit kürzer dazu, wenn man, anſtatt dieſen Exponens 2 dreymal zu ſich ſelbſt zu addiren, ihn nur mit drey multipliciret; welches ja eben das, als eine dreymalige Addition iſt, und auf die Art wird ja a^2 zur dritten Potenz auch erhoben. a^4 ſoll zur fünften Potenz erhoben werden. Das wäre $a^4.a^4.a^4.a^4.a^4$ oder $a^{4+4+4+4+4}$, das wäre a^{20}. Man

kömmt

kömmt ja weit kürzer weg, wenn man ſchreibt a^4 zur fünften Potenz erhoben iſt $a^{4\cdot5}=a^{20}$ oder den Exponens mit 5 multiplicirt, weil ja eben das heraus kömmt. So würde a^6y^4 zur dritten Potenz erhoben ſeyn. $a^{6\cdot3}y^{4\cdot3}=a^{18}y^{12}$. Man ſetze das auf eben gezeigte Art als beym vorhergehenden Exempel aus einander, ſo wird man bald davon überzeugt werden. Sind die Exponenten Buchſtaben, und ſollen die gegebenen Potenzen noch zu höhern Potenzen, die man verlangt, erhoben werden, ſo verfährt man eben alſo. Es ſoll a^n zur dritten Potenz erhoben werden, das wäre $a^{n\cdot3}$ oder a^{3n}. Es ſoll a^ry^x zur fünften Potenz erhoben werden, das wäre $a^{5r}y^{5x}$, und $a^{r+1}y^{2r}$ zur vierten Potenz erhoben, wäre $a^{(r+1)4}y^{(2r)4}=a^{4r+4}y^{8r}$. Gleichfalls wenn eine gegebene Potenz zu einer gegebenen Potenz von allgemeiner Benennung, z. E. zur mten oder rten, oder nten ꝛc. Potenz ſoll erhoben werden, ſo verfährt man eben ſo. y^x ſoll zur mten Potenz erhoben werden, das wäre y^{mx}; und a^{n+1} ſoll zur mten Potenz erhoben werden; das wäre $a^{(n+1)m}$ oder a^{nm+m}; und zur $r+1$ſten Potenz erhoben, wäre $r^{(x\,r+1}=r^{xr+x}$. Ich hoffe, daß man dieſes nun deutlich einſehen wird.

§. 96. Oeſters findet man auch bey Größen, die durch die Multiplikation verbunden, oder durch die Addition zuſammen geſetzt ſind, daß ſie zu Potenzen ſollen erhoben werden. Z. E. $(ax)^2$ das heißt ax ſoll zur zweyten Potenz erhoben werden; hier waren ax zwey Größen, die durch die Multiplication verbunden waren. Alsdenn wird

jede der Größen mit dem gegebenen Exponenten bezeichnet, alſo $(ax)^2$ würde ſeyn a^2x^2 und $(axy)^3 = a^3x^3y^3$, und $(a^2x)^4$ würde ſeyn $a^{2 \cdot 4}x^4 = a^8x^4$. Wenn man nun dieſe Größen wieder analyſiret, ſo wird man hievon den Grund bald finden, $(ax)^2$ war $ax.ax$ alſo $aaxx$ oder a^2x^2; und $(a^2x)^4$ war $a^2x.a^2x.a^2x.a^2x = a^2a^2a^2a^2 xxxx = a^8x^4$. Man multipliciret alſo die gegebene Potenz in den Exponenten der Potenz, jeder der Größen, die man ſchon hat. Haben die Größen keine Exponenten, ſo haben ſie doch den Exponenten 1, und unſere Regel gilt gleichfalls. Bey $(ax)^2$ war an keiner Größe ein Exponent, aber man könnte es doch anſehen als $(a^1x^1)^2$, und multiplicirte man nun den Exponenten von a und x jeden mit 2, ſo bekam man a^2x^2. Das gilt auch allgemein. $(ax)^r$ iſt a^rx^r und $(a^nx^r)^m = a^{nm}x^{rm}$.

Auch durch die Addition zuſammengeſetzte Größen können zu Potenzen erhoben werden. $(a+b)^2$ iſt eine zuſammengeſetzte Größe zur zweyten Potenz erhoben. Das heißt nun, dieſe Größe $a+b$ ſoll mit ſich ſelbſt multipliciret werden. Geſchiehet das nun wirklich, ſo kömmt heraus $a^2 + 2ab + b^2$, und das iſt $(a+b)^2$; eben ſo auch $(a+b)^3$, da ſoll erſt $a+b$ mit $a+b$ multiplicirt, alſo in die zweyte Potenz erhoben werden, das Produkt davon, oder $a^2 + 2ab + b^2$ ſoll alsdenn wieder mit $a+b$ multipliciret werden, und alsdenn iſt das Produkt $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ welches $=$ $(a+b)^3$ und dafür kann geſetzt werden. Oft ſchreibt man auch alsdenn um des Vortheils und Bequemlichkeit in Calcul, dieſes alſo

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$ oder auch anſtatt $(a+b)^3 = (a+b).(a+b).(a+b)$ &c. Eben das gilt auch für mehrere zuſammengeſetzte Größen.

Auch für Größen, welche mit dem Minuszeichen verbunden ſind. Z. E. $(a-b)^2$ welches, wenn man wirklich $a-b$ mit $a-b$ multipliciret, giebet $= a^2 - 2ab + b^2$ und auch für andere zuſammengeſetzte Größen. Man bemerke hiebey, daß, wenn man anzeigt, daß eine durch die Plus- oder Minuszeichen zuſammengeſetzte Größe zu einer Potenz ſoll erhoben werden, ſie allezeit in einer Klammer muß eingeſchloſſen werden, wo denn der Exponent oben an den Kopf der Klammer geſetzt wird. Es iſt nöthig, daß man ſich die mathematiſche Schreibart recht gut bekannt macht, weil man ſonſt nimmermehr in den Schriften der Mathematiker fortkommen kann. Es würde z. E. ein großer Unterſchied ſeyn, wenn man anſtatt $(a+b)^2$ ſchriebe $a+b^2$. Das erſtere hieße, die Größe $a+b$ ſollte mit einander multipliciret werden, und das zweyte zu der Größe a ſollte das Quadrat von b addirt werden, welches ſehr verſchiedene Dinge ſind.

Wir wollen einmal annehmen, a wäre 5 und b wäre 10, ſo wäre $(a+b)^2 = (5+10)^2 = (15)^2 = 15.15. = 225$; aber $a+b^2$ wäre $= 5+10^2 = 5+10.10. = 5+100 = 105$, welches beydes ſehr von einander verſchieden iſt.

§. 97. Wir beſchließen die Lehre von der Multiplikation noch mit einigen leichten,

aber

aber wichtigen Grundſätzen, die allgemein richtig ſind.

1) Gleiches mit Gleichem multipliciret, wird Gleiches. Denn bey zwey oder mehr gleichen Größen, die mit einer Gleichen multipliciret werden, wird ja bey einer ſowol als bey der andern die Größe ſelbſt gleich vielmal zu ſich ſelbſt addiret. Es ſey z. E. $a = b$, beyde ſollen durch n multipliciret werden, alſo auch $an = bn$, oder $3 \times 4 = 2 \times 6$, alſo auch $3 \times 4 \times 5 = 2 \times 6 \times 5$.

2) Gleiches mit Ungleichem multipliciret, giebt Ungleiches, und der größere Multiplicator giebt ein größeres Produkt als der kleinere, denn alsdenn wird von beyden gleichen Größen die eine mehrmal zu ſich ſelbſt addiret als die andere. Noch mehr wird es daher auch wahr ſeyn, daß, wenn von zwey ungleichen Größen, die größere mit einer größern ganzen Zahl multipliciret wird als die kleineſte, ſie noch um ſo viel mehr größer wird als die kleine.

Wir wiederholen auch noch folgende:

3) Jede Größe mit 1 oder mit einer Größe, die eben ſo viel als 1 iſt, multipliciret, bleibt wie ſie unverändert.

4) Jede Größe mit Null oder mit einer Größe, die ſo viel als Null iſt, multipliciret, wird zu Null oder zu nichts, denn wenn man eine Sache noch ſo vielmal nichts mal nimmt, ſo bleibt und wird ſie nichts. So einleuchtend beyde letztern Regeln auch ſeyn mögen, ſo wird doch oft von Anfängern dagegen geſündiget.

Das Fünfte Kapitel.

Von der Diviſion in ganzen Zahlen und Buchſtaben.

§. 98. Wir haben in der Multiplikation gelehrt, wie man es anzufangen habe, wenn man eine gegebene Größe ſo vielmal als man will auf eine geſchwinde Art zu ſich ſelbſt addiren könne. Jetzt werden wir uns beſchäftigen, eine geſchwinde Art der Subtraktion zu lehren, welche man die Diviſion nennt. Wenn man von einer gegebenen Zahl eine andere etliche mal oder ſo vielmal als man will wegnimmt oder abziehet, und anzeigt, wie vielmal das angeht, ſo dividiret oder theilet man. In der Subtraktion zog man gewöhnlich eine Größe von einer Größe ab, und bemerkte, um wie viel ſie kleiner oder größer war, jetzt ſoll ich wiſſen oder ſuchen, wie vielmal ſie ſich davon abziehen läßt.

Z. E. es wäre mir 8 gegeben, das ſollte ich durch 2 dividiren oder theilen, das heißt, ich ſollte 2 ſo vielmal von 8 abziehen als ich könnte, und das nachher bemerken; ich finde, wenn ich 2 von 8 abziehe, ſo behalte ich 6, alſo das iſt einmal

mal davon abgezogen; nun weiter, 2 von 6 nun behalte ich noch 4, und 2 iſt nun zweymal davon abgezogen. Ferner, 2 von 4, und ich behalte 2, und 2 iſt dreymal abgezogen. Und endlich, 2 von 2 da bleibt nichts, und 2 iſt nun viermal abgezogen. Ich finde alſo, ich kann 2 von 8 viermal nehmen, ehe alles auf iſt, kann ich aber 2 von 8 viermal nehmen, ehe alles auf iſt, ſo iſt das einerley mit dem Ausdruck, 2 iſt in 8 viermal enthalten, denn wäre es das nicht, ſo könnte ich es auch nicht viermal davon nehmen. Eben ſo, wenn ich 484 mit 4 dividire, ſo heißt das 4 davon ſo vielmal nehmen, als es angehen will, und das nachher anzeigen, das geht aber 121mal an, alſo muß auch 4 in 484, 121 ſtecken, oder darin enthalten ſeyn, ſonſt hätte ich es nicht ſo vielmal darinnen nehmen können. Dividiren oder theilen könnte alſo auch alſo beſchrieben werden: **es heißt finden, wie vielmal eine Zahl oder Größe in einer andern Zahl oder Größe enthalten ſey.**

Auf dieſe Art zu verfahren, würde aber bey großen gegebenen Größen eine ſehr weitläuftige und mühſame Arbeit ſeyn. Man hat daher eine weit ſchnellere Art zu dividiren erfunden, die wir gleich anzeigen werden, und die ſich auch größtentheils auf das oft angeführte decadiſche Geſetz gründet; daß zehn Einheiten einer niedrigen Ordnung eine Einheit der nächſt höhern Ordnung ausmachen, und eine Einheit der nächſt höhern Ordnung, zehn Einheiten der nächſt niedrigen giebt.

Ehe

Ehe wir aber dieſe Art der Diviſion, die man nun immer gebraucht, lehren, müſſen wir erſt die Sprache der Mathematiker bey der Diviſion erklären.

§. 99. Das Zeichen, welches anzeigt, daß eine Größe durch eine andre ſoll dividiret werden, iſt entweder ein Querſtrich zwiſchen zwey Größen, da die eine, welche ſoll dividiret werden, oben ſteht, die andre, womit ich ſie dividiren ſoll, unten. Oder es ſind zwey unter einander ſtehende Punkte zwiſchen zwey Größen (:). Z. E. 8 ſoll dividiret werden durch 4, könnte man ſo anzeigen $\frac{8}{4}$ oder auch 8:4. 168 durch 12 dividiret $\frac{168}{12}$ oder 168 : 12. Eben dieſes gilt auch bey Buchſtaben, ab dividiret durch b ſteht alſo: $\frac{ab}{b}$ oder ab : b und auch bey großen und kleinen zuſammengeſetzten Größen $a^2 + 2ab + b^2$ dividirt durch $a + b$ würde ſtehen: $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$ oder $(a^2 + 2ab + b^2) . a + b)$ da man denn bey der letzten Art zu ſchreiben mit zwey Punkten bey zuſammengeſetzten Größen die zu dividirende Zahl und die Zahl, womit man dividiren ſoll, in Klammern einſchließet, um allem Mißverſtande vorzubeugen. Die übrigen Namen bey der Diviſion ſind folgende: die Größe, welche man dividiren ſoll, heißt der **Dividendus.** Die Größe, womit man dividiren ſoll, heißt der **Di**viſor,

viſor, und die Größe, welche anzeigt, wie vielmal der Diviſor im Dividendus enthalten ſey, §. 98 heißt der Quotient.

Z. E. 12 ſoll durch 4 getheilet werden, ſo wird man finden, (wie wir bald lernen werden) daß 4 in 12, 3mal enthalten ſey; ſo iſt 12 der Dividendus, 4 der Diviſor und 3 der Quotient. Wenn ab durch b ſoll getheilet werden, ſo iſt b, amal in ab enthalten, (man glaube dieſes vors erſte, weiter unten wirds bewieſen,) und alſo ab der Dividendus, b der Diviſor und a der Quotient.

§. 100. Nach dieſen Vorausſetzungen wollen wir nun zur wirklichen Diviſion mit Zahlen gehen. Wir wollen bey der aller einfachſten Art anfangen. Es ſoll eine Zahl durch eine andere dividiret werden; hier ſieht man gleich, daß weder der Diviſor noch der Dividendus die 9 überſteigen kann. Ich werde nun hier gleich finden können, wie vielmal der Diviſor im Dividend enthalten wäre, aber wir wollen uns einmal betragen, als ob wir das gar nicht wüſten, ſondern erſt ſuchen müſten: man ſoll z. E. 8 mit 2 dividiren. Ich bemerke bald, daß das Einmaleins mir hier zu Hülfe kommen kann, und wenn ich 2 einigemal mit verſchiedenen Einheiten von 1 an multiplicire, ich alsdenn auf eine Zahl kommen werde, die nahe bey 8, oder ſelbſt 8, oder etwas über 8 iſt; käme ich auf eine, die etwas über 8 wäre, die könnte ich nicht gebrauchen, denn ich will wiſſen, wie vielmal 2 in 8 ſteckt, oder davon kann genommen werden. Käme

ich

ich auf eine Zahl nahe bey 8, die könnte ich alsdenn gebrauchen, wenn ſie nicht völlig um 2 unter 8 wäre, denn wäre ſie völlig 2 unter 8, ſo könnte ich ja die 2 nochmal von 8 nehmen, und ich hätte ſie jetzt zu wenig genommen, wäre ſie aber nicht völlig 2 unter 8, ſo ſteckte die 2 nicht auf ſolche Art in der 8, daß endlich nichts übrig bliebe, ſondern es wäre ein Reſt da, der doch noch ferner durch den Diviſor müſte dividirt werden. Bey dieſem Exempel findet ſich dieſes nicht. Man verſuche aber nun die Diviſion, man ſchreibe das Exempel alſo:

$$\begin{array}{c|l} 8 & 4 \\ (2) & \\ 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Da man den Diviſor unter den Dividend ſetzet, und hinter beyde einen heruntergehenden Strich machet. Nun verſuche man; 2mal 2 iſt 4; da iſt 8 noch zu groß. 3 mal 2 iſt 6, da iſt auch 8 noch größer als 6. Ferner 4 mal 2 iſt 8, da iſt eben die 8 gefunden. Alſo 2 kann nur in 8 viermal ſtecken, weil 4 mal 2 acht iſt. Ich ſetze alſo 4 zum Quotienten. Nun multiplicire ich den Quotienten mit dem Diviſor, und ziehe das Produkt von dem Dividendus ab, um zu ſehen, ob der Quotient groß genug genommen iſt; denn bliebe beym Abzuge mehr, als der Diviſor groß iſt, übrig, ſo ſehe ich, daß der Diviſor noch ein oder auch wol mehrmal im Dividendus ſteckte. Alſo 2 mal 4 iſt 8, dieſes ſetzt man unter den Dividendus, macht einen Strich und zieht denn ab, wobey

man, um alle Unordnung zu vermeiden, die Zahlen, die man von einander abzieht, ausſtreicht, und ſetzt die Differenz unter den Strich. Hier 8 von 8 iſt 0. Alſo der Diviſor ſteckt eben 4mal in dem Dividendus.

Auf eben die Art würde einem jeden Anfänger ohne weitere Anweiſung folgendes Exempel leicht zu machen ſeyn: man ſollte 9 durch 3 dividiren, es ſtünde alſo: 9 |3 Da denn 3 der Quotient iſt.

(3)|
9
———
0

§. 101. Allein es kömmt doch auch ſehr oft, wenn man auch nur eine Zahl mit einer Zahl zu dividiren hat, daß der Diviſor im Dividendus nicht genau enthalten iſt, ſondern etwas überbleibet, welches allezeit, wie wir ſchon geſagt haben, kleiner als der Diviſor ſeyn muß. Z. E. Wenn 7 durch 2 ſoll dividirt werden, ſo kann man nicht ſagen, 2 iſt in 7, 4mal enthalten, weil 4mal 2 ſchon mehr als 7, nemlich 8 iſt, man kann auch nicht genau ſagen, 2 iſt in 7, 3mal enthalten, denn 3mal 2 iſt nur 6, und da fehlt etwas, ehe 7 voll wird. Ich ſehe mich genöthiget alſo, zum Quotienten 3 zu nehmen, denn 3mal ſteckt doch wirklich der Diviſor in dem Dividendus. Was überbleibet, muß geringer als 2 oder als der Diviſor ſeyn. Ich finde dieſes, wenn ich den Diviſor mit dem Quotienten multiplicire, und denn das Produkt vom Dividendus abziehe. Hier iſt das 1. Das iſt der Reſt; dieſen Reſt ſetze ich an den Quotien-

tienten an, und ſetze den Diviſor darunter, und einen Querſtrich als das Diviſionszeichen dazwiſchen.

Ich zeige dadurch an, daß dieſer Reſt noch ferner eigentlich durch den Diviſor dividiret werden ſollte. Man nennet einen ſolchen Reſt, worunter der Diviſor ſteht, einen **Bruch**. Dieſes Wort nennen wir jetzt nur vorläufig, ohne es weiter zu erklären, oder auch Gebrauch davon zu machen, weil ſeine Erklärung unten in einem beſondern Kapitel weitläuftig erfolget.

Der Quotient von 7 dividirt durch 2, wäre alſo eine ganze Zahl plus einem Bruche, und stünde alſo:

$$\begin{array}{r|l} \not 7 & 3\frac{1}{2} \\ (2) & \\ \not 6 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Man kann dieſes auch leicht begreifen, wenn man einmal dieſes auf ein Exempel im gemeinen Leben anwendet. Man ſollte 7 Thlr. unter 2 Leute gleich theilen, ſo ſtecken 2 in 7 erſtlich 3mal, oder wenn ich jedem immer 1 Thlr. gebe, ſo könnte ich das 3mal thun, aber denn bliebe noch ein Thaler übrig; den könnte ich nicht einem alleine geben, ſondern dieſer 1 Thlr. müſte auch noch in 2 Theile getheilet werden, das zeige ich an, wenn ich den Diviſor darunter ſetze.

Auf eben die Art würde 7 durch 4 getheilet ſeyn $1\frac{3}{4}$. Es ſtünde alſo: 7 | $1\frac{3}{4}$

(4) |

4

―――

3 ꝛc.

und 6 durch 5 getheilet, 6 | $1\frac{1}{5}$

(5) |

5

―――

1

§. 102. Wir wollen nun im Dividendus zwey oder mehr Zahlen nehmen, und im Diviſor eine behalten. Hier kommen zwey Fälle vor: entweder die erſte Zahl des Dividendus von der linken Hand alſo am Werth die größte iſt, ſo groß an dem Ziffernwerthe oder auch größer als der Diviſor, oder ſie iſt kleiner. Sie ſey erſt ſo groß oder auch größer als der Diviſor. Iſt ſie das, ſo ſetze ich den Diviſor gleich darunter, und ſuche nach Anleitung des §. 100 durch Hülfe des Einmaleins, wie vielmal genau oder am näheſten genau, das iſt nächſt kleiner er darin enthalten ſey, das ſchreibe ich zur erſten Zahl des Quotienten, von der linken Hand an gerechnet. Ich multiplicire nun den Quotienten mit dem Diviſor, ſetze das Produkt unter die Zahl des Dividendus, die ich eben theile, und ziehe es davon ab. Geht es auf, ſo iſt die Diviſion dieſer Zahl fertig, und ich gehe zur nächſten, womit ich eben ſo verfahre; geht es nicht auf, ſo bleibt ein Reſt, der aber immer kleiner als der Diviſor ſeyn muß, denn ſonſt habe ich zu wenig in den Quotienten genommen. Zu dieſem

Reſt

Reſt rücke ich die nächſte Zahl des Dividendus herunter; weil ich ja nun noch den Reſt und die nächſte Zahl mit zu theilen habe. Da nun hier die erſte Zahl dieſes neuen Dividendus allezeit kleiner ſeyn muß als der Diviſor, weil es der Reſt war, ſo muß ich den Diviſor unter die hinterſte Zahl von beyden ſetzen, und fange denn wieder an zu dividiren, wie ich vorher gethan habe, und fahre alſo fort, bis ich die letzte Zahl nach der rechten Hand hin herunter gerückt, und mit dividiret habe. Iſt aber gleich beym Anfange die erſte Zahl des Dividendus kleiner als der Diviſor, ſo rücke ich den Diviſor gleich um eine Zahl rückwärts, und verfahre, wie wir gezeiget haben. Exempel ſollen dieſe Regel erläutern.

Es ſoll 5684 dividiret werden durch 4. Alſo würde dieſes Exempel ſtehen:

```
  5684 | 1421
  (4)..|
   4...
  ------
   16..
   (4)..
   16..
  ------
     8.
    (4).
     8.
  ------
      4
     (4)
      4
  ------
      0
```

4 in 5 einmal, (in den Quotienten geſetzet), nun den Diviſor mit dem Quotienten multipliciret, und unter den Dividendus geſetzt, alſo 4mal 1 iſt 4, abgezogen: 4 von 5 bleibt 1. Dieſe unter den Strich geſetzt, und die Zahlen, womit man operiret hat, ausgeſtrichen. Man rücke die nächſte Zahl, die 6 unter den Strich, und der Diviſor wird unter die 6 geſetzt. 4 in die 16 viermal: in den Quotienten. Nun den Diviſor mit dem Quotienten multiplicirt. 4mal 4 iſt 16, gegen einander abgezogen, dieſes Produkt und der Dividend, 16 von 16 geht auf. Man rücke die nächſte Zahl, die 8 herunter. 4 in die 8 zweymal. Wieder die 2 in den Quotienten geſetzt, mit dem Diviſor multiplicirt. Zweymal 4 iſt 8. Das Produkt unter den Dividendus, und davon abgezogen, 8 von 8 geht auf, die 4 herunter gerücket, den Diviſor darunter, 4 in 4 einmal. Die 1 in den Quotienten. Nun mit dem Diviſor multipliciret, das Produkt unter den Dividend, und davon abgezogen. 1 mal 4 iſt 4, und 4 von 4 geht auf. Alſo der Quotient 1421 oder 4 iſt in 5684 enthalten 1421 mal. Wir haben nur nöthig, noch einige Exempel völlig ausgearbeitet hinzuſetzen, und man wird alsdenn alles leicht einſehen können.

Man dividire 45684 mit 6. Hier muß der Diviſor die 6 nicht unter die 4, ſondern unter die 5 zu ſtehen kommen, weil 6 in 4 gar nicht enthalten iſt, oder kurz nach der obigen Regel, weil 4 kleiner als 6 iſt.

Das Exempel ſtünde alſo:

```
45684 | 7614
(6)...|
42... |
 36..
 (6)..
 36..
  8.
 (6).
  6.
  24
 (6)
  24
   0
```

Man dividire 565940 mit 5:

565940 | 113188
(5).....
5.....
———
6....
(5)....
5....
———
15...
(5)...
15...
———
9..
(5)..
5..
———
40.
(5).
40.
———
40
(5)
40
———
0

Noch ein Exempel, wobey ein Reſt bleibet, 78432 mit 9. Alſo: $78432 \mid 8714\frac{6}{9}$

```
78432 | 8714 6/9
(9)...
72...
-----
 64..
(9)..
 63..
-----
  13.
 (9).
   9.
-----
   42
  (9)
   36
-----
    6
```

Hier hängt man den Reſt, welches hier 6 war, an den Quotienten, und ſetzt den Diviſor darunter, zum Zeichen, daß dieſer Reſt auch noch in 9 Theile getheilet werden müſſe.

§. 103. Die Anfänger werden auch nun wol begierig ſeyn, den Grund dieſes Verfahrens zu wiſſen. Wenn wir den angezeigt haben, ſo haben wir auch zugleich damit den Beweis geführet, daß man richtig verfahren habe, wenn man dieſen Weg gebrauchet. Man erinnere ſich jetzt wieder, daß eine jede zuſammengeſetzte Zahl, das iſt, die aus mehr als einer Ziffer beſteht, auch aus ſo viel Zahlen von verſchiedenem Range beſteht, als ſie Ziffern hat. So kann daher z. E. 4863 auch geſchrieben werden, 4000 + 800 + 60 + 3. Wenn ich nun jede einzelne Größe theile, und bemerke, was

bey jeder einzelnen Größe heraus kömmt, und nachher alle meine Quotienten zuſammen nehme, ſo habe ich ja den Quotienten von der ganzen Größe. Denn, wenn ich dieſe Zahl durch 3 theilen ſollte, und ich weis, wie vielmal 3 in jedem dieſer Glieder enthalten iſt, und dieſe einzelne Quotienten nun zuſammen nehme, ſo weis ich auch, wie vielmal 3 in der ganzen Größe enthalten iſt. Und das wollte ich ja wiſſen, ich habe alſo wirklich recht verfahren. Wir wollen einmal dieſes Exempel auf ſolche Art zergliedert dividiren. Erſtlich, 3 in die 4000 habe ich erſt 1000mal und noch etwas mehr, allein, weil das etwas mehr als 1000 doch nicht voll noch 1000mal iſt, ſo wollen wir das fürs erſte nicht in den Quotienten ſchreiben. Alſo 3 in die 4000, tauſendmal.

Oder wenn man die 4000 als eine 4 von dem vierten Range, welcher der Rang der Tauſendter iſt, anſiehet, ſo kann man ſagen, 3 in die 4 einmal. Man ſchreibe hin 1000
Aber da 3mal 1000 nur 3000 ſind, ſo bleiben von den 4000 noch 1000 übrig, die noch nicht dividiret ſind. Die wollen wir nun als Hunderter anſehen, und zu der nächſt niedrigern Klaſſe rechnen und dividiren, ſo werden ſie auch dividiret, alſo haben wir in der Klaſſe 800 und 10hundert, die von dem erſten Gliede noch übrig waren, oder 1800, oder 18 vom dritten Range, welches der Rang der Hunderter. Nun 3 in 1800 hat man 600mal, oder auch 3 in die 18, sechsmal. Hingeſchrieben . . . 600

Und

Und weil 3mal 600 = 1800 iſt, ſo bleibt hier nichts übrig.

Wir gehen zu der dritten Klaſſe. 3 in die 60 habe ich 20mal, oder 3 in die 6 Zehner habe ich 2mal, welches aber 2 Zehner oder 20 ſind. Hingeſchrieben . . 20
Da bleibt auch nichts übrig. Nun habe ich noch die Klaſſe der Einer. 3 in die 3 habe ich 1mal. Alſo . . . 1

Meine Partialquotienten wären alſo 1000 + 600 + 20 + 1, oder zuſammengeſetzt, 1621. Man dividire das Exempel auf die gewöhnliche Art, ſo wird eben das heraus kommen:

```
4863 | 1621
(3)...|
 3...
---------
 18.
 (3).
 18.
---------
   6.
  (3).
   6.
  -----
    3
   (3)
    3
  -----
    0
```

Man ſiehet hieraus auch, daß man vergebliche Mühe anwenden würde, wenn man ſo, als wir in der Erläuterung gezeigt haben, verfahren und anfangen wollte, 3 in die 4000, 3 in die 1800 ꝛc.

Es

Es wird jedes Zahlzeichen im Quotienten ſchon durch die Stelle des Zahlzeichens im Dividendus ſeinem Range gemäß beſtimmet, und wenn man daher auf die gleich anfangs gezeigte Art verfähret, ſo macht man in der That eben die Operation, und jedes Zahlzeichen des Quotienten kömmt gleichfalls an den rechten Ort zu ſtehen, und man bekömmt den Quotienten ſehr richtig.

Wir wollen dieſes noch durch ein Exempel, ſo wie es uns einfällt, erläutern, aber kürzer dabey verfahren. Es ſoll dividiret werden 1280002 durch 9.

Hier haben wir 1 Million zweymalhundert tauſend 80000 und 2.

erſtlich 1000000 durch 9 giebt 111111 und 1 bleibt übrig
zweytens 200000 durch 9 giebt 22222 und 2 bleibt übrig
drittens 80000 durch 9 giebt 8888 und 8 bleibt übrig

Nun iſt in der Klaſſe der Zehntauſendter, der Tauſendter, der Hunderter und der Zehner nichts zu dividiren, aber wohl in der Klaſſe der Einer, da ſind 2, aber obige übergebliebene, nemlich 1 + 2 + 8 machen 11 aus, und dazu noch die 2 in dieſer Klaſſe ſind 13, und 9 in die 13 iſt 1 und 4 bleiben übrig, die können nicht weiter dividiret werden, ſind alſo $\frac{4}{9}$

Alſo alles, was von Partialquotienten, da iſt:

```
 111111
  22222
   8888
      1
———————— addiret
1422224
      —
      9
```

Auf

Auf die gewöhnliche Art dividiret:

```
9) 1280002 | 142222 4/9
   (9).
    9.
   ----
    38
    (9)
    36
   ----
     20
     (9)
     18
   ----
      20
      (9)
      18
   ----
       20
       (9)
       18
   ----
        22
        (9)
        18
   ----
         4
```

§. 104. Dieſer Beweis, den wir gegeben haben, ohngeachtet wir ihn nicht allgemein wegen der Anfänger, ſondern nur durch ein Exempel vorgetragen haben, wird auf alle mögliche Diviſionsexempel paſſen, auch auf ſolche, da der Diviſor aus mehr als einer Zahl beſtehet; und ein jeder wird ihn bey geringer Aufmerkſamkeit anwenden können. Wir bemerken, ehe wir weiter gehen, daß man auch eine Art des Dividirens hat, die man

man über ſich dividiren nennet, ſo wie man die Art, wie wir jetzt gezeigt haben, unter ſich dividiren heißt. Allein wir haben die Art, über ſich zu dividiren, mit Willen nicht gezeiget, weil unſere gezeigte Methode nicht nur viel leichter iſt, ſondern man auch das Exempel weit bequemer nachſehen kann, weil hier alle gebrauchte Zahlen ſtehen bleiben, welches bey der andern Methode nicht ſo leichte angehet. Ueberdem kommen beyde Methoden in der That auf eins heraus, nur daß wegen des Leichtern und Bequemern, unſere vorzuziehen iſt, ob das Exempel ſchon etwas mehr Platz einnimmt; wer nach der andern Art auch zu dividiren lernen will, kannn es ſich von jedem Rechenmeiſter zeigen laſſen, von welchen die mehrſten nach dieſer Methode zu dividiren pflegen.

§. 105. Man muß nicht nur mit einer Zahl im Diviſor dividiren können, ſondern auch mit mehrern. Der Dividendus und der Diviſor werden auf eben die Art unter einander geſetzt, und es gilt auch aus eben den Gründen hier die Regel, daß, wenn die erſte Zahl des Diviſors im Ziffernwerthe größer als die erſte Zahl des Dividendus, ſo ſetzt man den Diviſor um eine Zahl weiter nach der rechten Hand. Ueberhaupt muß man den Diviſor alſo unter den Dividendus ſetzen, daß der Werth oder Summe der über ihn ſtehenden Zahlen des Dividendus entweder eben ſo groß, oder größer, nie aber kleiner ſey. Z. E. wenn man 4650 mit 472 dividiren ſollte, ſo könnte es nicht alſo ſtehen:

4650

4650| ſondern es müſte ſo geſetzt werden: 4650| weil
472 | 472|
die 47 im Diviſor größer iſt, als die 46 im Anfange des Dividendus. 4658 dividirt durch 524, müſte auch aus eben den Gründen alſo ſtehen: 4658|
524|
und 4658 dividiret durch 589, ſtünde daher alſo: 4658| aber 4658 dividiret durch 465, könnte al-
589|
ſo ſtehen: 4658| Auch dieſes könnte geſchehen,
465 |
wenn der Diviſor, oder auch nur die erſte Zahl des Diviſors eine geringere Zahl wäre, wenn ſchon die andern größer wären. Z. E. 4658 durch 399 ſtünde 4658|. Welches alles auf obigen Gründen
399 |
beruhet.

§. 106. Wir wollen nun erſtlich im Diviſor zwey Zahlen nehmen, und durch ein Exempel zeigen, daß man auf eine ſehr ähnliche Art hiebey verfährt, als ob man nur mit einer Zahl dividirte. Man merke hiebey, daß man zwar mit der erſten Zahl anfange zu addiren, daß man doch aber beſtändig einige Rückſicht auf die andern Zahlen des Diviſors nehmen müſſe, wie vielmal ohngefähr man die erſte Zahl des Diviſors in der oder den erſten Zahlen des Dividendus nehmen müſſe, weil doch von den andern Zahlen des Diviſors, bey der nachherigen Multiplikation des Diviſors mit den Quotienten, auch noch Partialprodukte hinzukommen. Exempel und Uebung werden das beſſer lehren

regeln als Regeln. Man dividire 6312 mit 24. Das Exempel ſtünde alſo:

```
6312|263
(24)..|
 48..
 ----
  151.
  (24).
  144.
  ----
    72
   (24)
    72
   ---
     0
```

2 in 6 zweymal, hier nimmt man ſchon Rückſicht auf das Produkt, das durch die nachherige Multiplikation des Diviſors mit dem Quotienten von der 4 entſteht und zum Theil zu dem Produkte der 2 hinzu kömmt. Nähme man 3mal, weil 2 in 6 dreymal ſteckt, ſo würde das nachherige Produkt des Diviſors in den Quotienten, 72 werden, welches mehr als 63 iſt, alſo ſteckte die 24 in der 63 nicht 3mal inne. Alſo zweymal die 2 in den Quotienten. Nun wie bey der Diviſion mit einer Zahl im Diviſor; den Quotienten mit dem Diviſor multipliciret, und das Produkt vom Dividendus abgezogen: alſo 2mal 4 iſt 8, zweymal 2 iſt 4: alſo 48. Der Reſt iſt 15. Man rücke die nächſte Zahl, die 1 herunter, und ſetze den Diviſor wieder hin. 2 in die 15, 6mal, nicht 7mal, weil ſonſt das nachherige Produkt des Diviſors in den Quotienten zu groß wird. Nun wieder den Quotienten mit dem Diviſor multipliciret; das giebt 144,

die vom Dividend abgezogen, läßt zum Reſt 7. Man rücke die 2 nun herunter. 2 in die 7 dreymal: die 3 in den Quotienten, das Produkt des Diviſors in den Quotienten iſt 72, das vom Dividendus abgezogen, geht gegen einander auf, alſo der Quotient iſt 263. Hier iſt kein Reſt geblieben: bliebe aber ein Reſt auch bey der Diviſion, da zwey oder mehr Zahlen im Diviſor ſind, ſo würde er hinten an den Quotienten gehängt, und der Diviſor darunter geſetzet, nach §. 101.

Wir haben dieſes Exempel weitläuftig genug analyſiret. Wir wollen noch einige hinſetzen, die wir blos mit der völligen Rechnung hinſchreiben wollen, weil bey unſrer Art zu dividiren alle gebrauchte Zahlen ſtehen bleiben, ſo kann man daraus auch gleich unſer Verfahren ſehen. Man dividire 565632 mit 72, und 754187 mit 96.

565632 | 7856	7.54187 | 7856 $\frac{11}{96}$
(72)...	(96)...
504...	672...
6.16..	827..
(72)..	(96)..
576..	768..
403.	5.38.
(72).	(96).
360.	480.
432	587
(72)	(96)
432	576
0	11

§. 107. Sind drey Zahlen, oder auch vier, fünf, ſechs und mehrere im Diviſor, ſo verfährt man auf eine ähnliche Art, und wer mit zwey Zahlen im Diviſor gut dividiren kann, wird es auch leicht mit drey und mehrern können. Nur muß man wohl bedenken, daß, jemehr Zahlen im Diviſor ſind, deſto mehr muß man auch Rückſicht darauf nehmen, daß man die Quotienten nicht zu groß nimmt; es thäte zwar freylich keinen weitern Schaden, als daß man doppelte Mühe hätte, denn man fände es gleich durch die Multiplikation des Quotienten mit dem Diviſor. Käme mehr zum Produkt, als der Dividendus groß wäre, ſo hätte man den Quotienten zu groß genommen und müßte alſo die Operation wiederholen, und ihn kleiner nehmen. Wenn man den Quotienten zu klein genommen hat, das wird man auch bald finden,

wenn man das Produkt des Quotienten in den Diviſor vom Dividendus, (wie bey jeder Operation geſchiehet), abziehet. Bleibt mehr zum Reſt, als der Diviſor groß iſt, ſo ſteckt der Diviſor noch darin, man hat alſo den Quotienten zu klein genommen, und muß ihn größer nehmen. Nach allen dieſen Vorausſetzungen werde ich nur nöthig haben, noch einige Exempel, da der Diviſor aus 3 oder mehrern Zahlen beſteht, völlig berechnet hinzuſchreiben, daraus ein jeder das Verfahren leicht bemerken wird, weil alle gebrauchte Zahlen ſtehen bleiben.

Man dividire:

3188124 mit 452

48694326 mit 5783

589432985 mit 58215

725749552 mit 125432

Sie ſtehen alſo:

```
3188124 | 7053 168/452        48694326 | 8420 1466/5783
(452)...|                     (5783)...|
3164...                       46264...
-------                       --------
  2412..                       24303..
 (452)..                       (5783)..
  000..                        23132..
  ------                       -------
  2412.                         11712.
 (452).                         (5783).
  2260.                         11566.
  -----                         ------
   1524                          1466
  (452)                         (5783)
  1356                          ------
  ----                           1466
   168

     589432985 | 10125 6110/58215
    (58215)....|
     58215....
    ----------
       7282...
     (58215)..
    ----------
      72829..
     (58215)..
      58215..
     --------
     146148.
     (58215).
     116430.
     --------
      297185
     (58215)
      291075
     --------
       6110
```

 77::

```
725749557 | 5785
(125432)...
 627160 ...
-----------
 985895 ..
(125432)..
 878074..
-----------
 10787.7.5.
(125432).
 1003456.
-----------
  752597
 (125432)
  752597
-----------
     0
```

§. 108. Man wird leicht auf die Gedanken kommen, daß auch viele Fälle vorkommen werden, wo im Dividendus oder im Diviſor ſich Nullen befinden, davon wollen wir nun jetzt reden.

Wenn im Dividendus Nullen ſind, ſo macht das in der Diviſion weder Verhinderung noch Schwierigkeit. Man rücket ſie eben ſo nachgerade herunter, wie wir bey den Zahlzeichen gethan haben, und dividirt denn wie gewöhnlich. Sind ſo viel Nullen an einander, die man herunter rücket, oder machet auch nur eine Null die zu dividirende Zahl ſo klein, daß man nicht wirklich dividiren kann, ſo ſetzet man in den Quotienten Null, damit man doch die Ordnung der Zahlzeichen im Quotienten in Acht nimmt. Dieſe Regel gilt auf alle Fälle, die Nullen mögen im Dividendus, in der Mitte, oder nur hinten, oder an beyden Orten,

zugleich ſtehen, und die Natur der Sache giebt ſchon den Grund dieſer Regel. Einige Exempel ſollen dieſes erläutern.

Man dividire 4016 durch 4

Alſo 4016 | 1004	und 60060 | 5005
(4)...	durch (12)...
4...	60...
0..	0..
(4)..	(12)..
0..	0..
01.	06.
(4).	(12).
0.	00.
16	60
(4)	(12)
16	60
0	0

Hätte man die Nullen nicht in den Quotienten geſetzt, ſo hätten die Zahlzeichen nicht ihre gehörige Stelle erhalten, wie man leicht ſiehet, wenn man nur das Exempel betrachtet. Die erſte Zahl des Quotienten im zweyten Exempel ſind fünftauſend, das würde dieſes Zahlzeichen nicht bedeuten, wenn nicht zwiſchen der letzten 5 und dieſer die Nullen ſich befänden, es bedeutete, wenn dieſe fehlten, nur 50. Sind hinten am Dividendus Nullen, ſo verfährt man eben ſo, und kann auf die Art gar nicht irren.

Z. E. Man dividire:

```
1728000 | 54000
(32....  |
 160....
---------------
  178...
  (32)...
  178...
---------------
    00..
   (32)..
     0..
---------------
      0.
    (32).
      0.
---------------
       0
     (32)
       0
     ----
       0
```

Ich habe nicht Urſache, der Anfänger wegen, dieſes, ſo wie verſchiedene vorhergehende Exempel, ſo weitläuftig aufzuſchreiben. Man ſiehet leicht bey dieſem Exempel, daß man, wenn man bis zu der 8 im Dividendus gekommen war, nur die letzten drey Nullen an den Quotienten anhangen durfte.

§. 109. Nun ſollen im Diviſior Nullen ſeyn. Sind ſie zwiſchen den Zahlzeichen, ſo ändert das die Diviſion im geringſten nicht. Man dividirt wie gewöhnlich, und multipliciret den Quotienten wie gewöhnlich mit dem Diviſor, wenn es

nöthig

nöthig iſt, da man denn aus der Multiplikations-lehre noch wiſſen wird, wie man Größen multi-pliciret, wenn in einem Faktor Nullen vorkommen.

Z. E. Man dlvidire:

```
25065036 | 5004
 (5009)... |
 25045...
   200..
  (5009)..
   2003.
  (5009).
   20036
  (5009)
   20036
     0
```

Dieſes Exempel iſt ſehr unterrichtend. Hier ſind im Diviſor Nullen, und auch im Dividendus. Wir haben es daher ſo gewählet, damit man ſehen möge, daß man auch wie gewöhnlich verfährt, wenn auch zugleich im Dividendus Nullen wären. Wären die Nullen im Dividendus Zahlen, und keine Nullen geweſen, ſo ſiehet man auch leicht ohne unſer Sagen, wie man hätte verfahren müſſen, nemlich auf die gewöhnliche Art.

§. 110. Sind aber Nullen im Diviſor allein am Ende, oder nebſt denen, die zwiſchen den Zahlen ſind, auch einige oder mehrere am Ende, ſo ſtreicht man gleich im Dividendus von hinten zu, von der rechten Hand, ſo viele Zahlzeichen ab, als Nullen im Diviſor ſind, welche abgeſtrichene

Zahlen man dem Quotienten als einen Reſt anhänget, und den Diviſor darunter ſetze. Z. E. 482431 durch 300. Da ſtreiche man gleich die hinterſte 31 ab, welche der Reſt wird, und ſetze alſo das Exempel 4824|31| und dividiret nur noch
3 |100|
4824 durch 3. Der Quotient würde ſeyn, nebſt den Reſte = $1608\frac{31}{300}$ Man dividire einmal auf die gewöhnliche Art, ſo wird man finden, daß dieſer Quotient heraus kömmt.

```
  482431 | 1608 31/300
 (300)...|
  300...
 -------
  1824..
  (300)..
  1800..
 -------
    243.
   (300).
 -------
    2431
   (300)
    2400
 -------
      31
```

Wenn man dieſes Exempel genau betrachtet, ſo wird man ſehen, daß man wirklich nur mit der 3 dividirt hat, und die beyden letzten Zahlen, wie gelehret war, als den Reſt angehängt hat. Und das iſt auch ganz begreiflich, denn, wenn der Quotient in 0 multiplicirt wurde, ſo gab das 0, und nur die

die Multiplikat. des Quotienten mit den Zahlzeichen, gab wieder Zahlzeichen. Wenn man nun ſubtrahirte, ſo kamen, weil o nicht ſubtrahiret, unter die Nullen die Zahlzeichen des Dividendus unverändert zu ſtehen und alſo müſſen ſie auch endlich mit zum Reſte bleiben. Ich ſage mit zum Reſte bleiben, weil es kommen kann, daß durch die Diviſion mit den andern Zahlen auch noch ein Reſt kömmt, welcher denn zu dieſen mit geſetzt wird.

Z. E. 345683 durch 45000

Das iſt alſo 345 durch 45, und die 683 in den Reſt. Wenn wir nun wirklich dividiren,

```
  345 683 |7
  (45 |000)|
  315
 ___________
  30 683
```

ſo bleibt noch 30 im Reſt, die ſetzet man vorne linker Hand an die 683 an, und der Quotient würde alſo ſeyn $= 7\frac{30683}{45000}$. Wenn man auf die gewöhnliche Art dividiret, wird man dieſes eben ſo finden. Denn 345683 $7\frac{30683}{45000}$

```
   durch (45000)|
          315000
 _______________
          30683
```

Sind am Ende des Dividendus auch Nullen, ſo ſiehet man leicht ein, daß man dieſe zwar abſtreichen muß gegen eben ſo viel Nullen des Diviſors, daß ſie aber nicht in den Reſt kommen können, es müſte denn ſeyn, daß auch ſonſt noch ein

Reſt von der Diviſion mit den übrigen Zahlen überbliebe, dem ſie denn freylich jetzt der Ordnung halber mit angehängt werden, ob es ſchon eigentlich nicht nöthig iſt, welches aber hier zu zeigen noch zu früh wäre: in der Lehre von den Brüchen wird ſich das erläutern. Von beyden ein Exempel. 50480000 durch 4000. Alſo drey Nullen vom Dividendus abgeſtrichen, und alsdenn 50480 durch 4.

```
50480|000| 12620
(4)...|000|
 4....
 10...
 (4)..
  8..
  24..
  (4)..
  24..
   8.
  (4).
   8.
    0
   (4)
    0
    0
```

Hier kommen die abgeſtrichenen Nullen nicht mit in den Reſt, weil durch die Diviſion mit der 4 kein Reſt überbleibt, ſondern alles aufgieng, und der Quotient iſt 12620. Allein bey folgendem Exem-

pel, da man 4583260000 durch 324000 dividi-ren ſoll, werden ſie dem Reſt mit angehängt wer-den müſſen, und zwar der Ordnung halber, um den Anfänger nicht zu verwirren. Denn ſonſt iſt $\frac{280}{324}$ oder $\frac{280000}{324000}$ einerley, wie die Lehre von Brüchen zeigen wird, wovon wir aber jetzt noch nichts ſagen können.

```
4583260000 durch 324000
    Alſo 4583260 000 | 14145 280000/324000
         (324) . . . . |000|
          324 . . . .
          1343 . . .
          (324) . . .
          1296 . . .
            472 . .
           (324) . .
            324 . .
            1486 .
            (324) .
            1296 .
             1900
             (324)
             1620
              280|000
```

§. 111. Die leichteſte Diviſion iſt, wenn der Diviſor 1 iſt, oder vielmehr das iſt gar keine Di-viſion: denn 1 dividirt nicht. Es wird dieſes leicht begreiflich ſeyn, daß, wenn man unterſuchet, wie

wie vielmal 1 in einem Dividendus enthalten iſt, es nothwendig folget, daß er in allen möglichen Dividendis ſo vielmal erhalten ſey, ſo groß ſie ſind, und daß alſo der Quotient vom Dividendus gar nicht verſchieden ſeyn kann. So iſt z. E. $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{12}{1} = 12$, $\frac{54326}{1} = 54326$. Und ſo auf alle Fälle.

§. 112. Weil 1 gar nicht dividiret, ſo giebt uns das eine große Bequemlichkeit, wenn wir eine Zahl durch 1, woran Nullen gehängt ſind, als etwa durch 10, oder 100, oder 1000 u. ſ. w. dividiren ſollen. Man ſtreicht alsdenn nur ſo viel Zahlen hinten vom Dividendus ab, als Nullen im Diviſor ſind, und hängt die abgeſtrichenen Zahlen hinten als Reſt an den Quotienten, mit dem ganzen Diviſor darunter. Wären die abgeſtrichenen Zahlen Nullen, ſo iſt nichts an den Quotienten zu hänzen, weil von den übrigen kein Reſt bleibet, indem 1 nicht dividiret.

Z. E. 54832 durch 10.

~~5483~~|2|5483 $\frac{2}{10}$
~~1111~~|0|

ferner: ~~6584~~|368|6584 $\frac{368}{1000}$
durch 1000 ~~1111~~|000|

aber ~~78532~~.00|78532
durch 100 ~~11111~~|00|

und ~~64382~~|600|64382 $\frac{600}{1000}$
durch 1000 ~~11111~~|000|

§. 113.

§. 113. Wenn der Dividendus und der Diviſor gleich groß ſind, oder wenn eine Zahl durch eben dieſelbe Zahl dividiret wird, ſo iſt der Quotient 1. Es iſt nemlich ſehr begreiflich, daß eine und eben dieſelbe Zahl in einer und eben derſelben Zahl nur einmal enthalten ſeyn kann. So wird z. E. $\frac{5}{5} = 1$. $\frac{484}{484} = 1$ u. ſ. w.

Ja dieſes geht auch ſo weit, daß auch Null dividiret durch Null oder $\frac{0}{0} = 1$ iſt, denn nichts iſt in nichts nur einmal enthalten, wenn ich mich ſo ausdrücken darf. Von einer jeden andern wirklichen Größe durch Null dividiret, wird der Quotient unendlich groß, welches durch folgendes Zeichen ∞ angezeiget wird. Doch hievon werden wir an ſeinem Ort weitläuftiger reden.

Wir verſparen noch verſchiedene andere allgemeine Lehren über die Diviſion bis an den Schluß dieſes Kapitels, da wir ſie der Buchſtabendiviſion mit anhängen werden, weil ſie völlig allgemein ſind.

§. 114. Nachdem wir das Nöthigſte von der Diviſion mit Zahlen geſagt haben, wollen wir auch die Probe der Diviſion, die allezeit zeiget, ob man recht verfahren hat, beyfügen. Gleich im Anfange dieſer Lehre, im §. 97. zeigten wir auf eine ſehr leichte Art, daß der Quotient einer Größe anzeige, wie vielmal der Diviſor im Dividendus ſtecke. Z. E. ich hätte 20 mit 4 dividiret, ſo zeigte mir der Quotient, welches 5 wäre, an, daß die 4 in der 20 fünfmal enthalten ſey. In der mathematiſchen Sprache drückt man ſich hierüber alſo aus. **Der Diviſor iſt ſo vielmal im Dividen-**

videndus enthalten, als die Einheit im Quotienten. Oder die Einheit iſt ſo vielmal im Quotienten enthalten, als der Diviſor im Dividendus. Alſo auf dieſes Exempel appliciret. So vielmal die 1 in 5 in dem Quotienten enthalten iſt, ſo vielmal iſt der Diviſor oder hier die 4 in zwanzigen im Dividendus enthalten. Hier iſt die 1 in 5 fünfmal enthalten, alſo muß auch die 4 in 20 fünfmal ſtecken. Dieſe Regeln ſind im höchſten Grade allgemein, das iſt, ſie gelten für alle Fälle, der Diviſor, Dividendus und Quotient mögen beſchaffen ſeyn, wie ſie wollen. Aber aus dieſen Regeln folgt auch die Probe der Diviſion. Denn iſt der Diviſor ſo vielmal im Dividendus enthalten, als der Quotient die Einheit in ſich enthält, oder als er groß iſt; ſo darf man ja nur den Diviſor ſo vielmal nehmen, oder mit einer ſo großen Zahl, als der Quotient iſt, das iſt mit dem Quotienten ſelbſt multipliciren, ſo muß der Dividendus zum Produkte kommen. Iſt 4 in 20 fünfmal enthalten, oder es iſt 5 der Quotient von $\frac{20}{4}$, ſo darf ich nur dieſe 4 fünfmal nehmen, das iſt mit dem Quotienten multipliciren, ſo muß der Dividendus zum Produkt kommen. Alſo die Generalregel für die Probe der Diviſion iſt: **Man multiplicire den Diviſor und Quotienten mit einander, iſt das Produkt genau der Dividendus, ſo iſt das Diviſionsexempel recht gerechnet.** Hiebey iſt wohl zu verſtehen, daß der Diviſor im Dividendus genau aufgegangen, oder kein Reſt geblieben iſt. Iſt aber ein Reſt geblieben, ſo multipliciret man gleichfalls den gefundenen

denen Quotienten mit dem Diviſor, man addirt aber zu dieſem Produkte den Reſt, ſo muß gleichfalls der ganze Dividendus, wenn man recht gerechnet hat, herauskommen. Wir wollen von beyden Fällen Exempel geben.

```
Man dividire:  2299428 | 5436
                (423)...|
                2115...
                 1844..
                 (423)..
                 1692..
                  1522.
                  (423).
                  1269.
                   2538
                   (423)
                   2538
                     0
```

Hier geht der Diviſor im Dividendo ganz auf. Wenn man nun den gefundenen Quotienten mit dem Diviſor multipliciret, ſo muß der Dividendus zum Produkte kommen.

```
Alſo   5436
        423
      16308
     10872
    21744
    2299428
```

und das Exempel iſt richtig.

Man dividire ferner: 185643 | 677
(274)..
1644..
2.12.4.
(274).
1918.
2.068.3
(274)
1918
145

Hier bleibt 145 zum Reſte. Man multiplicire nun den Quotienten mit dem Diviſor, und addire den Reſt dazu, ſo kömmt der Dividendus heraus, und das Exempel iſt recht gerechnet.

Alſo	677
	274
	2708
	4739
	1354
dazu der	185498
Reſt addirt	145
	185643 = dem Dividendus.

§. 115. Wir verſprachen in der Lehre von der Multiplikation §. 77. die Probe der Multiplikation zu lehren, wenn wir die Diviſion gezeigt hät-

hätten. Wir ſind nun im Stande, was die Zahlen anbetrift, unſer Verſprechen zu erfüllen. Wir finden bey der Multiplikation, daß bey einem Produkte zweyer Faktoren der eine Faktor ſo oft in dem Produkte ſich befinden muß, als in dem andern Faktor die Einheit oder 1 enthalten iſt. Z. E. 7. 8 = 56, da muß die 8 ſo vielmal in 56 enthalten ſeyn, als 1 in der 7 iſt, das iſt 7mal. Denn weil man 8 ſiebenmal nahm, entſtand 56. Gleichfalls muß auch die 7 ſo vielmal in 56 enthalten ſeyn, als die 1 in der 8. Folglich, wenn ich nun das Produkt durch einen Faktor dividire, muß der andere heraus kommen. Weil alſo z. E. die 7 in 56 achtmal enthalten iſt, ſo muß nothwendig 7 heraus kommen, wenn ich 56 durch 8 dividire, und das läßt ſich auf alle mögliche Zahlen anwenden. Die Regel alſo für die Probe der Multiplikation iſt: man dividiret das Produkt durch einen der Faktoren, kömmt zum Quotienten der andere Faktor heraus, ſo iſt das Exempel recht gerechnet. Z. E.

$$5436 . 423 = 2299428.$$

Man dividire, mit welchem Faktor man wolle, ſo muß der andre Faktor zum Quotienten kommen, wenn das Exempel richtig multipliciret iſt. Wir wollen einmal mit 5436 dividiren:

```
2299428 | 423
(5436). . |
 1744. .
 125.02.
 (5436).
 10872.
  16308
  (5436)
  16308
    0
```

§. 116. Wir unterlaſſen noch, Diviſionsexempel zur Uebung hinzuſetzen, wie wir beym Addiren, Subtrahiren und Multipliciren gethan haben. Wir haben bey den verſchiedenen Fällen genug angeführet, und verlanget jemand mehrere, ſo zeigt ſie ihm jedes Rechenbuch, hier würden ſie nur den Raum weggnehmen.

§. 117. Wir fangen nun die Diviſion mit Buchſtaben an. Wir haben ſchon geſagt, daß das Zeichen der Diviſion entweder ein Querſtrich zwiſchen zwey Größen, oder zwey gerade unter einander ſtehende Punkte ſey, §. 99. und das gilt auch hier bey der Buchſtabendiviſion. Man zeiget oft die Buchſtabendiviſion nur an, und das geſchieht, wenn ſich die Größen, die durch Buchſtaben ausgedrückt ſind, nicht wirklich dividiren laſſen, (wanneher dieſes nicht geſchehen kann, werden wir weiter unten ſehen) oft dividiret man auch wirklich.

§. 118.

§. 118. Das wiſſen wir ſchon, wie man die Diviſion nur anzeiget. a dividirt durch b ſteht alſo: $\frac{a}{b}$ oder a:b, und ab + cx dividirt durch m + n ſtehet $\frac{ab + cx}{m + n}$ oder (ab + cx):(m + n) da man, um alle Irrung zu vermeiden, den Dividendus und Diviſor in Klammern einſchließet. Es iſt aber auch das wirkliche Dividiren gar nicht ſchwer. Wir erinnern uns, daß durch die Multiplikation die Buchſtaben blos an einander geſetzt wurden. Da nun das Dividiren eine der Multiplikation entgegengeſetzte Handlung iſt, ſo werden in der Diviſion die Buchſtaben nur von einander wieder getrennet.

Wenn man a mit b multipliciren, oder a bmal nehmen ſollte, ſo war das = ab. Soll man nun das Entgegengeſetzte thun, oder ab nun bmal geringer machen, ſo darf ich nur b wieder wegnehmen. Das geſchieht aber in der Diviſion alſo, ab dividiret durch b, würde zum Quotienten a laſſen. Vielleicht begreift man dieſes deutlicher, wenn wir einmal a und b beſtimmte Werthe geben. Es ſey a = 2 und b = 3. ſo würde ab = 2 × 3, oder die 2 wäre dreymal genommen. Sollte ich nun dieſe Größe durch 3 dividiren, ſo darf ich ja nur die 3 davon trennen, und 2 alleine laſſen, denn dadurch wird ja 2 × 3 um dreymal geringer. Nun bleibt 2 übrig, welches wir durch a angedeutet haben. Alſo ſiehet man leicht ein, daß man auf dieſe Art verfahren müſſe, und daher $\frac{ab}{b}$ = a iſt.

Gleichfalls würde aus eben dem Grunde $\frac{ab}{a} = b$ ſeyn. Aus eben dem Grunde wäre $\frac{aacb}{aa} = cb$.

§. 119. Man wird nun leicht auf die Gedanken kommen, daß die wirkliche Diviſion, die in der Trennung der Buchſtaben beſtehet, nicht angehet, wenn nicht im Diviſor und Dividendus eine oder einige gleiche Größen ſich befinden, das iſt wirklich ſehr richtig, und wird ſich in der Folge beſtätigen. Allein ehe wir wirklich die Diviſion weitläuftiger vortragen, müſſen wir erſt von den verſchiedenen Zeichen plus oder minus reden, womit die Größen bezeichnet ſind, die man mit einander dividiren will. Man wird ſich hier erinnern, daß dieſes bey der Multiplikation einen großen Einfluß auf die Zeichen des Produkts hatte, und das iſt bey der Diviſion gleichfalls, und wir können unſern Leſern ſchon vorausſagen, auch nach eben den Regeln, als bey der Multiplikation. Sie werden dieſes auch leicht einſehen, wenn ſie bedenken, daß die Diviſion nur die Buchſtaben trennet, welche die Multiplikation zuſammen ſetzet. Doch wir wollen Schritt vor Schritt gehen.

§. 120. Es können 1) ſowol im Dividendus als Diviſor beyde Größen plus zum Zeichen haben; 2) oder der Dividendus iſt ein Plus- und der Diviſor eine Minusgröße; 3) oder umgekehrt, der Dividendus hat minus zum Zeichen,

und

und der Diviſor plus; 4) oder beyde haben minus zum Zeichen. Mehr Fälle ſind nicht möglich, alle dieſe Fälle aber haben auf das Zeichen des Quotienten den Einfluß, daß es entweder plus oder minus wird.

§. 121. Wenn das Zeichen des Dividendus ſowol als des Diviſors, alſo beyder plus iſt, (+) ſo hat der Quotient auch plus zum Zeichen, man dividire nun Buchſtaben oder Zahlen. + bc dividirt durch + c giebt zum Quotienten + b, und + 32 dividirt durch + 4, giebt zum Quotienten + 8. Es iſt dieſes auch ganz begreiflich. Man ſoll beym Dividiren unterſuchen, wie vielmal der Diviſor im Dividend enthalten ſey; iſt alſo der Dividendus eine poſitive Größe, ſo muß ja, wenn der Diviſor gleichfalls poſitiv iſt; dieſer auch poſitiv mal ſich darin befinden.

§. 122. Der Dividendus ſey eine Plusgröße, und der Diviſor eine Minusgröße. Nun wird der Quotient das Minuszeichen bekommen müſſen, + bc dividiret durch − c, giebt zum Quotienten − b. In Zahlen gilt dieſes gleichfalls. + 32 dividirt durch − 4, giebt zum Quotienten − 8. Die Urſache davon liegt in dem Begrif der Diviſion. Der Diviſor iſt bey dieſem Falle nicht ſelbſt in dem Dividendus einigemal mit dem Zeichen des Dividendus enthalten, ſondern mit dem entgegengeſetzten Zeichen. Denn es ſoll ja der Diviſor ſo vielmal von dem Dividendus genommen werden, als es angehen will. Nun iſt − 4 in

 plus

plus 32 eigentlich gar nicht, aber in einer entgegengeſetzten Größe, die eben ſo groß wäre, einigemal enthalten, alſo muß ja auch der Quotient eine Minusgröße ſeyn, weil der anzeigt, wie vielmal der Diviſor im Dividend enthalten ſey. Wir haben hier Deutlichkeits halber ein Zahlenexempel genommen.

§. 123. Eben ſo, wenn der Dividendus eine **Minus**, und der Diviſor eine **Plusgröße** iſt, wird auch der Quotient **minus** zum Zeichen haben müſſen. $-bc$ dividirt durch $+c$, giebt zum Quotienten $-b$, und -32 dividirt durch $+4$, giebt zum Quotienten -8. Aus der Urſache, weil der Diviſor nicht mit ſeinem Zeichen einigemal in dem Dividendus ſtecket, ſondern mit dem entgegengeſetzten.

§. 124. Hingegen haben ſowol der Dividendus als der Diviſor das **Minuszeichen**, ſo wird der Quotient **plus** zum Zeichen bekommen. $-bc$ dividirt durch $-c$, giebt $+b$, und -32 dividirt durch -4, giebt $+8$ zum Quotienten.

Es ſcheinet dieſes widernatürlich zu ſeyn, allein wenn man es recht überleget, wird man bald einſehen, daß das ſo ſeyn müſſe.

Hier iſt der Diviſor im Dividendus wirklich ein oder etliche mal enthalten, und nicht das Entgegengeſetzte von einem dieſer beyden, der Quotient zeiget nun dieſes an, und das geſchiehet dadurch, daß er mit plus bezeichnet wird.

§. 125. Alle dieſe vier Fälle laſſen ſich auch eben ſo leicht aus der Lehre von der Multiplikation be-

beweiſen. Denn es iſt leicht begreiflich, daß eben die Regeln in Anſehung der Zeichen bey der Diviſion gelten müſſen, die bey der Multiplikation ſtatt fanden, weil die Diviſion das nur trennet, was die Multiplikation zuſammen geſetzet hatte. Auch ſo gar kann das auf Zahlen angewendet werden, weil man ſie doch alle als Größen betrachten kann, die aus der Multiplikation zweyer Zahlen mit einander entſtanden waren, und ſich alſo durch die Diviſion wieder auf eben die Art müſten theilen laſſen, und ließen ſie ſich auch wirklich durch keine Größe, die eine ganze Zahl war, theilen, wie z. E. 13, ſo kann man ſich doch ſolche Zahl vorſtellen, als ob ſie aus 1 multiplicirt mit 13 entſtanden wäre.

§. 126. Auf alle mögliche Fälle gilt alſo in Anſehung der Zeichen eben die Regel, die bey der Multiplikation ſtatt fand. **Einerley Zeichen geben plus, verſchiedene minus.**

Das iſt: ſind der Dividendus und der Diviſor beyde **Plus**- oder beyde **Minusgrößen**, ſo iſt der Quotient **plus**. Haben aber der Dividendus und der Diviſor verſchiedene Zeichen, ſo iſt der Quotient **minus**.

§. 127. Wir fangen nun an, die Diviſion mit Buchſtaben weitläuftiger zu erklären. Der erſte und leichteſte Fall iſt, wenn man eine einfache Größe, (das iſt die nicht aus mehrern als aus einem Gliede beſteht) durch eine andere einfache Größe dividiren ſoll. Man kann alsdenn wirklich dividiren, wenn im Dividendus einige Buchſtaben,

oder alle die Buchſtaben ſtecken, die ſich im Diviſor befinden, oder wenn auch der Dividendus Zahlen als Coefficienten hat, wenn im Diviſor ſich alsdenn auch ſolche Zahlen finden, oder ſolche, wodurch ſich die Zahlen des Dividendus theilen laſſen. Man nimmt dieſe Buchſtaben aus dem Dividendus weg, oder auch die Zahlen, und ſetzet, was überbleibet, mit dem gehörigen Zeichen in den Quotienten. Geht aber dieſes nicht an, ſo wird die Diviſion nur angezeiget. Z. E. es ſoll dividiret werden, $-abc$ durch $+bc$. Hier iſt der Quotient $-a$. Es fällt bc im Dividendus gegen bc im Diviſor weg, alſo a bleibt noch übrig, und nach der Regel: **Einerley Zeichen geben plus, und verſchiedene minus zum Quotienten**, muß der Quotient eine Minusgröße ſeyn, weil die Zeichen des Diviſors und Dividendus verſchieden ſind. Wenn 5bbcx durch $-cx$ dividiret wird, ſo iſt der Quotient $-5bb$.

$-6aabcd$ dividiret durch $-3bd$, giebt zum Quotienten $+2aac$; 12bbcx dividirt durch 4cx, giebt zum Quotienten 3bb: aber 5bbcx dividirt durch 3cx, würde $\frac{5bb}{3}$ zum Quotienten geben, weil nur cx im Dividend gegen cx im Diviſor wegfällt, die 5 aber durch 3 nicht theilbar iſt, alſo blos angezeigt werden kann. Es kömmt auch ſehr oft vor, daß ſich ſolche einfache Größen wirklich nicht dividiren laſſen, und alsdenn werden ſie blos angezeigt. Z. E. 5b dividirt durch 3a kann

kann nur angezeigt werden. Es ſtünde alſo: $\frac{5b}{3a}$

§. 128. Wir haben ſchon §. 113. bey der Zahlendiviſion geſagt, daß, wenn der Diviſor ſo groß als der Dividendus wäre, alsdenn der Quotient = 1 ſeyn müſſe, das gilt auch, wie leicht zu begreifen iſt, bey Buchſtaben, der Diviſor und Dividend mögen nun beyde blos aus einer einfachen Größe, wie wir jetzt gehabt haben, oder beyde aus zuſammengeſetzten Größen, wie wir nachher erklären werden, beſtehen. Das hebt aber doch die Wirkung der Zeichen in einander nicht auf, ſondern es bleibt bey der Regel: einerley Zeichen geben plus, verſchiedene minus: Z. E. $\frac{+a}{-a}$ giebt zum Quotienten -1; $\frac{-5cdx}{-5cdx} = +1$ u. ſ. w. eben das gilt auch in Zahlen $\frac{16}{-16} = -1$ und $\frac{-16}{-16} = +1$.

Gleichfalls haben wir auch §. 111. in Zahlen geſehen, daß 1 gar nicht dividiret, und die Größe ganz ungeändert läßt. Man würde ohne unſer Erinnern bemerken, daß das auch bey der Buchſtabendiviſion gilt, nur müſſen wir erinnern, daß, wenn 1 der Diviſor iſt, ſein Zeichen doch den gewöhnlichen Einfluß auf das Zeichen des Quotienten hat, und es nach der ſchon einigemal an-

angeführten Regel geht. Z. E. $\frac{5aab}{-1}$ würde zum Quotienten geben $-5aab$, und $\frac{-5ac}{-1}$ gäbe zum Quotienten $+5ac$. Gleichfalls $\frac{-a}{-1}$ gäbe $+a$ u. ſ. w. Eben das Geſetz gilt auch in Zahlen, auch wenn der Dividendus aus zuſammengeſetzten Größen beſtünde, welches wir hier auch mit zum voraus erinnern wollen.

§. 129. Wir wollen nun zu ſchwerern Diviſionsexempeln ſchreiten. Der Dividendus ſoll aus zuſammengeſetzten Größen beſtehen, und der Diviſor aus einer einfachen. Es ſoll z. E. $4abc - 16cda$ dividirt werden durch $2a$. In ſolchen Exempeln rangiret man, um ſich die Diviſion zu erleichtern, die Glieder des Dividendus nach den Buchſtaben des Diviſors, wenn es nöthig iſt, und ſetzet die Glieder zuerſt, die, wenn der Diviſor aus mehr als einem Buchſtaben beſtehet, die mehreſten Buchſtaben des Diviſors enthalten. Hier wäre es nun nicht nöthig, weil im Diviſor nur ein Buchſtabe ſich befindet. Und dieſes Exempel ſtünde alſo:

$$\begin{array}{rrr|l} & 4abc & -16cda & 2bc - 8dc \\ 2a) & 4abc & & \\ \hline & & -16cda & \\ & & -16cda & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

Man

Man fange an, und dividire jedes einzelne Glied, denn die Aufgabe ſagte mir, ich ſollte die ganze zuſammengeſetzte Größe durch 2a dividiren, und das thue ich auch wirklich, wenn ich jedes Glied davon durch 2a dividire. 2a in 4abc habe ich 2bcmal; hingeſetzt zum Quotienten. Denn 2 ſteckte in 4 zweymal, und a im Dividendus und Diviſor hoben ſich einander auf. Und zwar muß das Zeichen + ſeyn, welches dieſes Glied des Quotienten bekömmt. Nun multipliciret man den Quotienten mit dem Diviſor, wie bey der Zahlendiviſion. 2a mit 2bc giebt 4abc, hingeſetzt unter den Dividend. Abgezogen: 4abc von 4abc geht auf. Man rücke nun das folgende Glied herunter, und dividiret weiter. 2a in − 16cda giebt − 8cd Denn diverſe Zeichen geben − zum Quotienten; und 2 war in 16 achtmal enthalten, und das a im Diviſor und Dividendus hoben ſich: hingeſetzt in den Quotienten. Nun den Quotienten mit dem Diviſor multipliciret; da man auch auf die Zeichen Rückſicht nehmen muß, wie aus der Multiplikation noch bekannt ſeyn wird. + 2a mit − 8dc giebt − 16adc: dieſes unter den Dividend geſetzt, und ſubtrahiret; ſo gehet beydes gegen einander auf.

Alſo $\frac{4abc - 16cda}{2a}$ giebt zum Quotienten abc − 8dc.

Anmerkung. Wir können nicht unterlaſſen, beyläufig, wenn es Gelegenheit giebt, anzumerken, wie man eine Größe verkürzen, und bequemer

quemer ſchreiben kann. Dieſe $2bc - 8dc$ könnte auch geſchrieben werden $(b - 4d)\,2c$. Wir werden noch ein Exempel geben.

Man dividire $-16cdx + 4ccxx - 8cx$ durch $-4cx$: dieſes würde alſo ſtehen:

$$-4cx)\; -16cdx + 4ccxx - 8cx \mid 4d - cx + 2$$
$$-16cdx$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$+4ccxx$$
$$+4ccxx$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$-8cx$$
$$-8cx$$

Ich fange nun an: $-4cx$ in $-16cdx$, macht, (weil einerley Signa plus geben), $+4d$. Multipliciret mit dem Diviſor, und vom Dividendus abgezogen, geht auf. Denn nun giebt die $+4d$ im Quotienten mit $-4cx$ multipliciret die $-16cdx$ wieder.

Nun das zweyte Glied. $-4cx$ in $+4ccxx$, giebt $-cx$. Multipliciret mit dem Diviſor, (weil auch in der Multiplikation gleiche Zeichen plus geben), giebt wieder $+4ccxx$, und geht alſo mit dem Gliede des Dividendus auf. Nun das letzte Glied des Dividendus. $-4cx$ in $-8cx$, giebt $+2$. Wieder mit dem Diviſor multiplicirt, und von dem Gliede des Dividendus abgezogen, geht auf, weil der Subtrahend wieder wie ganz natürlich iſt, eben die Größe wird. Man hätte ein ſolches Diviſionsexempel, wo im Diviſor nur eine einfache Größe iſt, weit leichter ausrechnen können, wenn man es nur hingeſetzt hätte, und die Größen, die im Dividendus gegen die Größen im Diviſor weg-

wegfallen, ausgeſtrichen hätte; weil man aber durchgeſtrichene Buchſtab. nicht allemal, wohl aber durchgeſtrichene Zahlen in Druckereyen antrift; ſo hat man dieſe Buchſtaben, welche durchgeſtrichen werden ſollten, in [ ] eingeſchloſſen.

Z. E. $\dfrac{-16[c]d[x]+4[c]c[x]x-8[c][x]}{-4[c][x]}$

und denn die Zeichen gehörig geſetzet hätte. Dieſes iſt $= 4d - cx + 2$. Allein wir haben die erſtere Methode mit Willen gewählet, weil ſie uns ſchon dazu vorbereitet, wenn zuſammengeſetzte Größen im Diviſor vorkommen.

Noch ein Paar Exempel zur Uebung:

$6a - 8b + 4c$ dividirt durch 2, giebt zum Quotienten $3a - 4b + 2c$.

ferner: $(aaa - 2aab + 3abb) : a = aa - 2ab + 3bb$

ferner: $(4aab - 6aac + 8abc) : 2a = 2ab - 3ac + 4bc$

und $(9aabc - 12abbc + 15abcc) : -3abc = -3a + 4b - 5c$

ferner $24a - 48aa : 24a = 1 - 2a$

noch $25abx + 45abxx - 5ab : 5ab = 5x + 9xx - 1$

und $3axx - 6aax - 18aaxx : 3ax = x - 2a - 6ax$.

§. 130. Wir wollen nun drittens betrachten, wie wir zu verfahren hätten, wenn der Dividendus eine

eine einfache, und der Diviſor eine zuſammengeſetzte Größe wäre. Man ſollte z. E. 1 durch 1 + a dividiren. Man hat wirklich eine Methode, dieſes und ähnliche Arten von Exempeln zu dividiren, aber wir reden jetzt noch nicht davon, und verſparen es in eines der folgenden Kapitel, bey der Lehre von den Brüchen, wozu es ſich beſſer ſchicket. Jetzt zeigen wir ſolche Art von Exempeln blos an, welches auch ſehr oft in der wirklichen Ausübung geſchiehet. 1 dividirt durch 1 + a, ſchriebe man alſo blos

$$\frac{1}{1+a}$$

§. 131. Wir kommen nun viertens auf die Art des Dividirens, wenn im Dividendus ſowol als im Diviſor ſich zuſammengeſetzte Größen befinden. Hier äußern ſich nun freylich manche Schwierigkeiten, und ein Anfänger, und ſehr oft ein Geübter kann nicht allezeit ſogleich beym erſten Blicke ſehen, ob ſich die Größe durch den gegebenen Diviſor dividiren läßt, man muß es alsdenn verſuchen. Geht es nicht, ſo zeigt man blos die Diviſion durch die gewöhnlichen Zeichen an. Jetzt wollen wir aber nur die Fälle betrachten, wo man wirklich dividiren kann. Wir wollen nun hievon Regeln geben, und die nachher durch Exempel erläutern.

§. 132. 1) Man ordne die Glieder des Dividendus ſowol als des Diviſors nach einem am häufigſten in ihnen vorkommenden Buchſtaben; und zwar die größten Potenzen davon voran. Z.

E.

E. es wäre der Dividendus bbbb + 4abbb + 4aaab + 6aabb + aaaa und der Diviſor wäre bb + aa + 2ab; ſo ſiehet man gleich, der am häufigſten vorkommende Buchſtabe iſt a; dieſen ordne man ſowol im Diviſor als Dividendus, nach ſeinen Potenzen. Und man würde alſo nun den Dividendus alſo ſchreiben müſſen: aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb, und den Diviſor aa + 2ab + bb.

2) Man dividire nun des Dividendus erſtes Glied durch das erſte Glied des Diviſors. Es iſt begreiflich, daß man auf die Art einen Theil des Quotienten findet. Man vergeſſe aber nicht, dem Quotienten das gehörige Zeichen zu geben, nach der Regel, die wir ſchon ſo oft geſagt haben.

3) Nun hätten wir auf die Art einen Theil des Quotienten. Um nun zu wiſſen, was noch vom Dividendus überbleibet, muß man den gefundenen Theil des Quotienten mit allen Gliedern des Diviſors multipliciren und was heraus kömmt, wenn es unter den Dividendus geſetzt iſt, nach den gelehrten Subtraktionsregeln abziehen, und unter den gemachten Strich ſetzen. Der Reſt giebt mir wieder ganz natürlich das Dividendum, deſſen nunmehriges erſtes Glied man wieder durch das erſte Glied des Diviſors dividirt; das giebt wieder das zweyte Glied des Quotienten, und nun verfahre man wieder wie vorhin, bis endlich alles aufgeht, welches geſchieht, wenn der Diviſor im Dividendus völlig ein oder etliche mal enthalten iſt.

4) Wenn es ſich zuträgt, wie es denn oft geſchieht, daß, wenn man einen Theil oder ein Glied des Quotienten mit allen Gliedern des Diviſors nach der vorherigen dritten Regel multipliciret hat, und nun vom Dividendus abziehen will; wenn es ſich zuträgt, daß man alsdenn alle Glieder dieſes Produkts nicht von allen Gliedern des Dividendus abziehen kann, weil welche davon nicht gleichartig damit ſind, ſo ſetzet man dieſe, nichtgleichartige Glieder des Subtrahenten mit veränderten Zeichen zum neuen Dividendus herunter, indem es alsdenn eben ſo gut iſt, als wenn ſie davon abgezogen wären, wie wir denn hievon ſchon in der Lehre von der Subtraktion gehandelt haben. §. 57.

5) Gehet nach genugſam wiederholter Diviſion nicht alles gegen einander auf, ſo ſetzet man den Reſt mit zum Quotienten, und unter denſelben den Diviſor, eben wie wir es bey Zahlen §. 101 machten. Es wird dadurch angezeiget, daß dieſer Reſt noch hätte ſollen dividiret werden. Z. E. der Reſt wäre 3bc und der Diviſor wäre a − b, ſo würde man das alſo an den Quotienten mit dem gehörigen Zeichen anhängen. $\frac{3bc}{a-b}$

Daß ein ſolches Glied ein **Bruch** heiße, werden wir einſehen, wenn wir die Lehre von den Brüchen vorgetragen haben.

§. 133. Nun wollen wir dieſe Regeln durch Exempel erläutern. Man dividire aa + 2ab + bb durch a + b. Es ſteht alſo:

(a + b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa + 2ab + bb \mid a + b \\
(a+b) & aa + ab \\
\hline
 & + ab + bb \\
 & + ab + bb
\end{array}
$$

+ a in die + aa, habe ich amal (vorhergehende §. Regel 2.) in den Quotienten geſetzt. + a mit + a giebt + aa, (Regel 3) und + a mit + b im Diviſor, giebt + ab, (Regel 3) unter den Dividendus geſetzt. Nun abgezogen: + ab von + 2ab läßt + ab; + aa von + aa geht auf. Nun verfahre ich weiter nach dem Schluß der dritten Regel. Man rücke die bb mit ihrem Zeichen herunter, und fahre fort, wieder mit dem erſten Gliede des Diviſors zu divi ren, + a in + ab habe ich + bmal in den Quotienten geſetzt. Nun multipliciret dieſes 2te Glied des Quotienten mit dem Diviſor, + b mit + a giebt + ab hingeſetzt unten den Dividendus. Ferner: + b mit + b giebt + bb, auch hingeſetzt. Wenn man nun ſubtrahiret, ſo geht alles gegen einander auf, und das Exempel iſt dividiret, ſein Quotient iſt a + b, oder + b iſt in aa + 2ab + bb enthalten a + bmal.

§. 134. Es ſoll dividiret werden $a^2 - 2ad - b^2 + d^2$ durch a − b − d. Es ſteht alſo:

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa - 2ad - bb + dd \mid a - d + b \\
a - b - d & aa - ad - ab \\
\hline
 & - ad + ab - bb + dd \\
 & - ad + bd \quad + dd \\
\hline
 & + ab - bd - bb \\
 & + ab - bd - bb
\end{array}
$$

 +

+ a in die + aa hat man + amal, in den Quotienten geſetzet (2te Reg l). + a multipliciret mit + a, giebt + aa; + a multipliciret mit − b giebt − ab, und + a mit − d, giebt − ad (3te Regel). Alles dieſes unter den Dividendus geſetzet, gleichnamicht unter gleichnamicht, und iſt eins darunter, das nicht gleichnamicht iſt, wie hier − ab, ſo ſetzet man dies Glied neben die andern, und nach der 4ten Regel es nachher mit verkehrten Zeichen zum neuen Dividendus. Wir wollen nun abziehen: (2te Regel) + aa von + aa geht auf; − ad von − 2ad läßt − ad, und − ab, weil nichts iſt, davon es abgezogen wird, kömmt mit verwechſelten Zeichen herunter. Man ſetze nun auch die übrigen Glieder des Dividendus mit den ihnen zugehörigen Zeichen herunter. Man fängt wieder an mit dem erſten Gliede des Diviſors ins erſte Glied des neuen Dividendus, + a in − ad, giebt − d: in den Quotienten geſetzt. Nun mit allen Gliedern des Diviſors dieſes − d multipliciret, und das Produkt unter die zugehörigen gleichartigen Glieder geſetzt. + a mit − d giebt − ad; − d mit − b giebt + bd; − d mit − d giebt + dd, abgezogen, − ad von − ad geht auf. + bd mit verkehrtem Zeichen herunter, (4te Regel) + ab aber mit ſeinem eignen, und weil a das erſte Glied im Diviſor iſt, voran; − bb mit ſeinem Zeichen herunter; + dd von + dd gehet auf. Nun wieder mit dem erſten Gliede dividiret. + a in + ab giebt + b; in den Quotienten. + b mit + a multipliciret, giebt + ab; + b mit − b giebt − bb; + b mit − d giebt − bd, dieſes gehörig

unter

unter den Dividendus geſetzt, und von ihm abgezogen, ſo geht hier alles auf. Der Quotient iſt alſo a — d + b.

Wir wollen bey dieſem Exempel noch etwas ſtehen bleiben. Es kommen in dieſem Exempel, ſowol im Dividendus als Diviſor, die drey Buchſtaben vor, a, b und d. Wir haben ſchon oft geſagt, daß dadurch alle mögliche Größen können verſtanden werden, nur freylich, daß bey einer ganzen Rechnungsoperation jeder Buchſtabe ſeine Bedeutung immer behält.

Wir haben nun bey dieſem Exempel gefunden, daß $\frac{aa - 2ad - bb + dd}{a - b - d}$ zum Quotienten gab a — d + b.

Dieſes iſt nun im höchſten Grade der Allgemeinheit wahr, die Größen mögen bedeuten, was ſie wollen, und das gilt bey allen Buchſtabenrechnungen; das Reſultat der Rechnung iſt allezeit in der höchſten Allgemeinheit wahr.

Wir wollen nun mal dieſes Exempel durch Zahlen beſtimmen. Es ſey a = 2: b = 3; d = 4, ſo wäre der Dividendus, wenn für die Buchſtaben die Zahlen geſetzt werden, 2. 2 — 2. 2. 4 — 3. 3 + 4. 4, dieſe einzelne Größen multiplicirt, = 4 — 16 — 9 + 16, und nun dies durch die Addition zu einer Größe gebracht = — 5.

Der Diviſor wäre, wenn anſtatt der Buchſtaben die Zahlen geſetzt würden, $2 - 3 - 4$, das addirt, wäre -5, alſo ſollte hier -5 durch -5 dividirt werden, das gäbe zum Quotienten $+1$, und das und nicht mehr müſſen die Buchſtaben im Quotienten anzeigen. Sie waren $a - d + b$, in die beſtimmten Zahlen geſetzt, $2 - 4 + 3$, das zuſammen addirt, giebt auch $+1$. Man mochte nun den Buchſtaben eine Bedeutung geben, welche man wollte, ſo ſieht man leicht ein, daß nach ihrer Beſtimmung allezeit die Buchſtaben des Quotienten den wahren Werth des Quotienten anzeigen müſſen. Anfänger möchten auch hier, wie wir ſchon einigemal angeführt haben, ſagen, daß dieſes weitläuftiger ſey, als wenn man dieſes Exempel in Zahlen dividiret hätte. Das iſt auf dieſen Fall wahr, auch iſt es wahr, daß mannichmal die Buchſtabenrechnung weitläuftiger iſt, als die Zahlenrechnung, mannichmal iſt ſie aber auch ungleich kürzer, weil man nicht zu multipliciren nöthig hat, und auch wegen andrer Urſachen, allein beym Zahlenrechnen löſet man nur immer einen einzelnen Fall auf, bey der Buchſtabenrechnung aber die Aufgabe oder das Exempel in der größten Allgemeinheit, welche auf alle mögliche Fälle von ſolcher Art eintrift und Regeln giebt. Wir werden den Nutzen davon noch mehr ſehen, je weiter wir kommen werden.

§. 135. Vermuthlich wird ein aufmerkſamer Leſer aus dieſen beyden weitläuftig ausgeführten Exem-

Exempeln ſehen, wie man es anzufangen hat, wenn man mit zuſammengeſetzten Größen im Dividendus und Diviſor dividiren will. Wir wollen noch einige Exempel mit der ganzen Operation zum Nachſehen hinſetzen; wer die Regeln der Subtraktion und Multiplikation, und die §. 132 angeführte der Diviſion weiß, wird das ganze Verfahren, und warum wir ſo verfahren, leicht bemerken.

Dividendus $15aa - 10ab + 9ad - 6bd \mid 3a - 2b$

Diviſ. $(5a + 3d)$ $\quad 15aa \quad\quad + 9ad$

$\quad\quad\quad\quad - 10ab \quad\quad - 6bd$

$\quad\quad\quad\quad - 10ab \quad\quad - 6bd$

Dividendus:	$15aac - 30ab + 116ac - 3acb - 40a + 6bb - 64b - 16bc + 192c - 96$			$3ac - 6b + 16c - 8$
Diviſor $5a - b + 12)$	$15aac \quad + 36ac - 3acb$			
	$-30ab + 80ac \quad - 40a + 6bb - 64b - 16bc + 192c - 96$			
	$-30ab \quad + 6bb - 72b$			
	$+80ac \quad - 40a \quad + 8b - 16bc + 192c - 96$			
	$+80ac \quad - 16bc + 192c$			
	$-40a \quad + 8b \quad - 96$			
	$-40a \quad + 8b \quad - 96$			
	$0 \quad 0 \quad 0$			

Divi.

Dividendus	$xxx + 5cxx - 5xx + 9x - 23ccx + 15cx + 8ccc - 5cc + 72c - 45$	$xx - 3cx$
Diviſor $x + 8c - 5)$	$xxx + 8cxx - 5xx$	$+ 9 + cc$
	$- 3cxx + 9x - 23ccx + 15cx + 8ccc - 5cc + 72c - 45$	
	$- 3cxx - 24ccx + 15cx$	
	$+ 9x + ccx + 8ccc - 5cc + 72c - 45$	
	$+ 9x + 72c - 45$	
	$+ ccx + 8ccc - 5cc$	
	$+ ccx + 8ccc - 5cc$	
	$0 \quad 0 \quad 0$	

man könnte den letzten Quotienten beſſer alſo ſetzen: $xx - 3cx + cc + 9$ weil man eine bloße Zahl ohne Buchſtaben gewöhnlich immer zuletzt ſetzet. Es iſt freylich immer mühſam, große Exempel zu dividiren, ob wir ſchon den Anfängern zum Troſte ſagen können, daß ſie nicht oft vorkommen. Indeſſen muß man ſie doch wiſſen, wenn ſie vorkommen ſollten. Man übe ſich noch durch folgende Exempel.

Dividendus $aaa - aab + 2aac - 3abc + bbc$
Diviſor $a - b$
der Quotient iſt $aa + 2ac - bc$

Dividendus $12aayyy - 9ayyy - 8aayy + 6ayy$
Diviſor $4ay - 3y$ Quotient $3ayy - 2ay$

Dividendus $9xxxx + 12axxx - 4aaax - aaaa$
Diviſor $3xx - aa$ Quotient $3xx + 4ax + aa$

Dividendus $aaaa - bbbb$
Diviſor $a - b$ Quotient $aaa + aab + abb + bbb$

Man thut wohl, wenn man dieſe Uebung etwas fortſetzt, man wird ſich leicht ſelbſt Exempel geben können, wenn man zwey beliebige Größen mit einander multipliciret, und dieſes Produkt durch eine dieſer Größen dividiret, da denn die andere zum Quotienten herauskömmt.

§. 136. Ehe wir weiter gehen, zeigen wir noch die Probe der Diviſionsexempel in Buchſtaben an. Man multipliciret nemlich den

Quotienten mit dem Diviſor, und alsdenn muß das Produkt davon der Dividendus ſeyn, wenn das Exempel richtig gerechnet iſt. Wäre in dem Exempel nicht alles aufgegangen, ſo addirt man noch den Reſt zum Produkte, um den Dividendus wieder zu bekommen. Denn bey einem Exempel, das ganz aufgeht, muß der Diviſor im Dividendus nothwendig ſo vielmal enthalten ſeyn, als die Einheit, oder als 1 in dem Quotienten, weil mir der Quotient anzeiget, wie vielmal der Diviſor im Dividendus ſtecke. Folglich, wenn ich nun den Diviſor Quotientenmal nehme, das iſt, mit dem Quotienten multiplicire, ſo muß der Dividendus heraus kommen, wie wir das ſchon in Zahlen geſagt haben. ab durch a dividirt, giebt zum Quotienten b, das heißt, a ſteckt in ab bmal, wenn man alſo den Diviſor, oder die a, bmal nimmt, das iſt, mit dem Quotienten multipliciret, ſo muß ab das Produkt ſeyn. Man verſuche es mit einigen richtig dividirten Exempeln, um ſich dieſes deſto feſter einzuprägen.

§. 137. Hieraus folget noch eine andere ſchöne Folge: weil der Dividendus heraus kömmt, wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multipliciret, ſo kann man dieſe beyden Größen, nemlich den Quotienten und Diviſor, auch als zwey Faktoren betrachten, woraus der Dividendus beſtehet, wenn man alſo mit dem einen Faktor dieſe Größen dividiret, ſo muß der andere zum Quotienten heraus kommen. §. 115. Wenn man daher den Dividendus mit dem Quotienten dividiret, ſo muß der

der Diviſor herauskommen, welches, wenn es geſchiehet, gleichfalls eine richtige Probe der Diviſion iſt, wie aus der Sache ſelbſt deutlich erhellet. Ein Exempel: 144 dividiret durch 6 giebt zum Quotienten 24, folglich muß nach dem vorhergehenden §. 6 multiplicirt mit 24 wieder 144 geben. Alſo kann man den Dividendus als eine Größe anſehen, die aus den beyden Faktoren 6 und 24 beſteht, oder die = 6.24, wovon der eine der Diviſor, der andre der Quotient iſt. Dividirt man nun mit dem Quotienten, hier mit der 24, ſo muß ja der Diviſor zum Quotienten kommen. ab dividiret durch a, giebt zum Quotienten b, folglich muß auch ab dividirt durch b, zum Quotienten a geben, welches eben das iſt, wovon wir jetzt geredet haben.

§. 138. Wir entwickeln noch einige Axiomen und Lehren, die einem jeden zum Theil leicht begreiflich ſeyn werden, weil ſie die erſten Grundſätze der geſunden Vernunft ſind, und daher auch keines weitläuftigen Beweiſes bedürfen.

1) Gleiches mit Gleichem dividiret, giebt auch Gleiches zum Quotienten, oder wenn zwey oder mehrere ganz gleiche Größen durch einerley Diviſor dividiret werden, ſo müſſen auch bey allen gleiche Quotienten kommen. Die Sache iſt für ſich klar, indeſſen iſt ſie doch wohl zu merken. In Zahlen: 24 = 6.4 = 3.8, alſo ſowohl 24 als 6.4 als 3.8 dividiret durch 3, muß bey allen 8 zum Quotienten geben. Es ſey a = α = x, oder eine jede Größe ſey ſo groß als die andere, ſo muß nothwendig, wenn ſie alle durch einerley Größe = b

divi-

dividiret werden, bey jeder ein gleicher Quotient kommen. Man ſieht leicht ein, daß das auch gelten muß, wenn auch die Größen zuſammengeſetzt ſind.

2) **Gleiche** Größen mit **ungleichen** Diviſoren dividiret, giebt **ungleiche** Quotienten, und zwar wird der Quotient am größten, da der Diviſor am kleinſten iſt. Dieſes iſt auch leicht begreiflich, weil der kleinere Diviſor mehr in der mit der andern gleichen Größe ſteckt, als der größere Diviſor.

3) Wenn man **ungleiche** Größen mit **gleichen** Diviſoren dividiret, ſo werden die Quotienten auch **ungleich**, und zwar wird der Quotient der größten Größe auch der größte ſeyn, denn darin ſteckt der mit dem andern gleiche Diviſor am meiſten.

4) Wenn man **eine** Größe mit **einerley** Größe zugleich **multipliciret** und **dividiret**, ſo wird die Größe im geringſten nicht geändert, ſondern bleibt eben dieſelbe. Man wird dieſes gleich einſehen, wenn man bedenket, daß um ſo **vielmal**, als ſie durch die Multiplikation größer gemacht war, um eben ſo **vielmal** wird ſie nach unſerer Vorausſetzung auch durch die Diviſion verkleinert, ſie muß alſo eben dieſelbe Größe nothwendig bleiben, als ſie vor der Multiplikation und Diviſion war. Wenn man 6 mit 10 multiplieiret, und auch zugleich mit 10 dividirt, ſo kann es nichts anders als 6 ſeyn, oder es bleibt unverändert, denn durch die Multiplikation war es 10mal größer gemacht, aber um **eben ſo vielmal** wird es auch durch die Divi-

Diviſion verkleinert. a multipliciret mit b, und zugleich dividiret durch b bleibt a. Es wäre

$$\frac{ab}{b} = a.$$

5) Wenn bey einer Größe der Dividendus und der Diviſor zugleich durch einerley Größe multipliciret oder dividiret werden, ſo bleibt der Quotient ungeändert. Es ſey z. E. 20 der Dividendus und 4 der Diviſor, davon iſt der Quotient 5. Ich ſage, wenn man 20 und 4, als den Dividendus und Diviſor, beyde durch einerley Zahl dividirt oder multiplicirt, ſo bleibt der Quotient doch immer 5. Wir wollen einmal beyde erſt durch einerley Zahl multipliciren, es ſey durch 8: alſo $8 . 20 = 160$, und $8 . 4 = 32$. Aber 160 dividiret durch 32, giebt auch 5 zum Quotienten. Nun wollen wir beyde durch einerley Zahl dividiren, es ſey durch 2, alſo $\frac{4}{2} = 2$ und $\frac{20}{2} = 10$.

Wenn man nun 10 durch 2 dividiret, ſo iſt der Quotient auch = 5. Dieſe Regel gilt auch ganz allgemein. Es gäbe a dividirt durch b den Quotienten Q: alſo $\frac{a}{b} = Q$ Nun werde a und b beydes durch n multipliciret, der Quotient bleibt Q. alſo $\frac{a . n}{b . n} = Q$. Es werden auch beyde durch einerley Zahl dividirt, der Quotient wird auch Q beiben, alſo auch $\frac{a : n}{b : n} = Q$. Der Grund davon liegt hierin:

wenn

wenn der Dividendus und der Diviſor zugleich mit einerley Zahl multipliciret werden, ſo werden beyde um gleich vielmal größer gemacht, und wenn ſie beyde mit einerley Zahl dividiret werden, ſo werden ſie beyde um gleich vielmal kleiner gemacht, alſo kann der Diviſor nicht mehr und nicht wenigermal im Dividendus ſtecken als vorher.

6) Wenn man eine Anzahl von Größen hat, welche durch die Addition verbunden ſind, und man dividirt ſie durch eine Größe, ſo iſt der Quotient mit der Größe einerley, welcher heraus kömmt, wenn man jeder dieſer Größen einzeln durch den gegebenen Diviſor dividirte, und die einzelnen Quotienten zuſammen addirte. Ich will mich deutlicher erklären. Man habe die Größen a, b, c, d ꝛc. Ich ſage, alle die einzelnen Quotienten von $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n}$ ꝛc. zuſammen addirt, machen eine vollkommen gleiche Größe mit dem Quotienten von $\frac{a + b + c + d}{n}$ ꝛc. aus, oder in Zahlen:

$$\frac{4}{2} + \frac{6}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} = \frac{4 + 6 + 8 + 12}{2} = \frac{30}{2}$$

Dieſes will ich jetzt allgemein durch die Buchſtabenrechnung beweiſen, denn ſo wird es für alle mögliche Fälle, alſo auch für Zahlen gelten müſſen.

Es mag die Summe aller einzelnen Quotienten, wenn jede Größe einzeln dividirt wird $= Q$ heißen, denn eine Größe muß es doch ſeyn, und

die kan ich auch ſo nennen, weil ich durch Q alle mögliche Zahlen verſtehen kann. Dies nun hingeſchrieben, ſteht alſo: $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n}$ ꝛc. $= Q$. Dieſe beyden Größen ſind nun einander vollkommen gleich. Aber Gleiches mit Gleichem multiplicirt, bleibt Gleiches § 97. Alſo werden beyde Größen noch gleich bleiben, wenn ſie beyde mit einerley Größe multiplicirет werden. Dies ſey $= n$, ich muß alsdenn $\frac{a}{n}$ mit n multipliciren. Imgleichen $\frac{b}{n}$ mit n multipliciren, und $\frac{c}{n}$ und $\frac{d}{n}$ und endlich auch Q. Wenn aber eine Größe mit ein und eben derſelben Zahl multipliciret und dividiret wird, ſo bleibt ſie unverändert nach dem vierten Satz in dieſem §. Wenn alſo $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n}$ ꝛc. jede dieſer Größen mit n multipliciret werden, ſo werden ſie wieder $a + b + c + d$, und wenn Q mit n multipliciret wird, ſo wird es nQ alſo: $a + b + c + d$ ꝛc. $= nQ$ Nun nehme man das $a + b + c + d$ in eine Summe, das verändert es nicht: wir wollen es mit einer Klammer bezeichnen, das ſoll das jetzt bedeuten, alſo: $(a + b + c + d) = nQ$. Gleiches mich Gleichem dividiret, bleibt auch Gleiches, nach dem erſten Abſatz in dieſem Paragraphen, alſo $\frac{a + b + c + d}{n} = \frac{nQ}{n}$. Aber eine Größe mit einerley Größe zugleich multipliciret und dividiret,

bleibt

bleibt unverändert. Folglich $\frac{nQ}{n}$ iſt $= Q$, alſo

$$\frac{a + b + c + d \text{ ꝛc.}}{n} = Q.$$

Nun war aber auch, wie wir im Anfange dieſes Beweiſes fanden, $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n} = Q$. Wenn aber zwey Sachen einer dritten gleich ſind, ſo müſſen ſie auch unter einander gleich ſeyn, ein Grundſatz des gemeinen Menſchenverſtandes. Alſo wenn $\frac{a + b + c + d \text{ ꝛc.}}{n} = Q$ und $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n}$ ꝛc. $= Q$, ſo muß auch $\frac{a + b + c + d \text{ ꝛc.}}{n} =$ ſeyn

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n} \text{ ꝛc.}$$

Das heißt alſo, wenn man eine Anzahl von Größen hat, die durch die Addition verbunden ſind, und man dividirt ſie mit einer Größe, ſo iſt der Quotient mit dem einerley, welcher heraus kömmt, wenn man jede dieſer Größen einzeln durch den gegebenen Diviſor dividirte, und die Quotienten zuſammen addirte. Wir haben den Anfängern zu Gefallen dieſen Beweis ſo weitläuftig aus einander geſetzt, nun wollen wir ganz kurz auf die gewöhnliche Art jetzt dieſen Beweis hinſetzen, damit wir ihn gleich überſehen können, damit unſere Leſer lernen mögen, ſich an ſolche Beweiſe zu gewöhnen.

Alſo $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}$ ꝛc. $= Q$

$$\overline{}\;.n$$

$a+b+c+d$ ꝛc. $= nQ$

$$\overline{}\;:n$$

$\frac{(a+b+c+d \text{ ꝛc.})}{n} = Q$

$\frac{a+b+c+d \text{ ꝛc.}}{n} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}$ ꝛc.

Da dieſes allgemein wahr iſt, ſo muß es auch für alle nur erdenkliche Arten von Zahlen wahr ſeyn.

7) Gleichfalls, wenn das Dividendum eine Differenz zweyer Größen iſt, ſo iſt es auch wahr, daß $\frac{a-b}{n}$ gleich ſey $\frac{a}{n}-\frac{b}{n}$ oder daß es einerley ſey, ob man erſt die Größen von einander abzieht, und das Ueberbliebene, oder den Reſt durch den gegebenen Diviſor dividiret, oder ob man jede einzelne Größe dividiret, und nachher die Quotienten von einander abzieht. Z. E. in Zahlen: $\frac{15-6}{3}$ iſt gleich $\frac{15}{3}-\frac{6}{3}$ den $15-6$ iſt gleich 9, das durch 3 dividirt, giebt 3 zum Quotienten. Nun iſt $\frac{15}{3}$ gleich 5; und $\frac{6}{3}$ gleich 2. Wenn man nun die 2 von der 5 abziehet, oder die Differenz dieſer beyden Quotienten nimmt, ſo iſt die auch $= 3$. Wir müſſen dieſen Satz, den man nun ver-

ver-

verſtehen wird, allgemein beweiſen. Er war $\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}$.

Dieſes $a - b$ muß doch eine Größe ſeyn, die wollen wir d nennen: alſo $a - b = d$. Folglich da Gleiches durch Gleiches dividirt, gleich iſt, ſo muß $\frac{a-b}{n}$ gleich ſeyn $\frac{d}{n}$ alſo $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{d}{n}$. Nun wollen wir beyde wieder ohne Diviſion betrachten, und zu beyden $+ b$ addiren, ſo werden ſie noch gleich bleiben, denn Gleiches zu Gleich. addirt, bleibt Gleiches nach § 36. Wenn man aber zu $a - b$ die $+ b$ addirt, ſo fällt b hier ganz weg, und a bleibt alleine. Hingegen zu d kömmt die b hinzu: alſo $a = d + b$. Gleiches mit Gleichem dividirt, bleibt Gleiches, (erſter Satz dieſes §.) Alſo: $\frac{a}{n} = \frac{d}{n} + \frac{b}{n}$ Gleiches von Gleichem ſubtrahirt, bleibt Gleiches. Wir wollen von beyden $\frac{b}{n}$ abziehen, ſo fällt es aus dem hinterſten weg, und an das vorderſte kömmt es mit dem $-$ Zeichen; alſo $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{d}{n}$. Wenn zwey Dinge einem dritten gleich ſind, ſo ſind ſie unter einander gleich. Alſo da, wie wir im Anfang dieſes Beweiſes geſehen, $\frac{a-b}{n} = \frac{d}{n}$ und wie wir jetzt gefunden $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{d}{n}$ ſo muß auch $\frac{a-b}{n} =$ ſeyn $\frac{a}{n} - \frac{b}{n}$.

Kürzer dieſen Beweis in der Zeichenſprache geſetzt $\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}$

Beweis.

Denn es ſey

$$\begin{array}{l} a - b = d \\ \hline \quad : n \\ \frac{a-b}{n} = \frac{d}{n} \end{array}$$

ferner:

$$\begin{array}{ll} a-b=d & \\ +b=+b & \text{addirt } +b \\ \hline a=d+b & \\ \hline \quad : n & \end{array}$$

folglich:

$$\begin{array}{ll} \frac{a}{n}=\frac{d}{n}+\frac{b}{n} & \\ \frac{b}{n}=\frac{b}{n} & \text{ſubtrahirt } \frac{b}{n} \\ \hline \frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{d}{n} & \end{array}$$

Weil nun, wie wer im Anfange fanden, $\frac{a-b}{n}=\frac{d}{n}$ und wie wir jetzt finden $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{d}{n}$ ſo muß, weil, wenn zwey Dinge dem dritten gleich ſind, ſie auch unter einander gleich ſeyn müſſen, $\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}$ ſeyn."

Da

Da es allgemein bewieſen iſt, ſo gilt es auch für alle nur erdenkliche Zahlen und Größen. Die mehreſten dieſer jetzt angeführten Lehren werden viel Nutzen und Erleichterung in der Lehre von den Brüchen geben.

§. 139. Wir hatten in dem vorhergehenden Kapitel von der Multiplikation gezeigt, da wir von den Potenzen am Schluß des Kapitels redeten, wie man die Dignitäten von einerley Benennung mit einander multipliciret, §. 91. 92, nemlich, wenn man ihre Exponenten addirt, jetzt wollen wir am Schluß dieſes Kapitels abermals von Potenzen reden, und zeigen, wie man ihre Diviſion behandelt. Man wird gleich vermuthen, weil Dignitäten durch die Addition ihrer Exponenten multipliciret wurden, daß ſie durch die Subtraktion derſelben von einander werden dividiret werden. Und das iſt auch ſehr richtig. **Dignitäten oder Potenzen von einerley Benennung, oder Potenzen derſelben Größe, werden durch einander dividiret, wenn man ihre Exponenten von einander ſubtrahiret.** Aus der Buchſtabenrechnung ſelbſt wollen wir den Beweis davon führen. Wenn man eine Größe hat, die durch die Multiplikation gleichartiger Größen mit einander entſtanden wäre, ſo hies das eine Dignität oder Potenz. So hies a.a.a.a. die vierte Dignität von a oder a^4, es könnte auch ſo geſchrieben werden: aaaa. Nun werden durch die Diviſion nur die Buchſtaben von einander wieder getrennet, und ſo viel davon weggenommen, ſo viel gleichartige Buchſtaben der

Diviſor enthält. §. 127. Wenn man z. E. alſo $aaaa = a^4$ durch aa dividiren ſollte, ſo würde aa bleiben, allein, man ſieht auch nun, daß es gleichviel iſt, ob ich ſo viele Buchſtaben vom Dividendus wegnehme, oder ob ich es nur beym Exponenten anzeige, wie viel ich davon weggenommen habe, und das kann doch nicht anders, als durch das Subtraktionszeichen geſchehen: ſo würde a^4 dividiret durch a^2 alſo geſchrieben werden: $a^4 : a^2$ oder $\frac{a^4}{a^2}$ $= a^{4-2} = a^2$.

Man wird auch leicht einſehen, daß dieſe Regel wird gelten müſſen, wenn die Exponenten der Potenzen Buchſtaben ſind, denn die Buchſtaben auch in den Exponenten können doch immer als beſtimmte Größen oder Zahlen genommen werden. So würde z. E. $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Wir wiederholen zum Ueberfluß nochmals, daß die Potenzen gleichartig ſeyn müſſen, ſonſt gilt die Regel nicht, wie ein jeder, wenn er die Lehre der Diviſion nur inne hat, ſelbſt einſehen wird. $a^m : b^n$ iſt nicht a^{m-n}, ſondern kann nicht anders als $a^m : b^n$ oder $\frac{a^m}{b^n}$ geſchrieben werden.

§. 140. Dieſe Regel gilt bey gleichnamichten Potenzen auf alle Fälle, wenn auch die Potenz nicht einzeln ſtünde, ſondern auch durch die Multiplikation mit Potenzen von anderer Art verbunden wäre, wenn nur Dividendus und Diviſor gleichartige Potenzen, das iſt, Potenzen von einerley Benennung haben. So würde $a^3x^4 : a^2x^2$ $=$

$= a^{3-2} x^{4-2} = a^1 x^2$, weil man aber 1 in den Exponenten gewöhnlich nicht ſchreibt, indem es a ſelbſt iſt, $= ax^2$, auch $a^5x^4 : a = a^{5-1} x^4 = a^4x^4$. Wäre aber eine Potenz in dem Diviſor mit, die ungleichnamicht wäre, ſo gienge es nicht an, daß man alsdenn zum Quotienten nur eine Größe erhielte, ſondern man müſte ſie zum Theil nur anzeigen. Z. E. $a^5x^4 ; a^2z^2$ würde alſo ſtehen $= a^{5-2} x^4 : z^2$ oder $\frac{a^3x^4}{z^2}$.

§. 141. Wenn der Exponent des Diviſors bey gleichnamichten Potenzen größer iſt, als der Exponent des Dividendus, ſo muß, wenn man auf dieſe Art verfähret, der Exponent des Quotienten nothwendig negativ werden. Wenn a^m ſoll dividiret werden durch a^n, und ^{n} iſt größer als ^{m}, ſo iſt $^{m-n}$ nothwendig eine negative Größe, und ſo drückt man ſich in Zahlen auch wirklich aus. Z. E. $a^5 : a^7$ iſt $= a^{5-7} = a^{-2}$, oder a in der Potenz $^{-2}$ und $axy : a^3x^2y^4 = a^{1-3} x^{1-2} y^{1-4} = a^{-2}x^{-1}y^{-3}$. Was das ſey, wenn der Exponent einer Potenz eine Minusgröße wird, werden wir bald anzeigen, und wie man dafür einen andern Ausdruck finden kann.

§. 142. Verſchiedene Exempel, die wir jetzt hinſchreiben wollen, werden dieſe Lehre noch weitläuftiger erläutern.

$x^4 : x^3 = x^{4-3} = x^1 = x$

$x^5 : x^7 = x^{5-7} = x^{-2}$

$x^3y^2 : xy = x^{3-1}y^{2-1} = x^2y$

$x^3y^5 : x^4y^2 = x^{3-4}y^{5-2} = x^{-1}y^3$

$x^5y^4a : x^7y^5a^2 = x^{5-7}y^{4-5}a^{1-2} = x^{-2}y^{-1}a^{-1}$

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$a^{n+1} : a^m = a^{n+1-m}$

$a^{n-1} : a^{m+1} = a^{n-1-(m+1)} = a^{n-1-m-1} = a^{n-m-2}$

$a^nx^my : a^rx^5y^2 = a^{n-r}x^{m-5}y^{1-2} = a^{n-r}x^{m-5}y^{-1}$

$x^ry^5 . x^m = x^{r-m}y^5$

$(x^4y^2 - y^3x^5) : ax^3y = \frac{x^{4-3}y^{2-1} - y^{3-1}x^{5-3}}{a} = \frac{xy - x^2y^2}{a}$

$(ax^2y^3 - abx^2y^2 - ax^2y^2) : axy = xy^2 - bxy - xy = (y - b - 1)xy$

§. 143. Nun wir gelernet haben, wie wir gleichnamichte Potenzen durch einander dividiren ſollen, nun wird es auch leicht ſeyn, zu zeigen, wie die Potenzen, die durch eine gleichnamichte erſte Potenz dividiret werden, immer abnehmen, und wie dadurch eine Reihe der Potenzen nach rückwärts hin entſtehe. Nach vorwärts hin wuchſen ſie immer durch die Multiplikation der gleichnamichten erſten Potenz. Man erinnere ſich nochmals bey dem, was wir jeßt ſagen werden, daß eine Größe durch ſich ſelbſt dividiret $=1$ ſey. §. 113. 128. Alſo auch $\frac{x}{x} = 1$, weil wir dieſes hier gebrauchen werden. Wir erwählten x aus keiner andern Urſache, als um eine allgemeine Größe anzuzeigen, von jeder andern Größe oder Buchſtaben iſt das, was wir hier finden werden, eben ſo wahr, wie

wie man leicht einſehen wird, weil wir ein ganz allgemeines Zeichen genommen haben.

Wenn wir x in der erſten Potenz haben, oder die bloße gegebene Größe noch zu keiner Potenz erhoben, welche man auch x^1 ſchreiben könnte, und man multipliciret dieſe Größe mit x, und das daraus entſtehende Produkt wieder mit x, und ſo immer weiter, ſo würde man, wie aus der Multiplikation klar ſeyn muß, folgende Reihe von Potenzen haben, x, x^2 x^3 x^4 x^5 x^6 und ſo weiter bis ins Unendliche hin.

Nun wollen wir einmal von x^6 anfangen, und das nach unſer gelehrten Art durch x dividiren, ſo bekommen wir:

$$\frac{x^6}{x} = x^{6-1} = x^5$$

$$\frac{x^5}{x} = x^{5-1} = x^4$$

$$\frac{x^4}{x} = x^{4-1} = x^3$$

$$\frac{x^3}{x} = x^{3-1} = x^2$$

$\frac{x^2}{x} = x^{2-1} = x^1$ oder x, weil x^1 und x einerley iſt, alſo ferner:

$\frac{x}{x} = x^{1-1} = x^0$ oder $= 1$, weil es die Größe durch ſich ſelbſt dividiret anzeiget, alſo anſtatt x^0 kann man 1 ſetzen, wie wir gleich thun werden. Wir fahren nun weiter fort,

$\frac{x^0}{x}$ oder beſſer $\frac{1}{x} = x^{0-1} = x^{-1}$ weil $^{0-1}$ gewiß $^{-1}$ iſt.

Ferner alſo:

$\frac{x^{-1}}{x}$ oder $\frac{1}{x} : x = \frac{1}{x^2}$ weil ein $\frac{1}{x}$ noch xmal kleiner werden ſoll. Aber $\frac{1}{x}$ wird gewiß noch xmal kleiner, wenn der Diviſor xmal größer wird, und das geſchiehet, wenn ich den Diviſor mit dem x multiplicire, aber da $\frac{1}{x}$ = war x^{-1} und das dividiret durch x wird $x^{-1-1} = x^{-2}$ ſo kann man auch anſtatt $\frac{1}{x^2}$ ſetzen x^{-2}, $\frac{1}{x^2} : x = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ und $\frac{1}{x^3} : x = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ und ſo weiter. Hieraus ſiehet man, daß die Glieder der abnehmenden Potenzen beſtändig alſo auf einander folgen: wir wollen die zwey völlig gleiche Reihen davon hinſetzen, und Ausdrücke, die ſich einander gleich ſind, unter einander bringen, und von x^6 anfangen.

Der erſten Reihe iſt vollkommen gleich die zweyte.

Z. E. $x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4} \ldots x^{-n}$

$x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4} \ldots \frac{1}{x^n}$

Man ſiehet bald, wie groß der Nutzen ſeyn kann, den man von dieſen gleichen Ausdrücken haben wird, weil man ſie ein fürs andere ſetzen kann, Z. E.

Z. E. für $\frac{1}{x}$ kann man ſetzen x^{-1}, für $\frac{1}{x^n}$ kann man ſetzen x^{-n} und für $\frac{1}{xy}$ kann man ſetzen $x^{-1}y^{-1}$, welche Ausdrücke in der Rechnung öfters ſehr nützlich ſind, und uns in dem folgenden Kapitel zu ſtatten kommen werden, und nun werden uns auch hiedurch die Ausdrücke des vorhergehenden Paragraphen zum Theil deutlich ſeyn.

§. 144. Eine Größe in der Potenz 0 iſt allezeit $= 1$, wie wir eben gezeigt haben, denn x kann alle mögliche Größen bedeuten, alſo auch $(a + b)$ und iſt $x^0 = 1$, ſo muß auch $(a+b)^0 = 1$ ſeyn, alſo a^0, oder b^0, oder $(a+b)^0$ iſt $= 1$, welches man wohl zu merken hat. Dieſes iſt völlig allgemein wahr, ſogar 0^0 iſt $= 1$, da doch Null ſonſt keine Potenzen hat und haben kann, weil nichts immer nichts iſt; aber 0^0 kann man ſich vorſtellen als $\frac{0}{0}$, und nichts iſt in nichts doch wirklich 1mal enthalten, wenn man ſolche abſtrackte Sprache führen darf.

Nachdem wir dieſes gezeigt haben, werden wir nun auch noch einige Exempel dividiren können, die wir vorher §. 142 unter den Uebungsexempeln nicht angezeigt haben.

Z. E. $a^4 x^r y^5 : a^4 x^r y = a^{4-4} x^{r-r} y^{5-1}$ $= a^0 x^0 y^{5-1} = 1 . 1 . y^{5-1} = y^{5-1} = y^4$
$a^{s+1} x^2 : a^{s+1} x = a^{s+1-(s+1)} x^{2-1} = a^0 x^1$ $= x^1 = x$. $(a^2x^2y^2 - abxy - axy) : axy = axy - b - 1$

§. 145.

§. 145. Im §. 95 in der Multiplikation zeigten wir, wie man auch eine gegebene Potenz zu einer andern verlangten Potenz erheben könnte, wenn man ihren Exponenten mit dem verlangten Grade der Potenz multiplicirte; ſo war Z. E. a^4 zur dritten Potenz erhoben, $= a^{4 \cdot 3} = a^{12}$. Man wird nun auch leicht muthmaßen, daß ſich dieſe Exponenten der Potenzen auch durch die wirkliche Diviſion werden wieder erniedrigen laſſen. Im §. 90 zeigten wir vorläufig an, was eine Wurzel oder $\sqrt{}$ überhaupt wäre, nemlich eine Größe, die etliche mal mit ſich ſelbſt multipliciret, eine Potenz hervor bringt. Wir ſagten auch, was $\sqrt[2]{}$ $\sqrt[3]{}$ $\sqrt[4]{}$ $\sqrt[n+1]{}$ u. ſ. w. wäre. Nun kann man ſich ja eine jede Potenz, oder vielmehr jeden Exponenten derſelben vorſtellen, als ob er durch die Multiplikation mit einer andern Größe entſtanden, und zu der jetzigen Potenz durch dieſe Multiplikation erhoben wäre, die er jetzt hat, wie dieſes der 95 §. lehret. Allein die Größe, wodurch er zu der jetzigen Potenz erhoben wurde, war ja ſeine Wurzel. Denn z. E. wenn a^4 zur dritten Potenz erhoben werden ſollte, ſo multiplicirte man $a^{4 \cdot 3} = a^{12}$. §. 95. Wollte man nun dieſe dreyfache Wurzel wieder haben, ſo iſt es begreiflich, daß ſolches durch die entgegengeſetzte Methode geſchehen müſte, das iſt, durch die Diviſion. Ich müſte alſo den Exponenten von a^{12} durch 3 dividiren, und das ſtünde alſo $a^{\frac{12}{3}}$. Dividirte ich wirklich, ſo bekäme ich a^4, welches denn auch wirklich die $\sqrt[3]{}$ aus a^{12} iſt, weil a^4 dreymal mit ſich ſelbſt multipliciret, a^{12} giebet.

giebet. Es muß nun einem freylich geſagt ſeyn, welche Art der Wurzel man aus einer Potenz ſuchen ſoll, das heißt, der Exponent der Wurzel muß gegeben ſeyn, denn ſonſt müſte man antworten, daß unendlich viele Wurzeln da ſeyn könnten.

Ich hätte z. E. a^{12}, die $^{12}\sqrt{}$ daraus wäre $a^{\frac{12}{12}} = a^1 = a$. Denn a zwölfmal mit ſich ſelbſt multipliciret, giebt a^{12}, die $^4\sqrt{}$ aus a^{12} wäre $a^{\frac{12}{4}}$ oder a^3, die $^3\sqrt{}$ wäre $a^{\frac{12}{3}} = a^4$, die $^2\sqrt{}$ daraus, welche gewöhnlich blos $\sqrt{}$ ohne Zeichen hinein geſchrieben wird, wäre $a^{\frac{12}{2}} = a^6$ u. ſ. w. Die Regel alſo, die Wurzeln der Exponenten zu finden, die man finden ſoll, iſt folgende. Man dividirt den Exponenten der Potenz mit den gegebenen Exponenten der Wurzel, ſo zeiget mir der Quotientenexponent, den ich nun durch die Diviſion bekomme, die verlangte Wurzel an:

Alſo $\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$

$^4\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{4}} = a$

$^2\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Man bemerke aber hiebey, wenn man den Exponenten der Wurzel unter den Exponenten der Potenz ſetzet, ſo bleibet das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ weg.

Dieſe

Dieſe Regel gilt auf alle Fälle. Wenn ſich auch der Exponent wirklich nicht dividiren läßt, ſo lehrt es einen doch der Verſtand, daß man eben ſo verfahren könne und müſſe, alſo z. E. $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$; $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Auch gilt dieſe Regel, wenn die Exponenten nur Buchſtaben ſind. Z. E. $\sqrt[m]{x^r} = x^{\frac{r}{m}}$; $\sqrt[n+1]{x^{r+m}} = x^{\frac{r+m}{n+1}}$. Wenn der Verſtand dieſe Regel begriffen hat, ſo wird man völlig überzeugt ſeyn, daß dieſe Ausdrücke richtig ſeyn müſſen, wenn man ſie auch noch nicht völlig aus einander ſetzen kann.

§. 146. Es können auch durch die Multiplikation verbundene Größen vorkommen, woraus man die Radix, oder die Wurzel ausziehen ſoll. Da wird ſie aus jeder Größe ausgezogen werden müſſen, weil man ſich doch gedenken kann, daß der Exponent jeder Größe durch die Multiplikation entſtanden ſeyn kann.

Z. E. $\sqrt[3]{a^2x^4y} = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{a^6x^9y^3} = a^{\frac{6}{3}}x^{\frac{9}{3}}y^{\frac{3}{3}} = a^2\,x^3\,y$ denn hier konnte man wirklich divideren. Der $\sqrt{a^4\,x^2\,y} = a^{\frac{4}{2}}x^{\frac{2}{2}}y^{\frac{1}{2}} = a^2xy^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt[n]{x^m\,y^n} = x^{\frac{m}{n}}\,y^{\frac{n}{n}} = x^{\frac{m}{n}}y,\ \text{weil}\ \frac{n}{n} = 1.$$

§. 147. Dieſe Art zu ſchreiben, da man das Wurzelzeichen weg läſſet, und ſtatt deſſen den Exponenten des Wurzelzeichens unter den Exponenten der Potenz ſetzet, und z. E. ſtatt $\sqrt{a^4}$, $a^{\frac{4}{2}}$ ſchreibet, iſt ſehr gewöhnlich und auch von großem Nutzen, wie wir in der Folge finden werden. Wir wollen nun jetzt etwas vorläufig, aber noch ohne weitern Gebrauch, davon bemerken. Man kann ſolche Größen, die alſo geſchrieben ſind, und gleichnamicht ſind, auch gleichnamichte Wurzelexponenten haben, nach den oben angezeigten Methoden multipliciren, auch dividiren. Man muß aber nicht vergeſſen, daß Potenzen multipliciren, heißt ihre Exponenten addiren, und Potenzen dividiren, heißt ihre Exponenten von einander ſubtrahiren.

Z. E. $a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{4}{2}}$ wäre $= a^{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$, und $y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{5}{4}}$ wäre $y^{\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}$. Doch wir erklären das noch nicht weitläuftiger, weil wir die Lehre von den Brüchen noch nicht vorgetragen haben, wo wir es hinbringen werden, und wo wir denn auch zeigen werden, wie man zu verfahren hat, wenn die Wurzelexponenten nicht gleichnamicht ſind.

§. 148. Ehe wir dieſes Kapitel von der Diviſion beſchließen, bemerken wir noch etwas, welches wir mit Vorbedacht bis zuletzt verſparet haben. In allen bisherigen Diviſionsexempeln haben wir die Größen, die Potenzen waren, nicht als Potenzen geſchrieben, wir haben z. E. anſtatt a^4 allezeit aaaa geſetzet. Wir haben dieſes aus

der

der Urſache noch nicht gethan, weil wir noch nicht Potenzen durch andere Potenzen zu dividiren wuſten. Nun wir das gelernet haben, wollen wir noch zum Schluß einige Exempel hinſchreiben, worin Potenzen vorkommen, und ſie dividiren. Wir haben nur nöthig, die ganz ausgearbeiteten Exempel hinzuſetzen, einem jeden, der das vorherige gut gefaſſet hat, wird dieſes hinreichend ſeyn.

Man dividire $a^6 + b^6$ durch $a^2 + b^2$

$$\begin{array}{lcl} & a^6 + b^6 & \big| \; a^4 - a^2b^2 + b^4 \\ (a^2 + b^2) & a^6 + a^4b^2 & \\ \hline & -a^4b^2 + b^6 & \\ & -a^4b^2 - a^2b^4 & \\ \hline & +a^2b^4 + b^6 & \\ & +a^2b^4 + b^6 & \end{array}$$

noch

$$
\begin{array}{r|l}
(5c^2 - 3a) \quad 30c^4 - 5b^4c^3 + 20a^2c^2 - 18ac^2 + 3ab^4c - 12a^3 & 6c^2 - b^4c \\
30c^4 \qquad\qquad\qquad\qquad - 18ac^2 \qquad\qquad\qquad & + 4a^2 \\
\hline
- 5b^4c^3 + 20a^2c^2 \qquad\qquad + 3ab^4c - 12a^3 & \\
- 5b^4c^3 \qquad\qquad\qquad\qquad + 3ab^4c \qquad\quad & \\
\hline
+ 20a^2c^2 \qquad\qquad\qquad - 12a^3 & \\
+ 20a^2c^2 \qquad\qquad\qquad - 12a^3 &
\end{array}
$$

Wir gehen nun weiter und lehren die vier Species oder einfache Rechnungsarten in den ſogenann-

 ten

ten benamten Zahlen, welche wir bisher übergangen hatten, jetzt aber am bequemſten hier anzubringen glauben.

Das Sechſte Kapitel.

Von der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Diviſion in benamten Zahlen.

§. 149. Das Wort **benamte Zahlen** zeigt durch ſeinen eigenen Ausdruck, was man darunter verſteht, nemlich Zahlen oder Größen die einen Namen haben, das heißt, ſolche Größen, die wirklich Dinge enthalten, die da ſind, oder im gemeinen Leben vorkommen. 4 zum Exempel ſo blos geſagt, iſt eine **unbenamte** Zahl, aber 4 Hbten, oder 4 Groſchen ſind **benamte Zahlen**.

§. 150. Eigentlich iſt die Behandlung der **benamten** ganzen Zahlen in den ſogenannten vier Species, oder ihre Addition, Subtraktion, Multiplikation und Diviſion, von der Behandlung der **unbenamten** nicht unterſchieden, nur iſt das Geſetz, nach welchem einige Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachen, von dem Geſetz in unbenamten Zahlen, da 10 Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachten, öfters ſehr

ſehr verſchieden. Und wenn man dieſes Geſetz weis, ſo iſt bey allen dieſen vier Rechnungsarten nichts ſchweres mehr. Ich will mich deutlicher erklären.

§. 151. In unbenamten Zahlen machten zehn Einer einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter u. ſ. w. aus. In benamten Zahlen machen mannichmal 4, mannichal 15, mannichmal 20 Einer einer niedrigeren Ordnung einen Einer der nächſt höhern aus. Z. E. das Korn wird ausgemeſſen nach Wiſpel, Scheffel, Himbten und Vierfas. Es ſollen die Vierfaſſe nun einmal das niedrigſte Maaß ſeyn, oder die niedrigſte Einheit. Hier machen vier dieſer niedrigſten Einheit eine Einheit der nächſt höhern, oder einen Himbten aus. 10 Einheiten der Himbten machen eine Einheit des Scheffels, oder einen Scheffel aus, welcher wieder eine nächſt höhere Einheit iſt. Vier Scheffel machen wieder eine nächſt höhere Einheit, oder einen Wiſpel. In unſern Landen geht das Geſetz, wornach die Zählung des Geldes ſich richtet, alſo fort. 8 Pfennig iſt eine nächſt höhere Einheit, nemlich 1 Groſchen; 36 Groſchen iſt wieder eine nächſt höhere Einheit, nemlich 1 Thlr. Und ſo ſind bey andern Dingen wieder andere Geſetze, nach welchen die verſchiedenen Einheiten von einerley Sache beſtimmt werden. Dieſe Geſetze muß man wiſſen, oder ſie müſſen bey den Exempeln einem geſagt werden, wenn man ſie rechnen ſoll. Man findet es aber faſt in allen Rechenbüchern, wie viel Einheiten von verſchiedenen Dingen eine Einheit der nächſt höhern ausmachen.

Bey den verſchiedenen Exempeln, die wir jetzt geben werden, wollen wir es allezeit anzeigen.

§. 152. Es iſt alſo leicht begreiflich, daß, wenn man einige ſolcher Dinge zu berechnen hätte, alsdenn durch die Addition oder Multiplikation, oft die niedrigern Einheiten ſo groß werden könnten, daß ſie eine oder mehrere der nächſt größern in ſich enthielten, und daß man dieſe zu der nächſt höhern rechnen müſte: ſo wie man im Addiren aus der Reihe der Einer alle Zehner, die darinnen ſtecken, zu den Zehnern rechnete. Um nun zu wiſſen, wie viel Einer einer höhern Art in einer Anzahl von Einern einer niedrigern Art noch ſtecken, wenn man entweder durch die Addition oder Multiplikation eine Menge davon bekommen hätte, müſte man die Diviſion verſtehen, und dieſe niedrigern Einer durch eine ſolche Zahl dividiren, die ſo groß war, als Einheiten der niedrigern Ordnung auf eine Einheit der nächſt höhern giengen. Ich hätte z. E. durch die Addition 78 Pfennige erhalten, ſo ſehe ich bald, daß da noch Einheiten der nächſt höhern Art, oder Groſchen darin ſtecken. Um nun zu erfahren, wie viel Groſchen darinnen ſteckten, müſte ich ſie durch 8 dividiren, weil 8 Pf. einen Groſchen ausmachen, und ſo vielmal 8 darin ſteckte, ſo viel Groſchen waren darinn, und der Reſt waren noch die Pfennige, welches ſehr begreiflich iſt. Hier waren alſo 78 pf. = 9 gr. und 6 pf. weil 8 in 78 neunmal ſteckt, und 6 überbleiben. Das iſt die Urſache, warum wir dieſer vier Species in benamten Zahlen nicht eher erwähnt haben, weil

wir

wir ſchon bey der Addition derſelben die Diviſion öfters nöthig hatten, um die Sache ſchicklich auszudrücken zu können. Denn ob ich ſchon hier z. E. auch 78 pf. anſtatt 9 mgr. 6 pf. ſagen könnte, ſo iſt doch der letztere Ausdruck weit ſchicklicher als der erſtere, und macht deutlichere Begriffe.

§. 153. Nach dieſen Vorbereitungen fangen wir nun die Addition der benamten Zahlen an. Man kann nur gleichartige Dinge addiren, alſo folget daraus die Regel von ſelbſt, 1) daß, wenn verſchiedene Dinge von einerley Art, aber von verſchiedenen Arten der Einheiten oder Benennung gegeben ſind, man gleichartige Benennungen unter gleichartige Benennungen ſetzet, ferner 2) daß, wenn man in der Summe der kleinern Benennung ſo viel Einheiten bekömmt, daß noch Einheiten der nächſt größern darin ſtecken, man dieſe Summe durch die Zahl, welche anzeiget, wie viel Einheiten dieſer niedrigern Benennung eine Einheit der nächſt höhern ausmachen, dividiret, und den Quotienten zur nächſt größern Benennung addirt, und den Reſt, wenn einer da iſt, unter die kleinere Benennung ſetzet. Das Uebrige bey der Addition iſt völlig mit der Addition in unbenamten Zahlen gleich.

§. 154. Wir wollen dieſe Regeln durch einige Exempel erläutern, welches Verfahren auch wirklich der Beweis dieſer Regel iſt. Die Natur der Dinge erfordert dieſes Verfahren.

Man addire 27 Thlr. 6 gr. 5 pf. auch 17 Thlr. 28 gr. 6 pf. noch 33 Thlr. 15 gr. 7 pf. noch

5 Thlr. 30 gr. 3 pf. Es würde dieſes Exempel alſo ſtehen.

27 Thlr.	6 mgr.	5 pf.
17 ſ	28 ſ	6 ſ
33 ſ	15 ſ	7 ſ
5 ſ	30 ſ	3 ſ
2	2	
84 Thlr.	9 mgr.	5 pf.

Hier ſind Dinge von einerley Benennung unter einander geſetzt, nach der 1ſten Regel. Die geſunde Vernunft lehret es ſchon, daß man die Groſchen nicht zu den Thalern oder Pfennigen nehmen konnte. Nun fange man von der kleinſten Benennung die Addition an, alſo hier von den Pfennigen. Man bekömmt 21 Pfennige. Weil dies mehr iſt als 8 pf. welches eben einen Groſchen ausmacht, ſo ſtecken hier noch Einheiten der höhern Art, oder Groſchen darin, denn 8 pf. wäre eben ein Groſche geweſen. Das findet man nun nach der zweyten Regel durch die Diviſion mit 8, ſo viel Groſchen müſſen darin ſtecken, als 8 darin enthalten iſt.

Man addire: 21 | 2
(8)
16

5

Da iſt 2 der Quotient und 5 der Reſt. Alſo ſind in 21 pf. 2 gr. und 5 pf. enthalten. Aber die gr. können auch nur zur Reihe der Groſchen addirt werden. Man ſetzt alſo die 5 pf. unter die Reihe der Pfen-

Pfenninge, und die 2 gr. addirt man zu den Groſchen; man ſieht, das kann die Summe gar nicht ändern. Die Reihe der Groſchen addirt man auf die gewöhnliche Art, und ihre Summe iſt 81. Nun machen 36 gr. einen Thlr. alſo ſtecken hier noch Einheiten der Thlr. inne, man dividirt es daher durch 36, um dieſes zu wiſſen.

81 | 2
(36)
72
9

2 iſt der Quotient, und 9 der Reſt. Alſo die 2 Thlr. die darinnen ſind, muß man zu der Reihe der Thlr. zählen. Um ſie nicht zu vergeſſen, ſchreibt man ſie auch wol durchſtrichen darunter, wie wir auch bey den Groſchen gethan haben. Die 9 gr. gehören unter die Reihe der Groſchen. Die Reihe der Thlr. nun addirt, bringt 84 Thlr. alſo die ganze Summe 84 Thlr. 9 gr. 5 pf. In dem ganzen Verfahren liegt auch ſchon ſein Beweis. Hätte man unter jeder Reihe der Einheiten das hingeſetzt, was die Summe derſelben iſt, ſo wäre das eben ſo richtig, aber nicht ſo ſchicklich geweſen. Es wären 82 Thlr. 79 gr. 21 pf. aber ſo ſpricht niemand. Wir wollen noch ein Exempel, aber ohne weitere Auseinanderſetzung hinſchreiben. Ein Verwalter läßt 4 Tage dreſchen. Er bekömmt den erſten Tag 1 Wiſpel, 3 Scheffel, 6 Hbten, 2 Vierfas. Den 2ten Tag 36 Hbten, 3 Vierfas. Den dritten Tag 1 Wiſpel, 6 Hbten. Den vierten Tag 1 Wiſpel, 2 Scheffel, 9 Hbten,

 1 Vier-

1 Vierfas. Wie viel hat er zuſammen? Es ſtünde, wenn man Gleiches unter Gleiches ſetzet, alſo:

1	Wiſpel,	3	Scheffel,	6	Hbten,	2	Vierfas
	,,		,,	36	,,	3	,,
1	,,		,,	6	,,		,,
1	,,	2	,,	9	,,	1	,,
3		5		1			
5	Wiſpel,	2	Scheffel,	8	Hbten,	2	Vierfas

Man muß hier bemerken, daß 4 Vierfas 1 Hbten, 10 Hbten einen Scheffel und 4 Scheffel einen Wiſpel ausmachen, und daß man alſo die Summen der Vierfas durch vier, um die Hbten zu bekommen, die Summen der Hbten durch 10, um die Scheffel zu erhalten, und die Summe der Scheffel durch vier dividiren muß, um zu wiſſen, wie viel man zu der nächſt höhern Reihe der Einheiten, hier der Wiſpel, addiren muß, und was man unter dieſe Reihen, nemlich den Reſt, der überbleibet, ſetzet.

§. 155. Der geſunde Verſtand muß es lehren, welche Rechnungsexempel zur Addition in benamten Zahlen gehören. Wir führen keine mehr an, um den Raum zu erſparen, da man in den gemeinſten Rechnungsbüchern genug davon finden kann, und da unſere Abſicht vorzüglich nur dahin gehet, den Grund und Beweis des Verfahrens zu zeigen, welches den Rechenbüchern fehlet, und ohne welchen doch kein Menſch eine recht gute Arithmetik lernen, und noch weit weniger behalten kann. Wir gehen zur Subtraktion.

§. 156.

§. 156. Die Subtraktion in benamten Zahlen geſchiehet gleichfalls auf die eben gelehrte Art, und man hat nichts weiter da zu bemerken, als daß man gleichbenamte Größen unter gleichbenamte ſetzet, weil ſich gleichnamichte Dinge nur von einander abziehen laſſen; daß man wiſſen muß, wenn man zu borgen hat, wie viel kleinere Einheiten die Einheit der nächſt größern Größe von eben der Sache in ſich enthalte, wie wir ſchon im 151 §. geſagt haben.

Sind alle Zahlen oder Größen des Subtrahenten kleiner als des Minuendus, ſo hat man nicht nöthig zu borgen, iſt das aber nicht, ſo kömmt der Fall vor. Warum man borgen muß, habe ich nicht nöthig zu wiederholen, weil es in der Lehre von der Subtraktion ſchon genugſam geſagt iſt. Ich darf nur ein Paar Exempel aus einander ſetzen, um die Sache völlig begreiflich zu machen, und auch zugleich den Beweis des Verfahrens zu geben.

§. 157. Von 15 Thlr. 24 gr. 6 pf. ziehe man ab, 7 Thlr. 12 gr. 2 pf. Es ſtünde alſo:

15 Thlr.	24 gr.	6 pf.
7 „	12 „	2 „
8 Thlr.	12 gr.	4 pf.

Dieſes iſt ganz leicht und nichts dabey zu erinnern, weil alle untere Zahlen des Subtrahendus kleiner ſind als des Minuendus. Allein nun wollen wir ſie zum Theil größer ſetzen. Wenn nur die gröſte Größe des Subtrahens (im vorigen Exempel die Thlr.) kleiner iſt als die gröſte Größe des Mi-

nuendus, ſo läßt ſich noch immer die untere Zahl von der obern abziehen, welches von ſelbſt in die Augen fällt. Man ziehe von 15 Thlr. 24 gr. 6 pf. ab 7 Thlr. 27 gr. 7 pf. Es ſtünde alſo:

1.5. Thlr.	24. gr.	6 pf.
7 "	27 "	7 "
7 Thlr.	32 gr.	7 pf.

Man ſiehet, die Groſchen und Pfennige im Subtrahenten ſind alle größer als im Minuendus, indeſſen, weil die Thlr. noch kleiner ſind, iſt das doch von den Obern abzuziehen. Man bemerke hiebey, daß ein Thlr. 36 mgr. enthält, und ein mgr. 8 pf. in ſich faſſet. Ich ſehe gleich, ich kann von 6 pf. keine 7 abnehmen, allein es iſt gleichviel, wenn ich von der nächſten 24 gr. einen Groſchen abnehme und ihn in Pfenninge verwandele, zu den 6 pf. rechne, und alsdenn 7 pf. davon nehme. Ich ſetze alſo an die 24 einen Punkt (.) nun habe ich 14 pf. denn 8 pf. und 6 pf. = 14 pf. Davon kann man 7 abziehen, und unten zur Differenz kömmt alſo 7 pf. Es verſteht ſich ſchon von ſelbſt, daß man anſtatt 24 gr. nun noch 23 im Minuendus hat. Aber auch davon laſſen ſich 27 gr. nicht abnehmen. Ich nehme alſo von den 15 Thlr. einen, verwandele ihn in Groſchen, addire ihn zu den 23 gr. Nun habe ich 23 und 36 = 59 gr. davon laſſen ſich 27 gr. abnehmen, und die Differenz iſt 32 gr. Um es nicht zu vergeſſen, daß ich einen Thlr. von den 15 Thlr. genommen habe, mache ich einen Punkt dabey, nemlich 7 Thlr. von 14 Thlr. bleibt 7 Thlr.

§. 158.

§. 158. Dieſes Exempel wird die Sache ſchon ziemlich erklären, und auch den Grund des Verfahrens zeigen. Wenn ich das Geld wirklich in Natur hätte liegen gehabt, ſo hätte ich ja die Groſchen und Thlr. des Minuendus in kleinere Münze verwandeln, und alſo verfahren können. Das hat man nicht nöthig zu befürchten, daß durch das Borgen eine Größe des Minuendus ſo anwachſen könne, daß nachher, wenn man den Subtrahenten davon nimmt, die Differenz ſo groß würde, daß ſie ſo viel Einheiten erhielte, worin noch eine Einheit der nächſt folgenden Größe ſteckte. Denn iſt der Fall, daß der Subtrahens größer iſt, als der über ihn ſtehende Minuendus, ſo kömmt doch beym Borgen nur **eine** Einheit der nächſt folgenden Art zum Minuendus, da nun der Subtrahendus ſchon größer iſt als der Minuendus, ſo geht beym Abziehen erſtlich der Minuendus fort, und dennoch allezeit ein Theil der geborgten Einheit, alſo muß die Differenz immer kleiner ſeyn als eine Einheit der nächſt folgenden Art. Gleichfalls muß das Borgen der **einen** Einheit der nächſt folgenden Größe immer zureichend ſeyn, daß die untere Zahl nun wirklich von der obern kann abgezogen werden, denn der Subtrahendus ſey ſo groß als er wolle, ſo iſt er doch immer kleiner als die Einheit der nächſt folgenden Art, ſonſt hätte man ſich unrichtig ausgedrückt, und müſte das verbeſſern. Iſt aber der Subtrahendus immer kleiner als die Einheit der nächſt folgenden Größe, ſo muß er auch nebſt der zugekommenen geborgten Größe vom Minuendus abgezogen werden

den können, wenn auch im Minuendus nichts geweſen wäre, weil alsdenn die obere Zahl größer wird als die untere, und alſo iſt die Regel auf alle Fälle richtig.

Von 40 Wiſpel, 3 Scheffel ſubtrahire man 25 Wiſpel, 6 Hbten, 2 Vierfas. Das ſtünde alſo:

40	Wiſpel,	3	Scheffel,	•	Hbten,	;	Vierfas
25	;;	;	;;	6	;;	2	;;
15	Wiſpel,	2	Scheffel,	3	Hbten,	2	Vierfas

Es wird hoffentlich keine Schwierigkeit machen, daß im Minuendus unter der Rubrik der Himbten und der Vierfas nichts ſteht, welches ſich doch im Subtrahenten befindet. Man borget herüber, wenn man von den Vierfaſſen anfängt zu ſubtrahiren, bis wo ſich etwas findet. Hier nach den Scheffeln, man nimmt einen davon, und verwandelt den in Himbten. Nun hat man einen Scheffel weniger in der Zahl der Scheffel; aber 10 Hbten in den Himbten, davon nimmt man gleichfalls einen, und verwandelt ihn in Vierfas. Man ſiehet, daß durch ſolches Borgen der Minuendus im geringſten nicht geändert wird. Um es deutlich zu machen, will ich das Exempel alſo hinſetzen.

				9			
				10		4	
40	Wiſpel,	3.	Scheffel,	—	Hbten,	—	Vierfas
25	;;	;	;;	6	;;	2	;;
15	Wiſpel,	2	Scheffel,	3	Hbten,	2	Vierfas

Nun

Nun kann man leicht abziehen, wo nichts iſt, das man abziehen ſoll, da zieht man auch nichts ab, und daher ſetzt man die 2 Scheffel nur ſo blos herunter. Wir wollen noch ein Exempel blos hinſetzen. Von 36 Thlr. ziehe man ab 30 Thlr. 35 gr. 7 pf. Alſo:

	35 ; 36.	
36. Thlr.	— gr.	— pf.
30 „	35 „	7 „
5 Thlr.		1 pf.

Hoffentlich wird nun alles erläutert ſeyn.

§. 159. Man könnte auch auf die in Buchſtaben §. 57 gelehrte Art die Subtraktion verrichten, wenn ſolche Exempel gegeben wären, denn die allgemeinen Regeln paſſen auf alle Fälle, und auch hier gilt es, daß man entgegengeſetzte Größen ſubtrahiren kann, aber es pflegt unſchickliche Ausdrücke zu geben. Wir wollen doch einmal ein Exempel davon geben.

Man ſubtrahire von	36 Thlr.	— 4 gr.	+ 7 pf.
	30 „	+ 12 „	— 3 „
		—	+
	6 Thlr.	— 16 gr.	+ 10 pf.

oder wenn man das zum ſchicklichern Ausdrucke bringt, 5 Thlr. 21 gr. 2 pf. Man bringe beyde Größen auf die gewöhnliche Ausdrücke, alſo die erſtere auf 35 Thl. 32 gr. 7 pf. die andere 30 Thlr. 11 gr. 5 pf. ſo kömmt eben das heraus.

§. 160.

§. 160. Wir ſagten bey der Addition in benamten Zahlen, daß es der geſunde Verſtand beurtheilen müſte, welche Exempel dafür gehöreten. Dieſes gilt hier auch. Oefters kommen auch Exempel vor, die Additions- und Subtraktionsexemp. zugleich ſind. Eine geringe Aufmerkſamkeit zeiget das bald. Weil wir die Subtraktion ſchon gelehrt haben, wollen wir doch ein Exempel herſetzen, worin Addition und Subtraktion ſtatt findet. Ein Ochſe koſtet 28 Thlr. 9 mgr. Zoll 2 Thlr. 12 mgr. 6 pf. **herzuführen** 2 gr. 4 pf. **Schlachtelohn und Unkoſten dabey** 17 mgr. 4 pf. Nun hat der Eigenthümer für die **Haut empfangen** 4 Thlr. 6 mgr. **für das Eingeweide** 3 Thlr. **für Talg** 2 Thlr. 33 mgr. was koſtet das reine Fleiſch? Nach einiger Ueberlegung findet man bald, daß man erſt alle Ausgaben, und denn alle Einnahmen, jedes beſonders addiren, und nachher die Einnahme von der Ausgabe abziehen müſſe, ſo zeiget der Reſt, was das reine Fleiſch wirklich koſte.

Wir wollen es hinſetzen.

Ausgabe	28 Thl.	9 gr.	- pf.	Einnahme	4 Thl.	6 gr.	- pf.
	2 „	12 „	6 „		3 „	- „	- „
	- „	2 „	4 „		2 „	33 „	- „
	- „	17 „	4 „		7		
	7	7		alle Einnahme	10 Th.	3 gr.	- „
alle Ausg.	31 Thl.	5 gr.	6 pf.				
alle Einn.	10 „	3 „		abgezogen			
bleibt	21 Thl.	2 gr.	6 pf.				

Dieſes

Dieſes iſt die Beantwortung der Frage. Wir verweiſen die Leſer dieſes Buchs auf die gewöhnlichen Rechenbücher, wenn ſie mehr Exempel zur Uebung machen wollen.

§. 161. Die Probe der Subtraktion in benamten Zahlen iſt einerley mit der in unbenamten. § 49. Man addirt die Differenz und den Subtrahens zuſammen, ſo muß der Minuendus oder die obere Zahl zur Summe kommen. Der Grund iſt auch eben derſelbige. Denn der Minuendus und der Subtrahens iſt nur um die Differenz verſchieden, nur muß man beym Addiren eben ſo verfahren, wie überhaupt beym Addiren in benamten Zahlen geſchehen muß, daß man weiß, wie viel Einheiten der niedrigern Ordnung auf eine Einheit der nächſt höhern gehen. Ein Exempel.

Minuendus	40.	Thlr.	3. mgr.	2 pf.
Subtrahens	36	„	12 „	5 „
Differenz	3	Thlr.	26 mgr.	5 pf.
addirt der Subtrahens und die Differenz, welches die Probe iſt.	40	Thlr.	3 mgr.	2 pf.

§. 162 Man kann auch benamte Zahlen multipliciren, und es kommen ſehr oft Fälle genug vor, da dieſes geſchehen muß. Auch dieſes iſt nicht ſchwer für jemand, welcher gehörig unbenamte Zahlen multipliciret, und die mehrſte Zeit weit leichter, weil weit ſeltner ſolche große Exempel vorkommen. Multipliciren in benamten Zahlen heißt, eine

eine gegebene Größe, die aus verſchiedenen Gliedern beſtehen kann, durch eine andere Größe vermehren, oder ſo vielmal nehmen, als die andere Größe oder der Multiplicator eins in ſich enthält. 10 Thlr. 4 mgr. 2 pf. mit 6 multiplciren heißt, dieſe 10 Thlr. 4 mgr. 2 pf. 6mal nehmen. Das könnte auch durch die Addition geſchehen, aber wir haben ſchon §. 64 bey der Multiplikation in unbenamten Zahlen gezeigt, wie weitläuftig das ſeyn würde. Wir haben die Regel gleichfalls vorzüglich zu merken, daß man wiſſen muß, wie viel Einheiten der nächſt niedrigern Ordnung auf eine Einheit der nächſt höhern gehen, weil es ofte geſchieht, daß, wenn man gleichartige Größen, aber von verſchiedenen Ordnungen mit einer gegebenen Zahl multipliciret, die kleinern Ordnungen durch die Multiplikation ſo groß werden, daß noch eine oder mehrere Einheiten der größern Ordnung darinnen befindlich ſind, welche man nachher durch die Diviſion wieder zu ihren gehörigen Klaſſen bringet. Man hätte zum Exempel 40 Thlr. 26 mgr. 6 pf. mit 12 zu multipliciren, ſo ſiehet man leicht ein, daß die Pfennige ſowol als die Groſchen durch die Multiplikation mit 12 ſo hoch anwachſen werden, daß in dem Produkte der Pfennige noch viele Groſchen, und in dem Produkte der Groſchen noch Thaler enthalten ſind, und daß man das nicht anders finden kann, als wenn man bey dem Produkte der Pfennige durch die Diviſion mit 8, und bey dem Produkte der Groſchen durch die Diviſion mit 36 ſuchet, wie viel Groſchen und Thaler darinnen noch enthalten ſind.

§. 163.

§. 163. Wenn eine Größe gegeben iſt, die aus mehrern Gliedern zuſammen geſetzt iſt, die man mit einer gegebenen Zahl multipliciren ſoll, ſo iſt es gleichviel, ob man erſt dieſe zuſammengeſetzte Größe durch die Addition zu einer Größe machte, und nachher mit der gegebenen multiplicirte, oder ob man jedes Glied allein multiplicirte, weil doch die Größe immer eben dieſelbe bleibet. Wenn man 10 Thlr. 14 mgr. 2 pf. mit 6 zu multipliciren hätte, ſo müſte eben das herauskommen, wenn man jedes Glied mit 6 multiplicirte, oder erſt überhaupt ſuchte, wie viel die ganze Größe an Pfennigen betrüge, die denn mit 6 multiplicirt werden, und nun, um einem ſchicklichern Ausdruck zu bekommen, wieder ſuchte, wie viel Thlr. und Groſchen und Pfennige in dieſem Produkte ſtecken. Dieſes würde ſehr weitläuftig ſeyn. Wenn man aber nach der erſten Art verführe, und jedes einzelne Glied multiplicirte, ſo ſiehet man auch ein, daß, wenn man bey den niedrigſten Benennungen ſolche große Produkte bekäme, darin die Einheit der höhern Benennung ein oder etliche mal ſich befände, daß man dieſe durch die Diviſion mit einer ſolchen Größe, als Einheiten der niedrigern Ordnung auf eine Einheit der höhern gehen, heraus ſuchen, und denn zu dem Produkt der höhern Ordnung addiren müſte, weil man ſonſt keinen ſchicklichen, obgleich wahren Ausdruck des Produkts bekäme. Wenn ich z. E. 3 Thlr. 18 mgr. mit 5 zu multipliciren hätte, ſo wären das 5 mal 18 gr. und 5 mal 3 Thlr. oder 15 Thlr. und 90 gr. Der Ausdruck wäre wahr, aber nicht ſchicklich.

In den 90 gr. ſtecken noch Thlr. weil nur 36 gr. auf einen Thlr. gehen. Um zu erfahren, wie viel darinnen ſtecken, muß man ſie mit 36 dividiren ſo iſt der Quotient = 2 und der Reſt = 18. Dieſe 2 ſind alſo noch Thlr. die zu den 15 Thlr. addirt werden müſſen, und nun konnte ich blos die 18 gr. noch als Groſchen hinſetzen. Ich bekäme alſo 17 Thlr. 18 gr. welches eben ſo viel als 15 Thlr. 90 gr. iſt, wie man deutlich einſiehet.

§. 164. Aus allen dieſen Raiſonnements laſſen ſich folgende Regeln für die Multiplikation ziehen, deren Beweis ſchon aus der Natur der Sache klar iſt.

1) **Man multipliciret alle gegebene Größen mit dem gegebenen Multiplikator, und ſetzet das Produkt hin.**

2) **Wenn man findet, daß die kleinern Benennungen ſo groß ſind, daß ſich noch Einheiten der nächſt höhern Benennung in ihnen finden, ſo dividiret man ſie durch die Zahl, welche anzeiget, wie viel Einheiten der niedrigern Ordnung auf eine Einheit der nächſt höhern gehen, addirt den Quotienten zur nächſt höhern Ordnung, und ſetzet den Reſt unter den Namen der niedrigern hin. Auf die Art verfahren, bekömmt man das verlangte Produkt.**

Anmerkung. Es iſt ſehr begreiflich, daß der Multiplikator nicht eine benamte, ſondern allezeit eine unbenamte Zahl iſt. 5 Thlr. 6 gr. 4 pf. kann man wol mit 4, aber nicht mit 4 pf. oder 4 gr.

4 gr. oder 4 Thlr. multipliciren, weil multipliciren heißt, eine Sache einigemal nehmen, oder zu ſich ſelbſt addiren, welches Verfahren ſelbſt alſo allezeit etwas unbenamtes iſt.

§. 165. Nach dieſen Regeln wollen wir nun einige Exempel berechnen, und aus einander ſetzen. Zwölf Einwohner eines Dorfs müſſen jeder jährlich 20 Thlr. 16 mgr. 4 pf. Abgaben erlegen, wie viel bringt dieſes insgeſamt in einem Jahre. Man ſiehet gleich, daß man dieſe Summe nur zwölfmal zu ſich ſelbſt addiren, oder mit 12 zu multipliciren hat, um die Frage aufzulöſen. Es ſtünde das Exempel alſo:

	20 Thlr.	16 mgr.	4 pf.
			12 =
	240 Thlr.	192 mgr.	48 pf.
	5	6	
oder	245 Thlr.	18 mgr.	- pf.

Wenn man die 4 pf. zwölfmal, imgleichen die 16 gr. zwölfmal, und die 20 Thlr. gleichfalls zwölfmal genommen hat, ſo muß das Produkt davon die Beantwortung der Frage ſeyn. 12mal 4 pf. ſind 48 pf. Zwölfmal 16 mgr. ſind 192 mgr. Zwölfmal 20 Thlr. ſind 240 Thlr. Allein man ſiehet gleich, in den Pfennigen ſtecken noch Groſchen, und in den Groſchen noch Thaler. Man dividire alſo dieſe Pfennige durch 8, das giebt zum Quotienten 6, und es bleibt kein Reſt. Alſo zum Produkt kommt kein Pfennig. Aber die 6 gr. gehören zu den 192 mgr. noch zu, man hat alſo 198

mgr. die durch 36 dividiret, (weil ſo viel Groſchen auf einen Thlr. gehen), giebt zum Quotienten 5, und der Reſt iſt 18. Dieſes ſind, wie leicht begreiflich iſt, die mgr. und die 5 die Thaler, welche zu den 240 zu addirt werden müſſen, alſo das Produkt iſt 245 Thlr. 18 mgr. Noch ein Exempel. In einer Compagnie von 150 Soldaten ſoll jeder 3 Quartier Bier nach vollendetem Exerciren bekommen, wie viel haben ſie alle erhalten. Das iſt alſo, 3 Quartier multipliciret mit 150 oder 450 Quartier, nun gehen aber 4 Quartier auf ein Stübchen, und 108 Stübchen auf ein Fas. Alſo die 450 Quartier erſt mit 4 dividiret, ſo hat man die Stübchen. Das bringet 112 Stübchen zum Quotienten, und läßt 2 Quartier zum Reſte, ferner, die 112 Stübchen durch 108 dividiret, giebt die Fasanzahl, die darin ſtecket. Es giebt 1 Fas zum Quotienten, und läßt 4 Stübchen zum Reſte. Sie haben alſo alle bekommen, 1 Fas, 4 Stübchen und 2 Quartier. Es ſtünde alſo:

```
      3 Q.
    150
  ------
    450 Q.

    450 | 112 1 Fas
    44. | (108)
   -----| 108
     10 |-----
    (4)    4 St.
      8
   -----
     2 Q.
```

In

In jedem Rechenbuche findet man Exempel genug von dieſer Art, die es gleichfalls durch die Uebung lehren werden, wie man zu urtheilen hat, ob ein Exempel zur Multiplikation gehöre.

§. 166. Die Größen, welche wir jetzt multipliciret haben, werden gleichſam durch das Pluszeichen verbunden. Es wird einem jeden ſchon einleuchtend ſeyn, daß man auch auf eben die Art multipliciren müſſe, wenn ſie durch das Minuszeichen verbunden ſind, nur muß man die Regel betrachten, die §. 83 von der Multiplikation mit entgegengeſetzten Größen gegeben ſind. Man ſchreibet zwar gewöhnlich ſo im gemeinen Leben nicht. Indeſſen, da es doch vorkommen könnte, wollen wir ein Exempel davon hinſetzen, das zur Lehre ſtatt aller andern dienen kann.

Man multiplicire 4 Wiſpel — 6 Hbten + 3 Vierfas mit 12.

4 Wiſpel — 6 Hbten + 3 Vierfas
12

48 Wiſpel — 72 Hbten + 36 Vierfas
\+ 9

oder
= 48 Wiſpel — 63 Hbten
— 1

oder
= 47 Wiſpel — 23 Hbten

Man muß, nachdem man die Vierfas durch 4 dividiret hat, den Quotienten zu den Hbten addiren und zwar hier mit dem Pluszeichen; alsdenn die Hbten durch 40 dividiren, damit man die Anzahl

der Wiſpel bekomme, den Quotienten mit dem Minuszeichen zu den Wiſpeln addiren, und den Reſt mit dem Minuszeichen unter die Himpten ſetzen. So bekommt man 47 Wiſpel — 23 Hbten zum Produkt. Will man keine Minusgröße haben, ſo müßte man die 23 Hbten noch von den 47 Wiſpeln abziehen, und man hätte 46 Wiſpel 17 Hbten. Man kann überhaupt, auch wenn der Multiplikator das Minuszeichen hätte, auch in der Multiplikation mit benamten Zahlen multipliciren, wenn man Exempel hätte, da es nöthig wäre, welches aus den Lehren von der Mnltiplikation klar iſt, und der geſunde Verſtand, wenn eher es nöthig iſt, lehren muß.

§. 167. Die gemeinen Rechenbücher reden noch von einer Art der Multiplikation in benanmten Zahlen, welches ſie **reſolviren** nennen. Es iſt nichts anders, als Dinge von einer höhern Klaſſe in benamten Zahlen zu den niedrigern durch die Multiplikation zu bringen, und hat keine Schwierigkeit. Man muß nur wiſſen, wie wir ſchon oft geſagt haben, wie viel die Einheit der höhern Ordnung Einheiten der nächſt niedrigen in ſich begreifet. Multipliciret man mit dieſer die höhere Ordnung, ſo muß das Produkt nothwendig die nächſt niedrigern geben. Zum Exempel. Man will wiſſen, wie viel 3 Thlr. an Pfennigen ausmachen. Wenn man die 3 Thlr. mit 36 multipliciret, ſo hat man die Groſchen, weil 1 Thlr. 36 gr. hat. Das wären 108 gr. Weil nun 1 gr. 8 pf. hat, ſo müſſen 108 gr. in Pfennigen, achtmal 108 betragen. Alſo die 108 gr. mit 8 multipli-

tiplicirt, das bringt 864 pf. Es ſteht alſo:

```
   3 Thlr.
  36
 ————
 108 gr.
   8
 ————
 864 Pfennige.
```

Wir laſſen es den Lehrmeiſtern über, mehrere Exempel zur Uebung auch hierin ihren Schülern vorzugeben.

§. 168. Die Diviſion in benamten Zahlen geſchiehet, was die Operation ſelbſt anbetrift, auf die gewöhnliche Art, die wir §. 100 und folgende gelehrt haben: allein bey dieſem Verfahren ſind doch zwey Hauptfälle vorzüglich zu merken. Entweder, man ſoll eine gegebene benamte Größe, die aus einem oder mehrern Gliedern beſteht, durch eine andere gegebene Zahl dividiren, oder man ſoll eine oder mehrere Größen von geringerer Benennung zu höhern Benennungen bringen. Sehr oft ſind beyde Fälle verbunden, und dieſe beyden Fälle laſſen ſich wieder in verſchiedene andere abtheilen. Wir wollen uns bemühen, von allen deutlich zu reden.

Wir nehmen den letztern Fall zuerſt vor, welchen wir ohnedem ſchon bey der Addition und Multiplikation berühret und gebraucht haben, und alſo hier ganz kurz nur anführen, und er doch zur Diviſion in benamten Zahlen gehöret, weil es ſehr oft geſchieht, daß er mit dem erſtern verbunden iſt. Er war, wenn man geringere Benennung zu

größern bringen ſoll. Das wäre zum Exempel, wenn man wiſſen wollte, wie viel in einer Anzahl Himbten ſich Wiſpeln befänden. Nach einer kleinen Ueberzeugung ſieht man bald, daß, um dieſes finden zu können, man wiſſen müſte, wie viel Einheiten der geringern Ordnung zu einer Einheit der nächſt größern gehörten, und man dividirt dadurch ſolche Größe dieſe geringere Größe, ſo weis man, wie wir ſchon berührt haben, wie viel Einheiten der nächſt höhern darin ſtecken.

§. 169. Wir wollen doch noch einige Exempel davon geben. Z. E. 428 Pfennige wie viel Groſchen? Nun gehen 8 pf. auf einen Groſchen, alſo muß ich 428 durch 8 dividiren.

```
  428 | 53 mgr. alſo 53 mgr. 4 pf.
  (8).|
  40.
 ------------
  28
  (8)
  24
 ------------
  4 pf.
```

Wenn man dieſes recht betrachtet, und weis, daß 36 mgr. auf einen Thlr. gehen, ſo ſieht man, in den 53 mgr. ſtecken auch noch Thaler, man dividire die alſo durch 36.

```
  5.3 | 1 Thlr.
  (36)|
 ------------
  17 gr.
```

Wenn

Wenn man alſo ſtatt der 53 gr. das ſetzet, was man jetzt gefunden, ſo iſt alſo die Frage völlig beantwortet, und das Reſultat iſt 1 Thlr. 17 gr. 4 pf.

6100 Bogen Papier wie viel Ballen? Man muß hier wiſſen, Papier wird nach Bogen, Buch, Ries und Ballen berechnet, und hat ein Buch 24 Bogen; und 20 Buch machen ein Ries; und 10 Ries einen Ballen aus. Ich müſte alſo erſtlich durch die Diviſion mit 24 finden, wie viel Buch in 6100 Bogen wären, nachher den Quotienten mit 20 dividiren, ſo hätte ich die Ries, dieſen Quotienten wieder mit 10, ſo hätte ich die Ballen. Die Reſte zeigten an, was zu jeder kleinern Benennung noch gehörte.

6.100	254 Buch	12 Ries	1 Ballen
(24)..	(20).	10	
48..	54	2 Ries	
130.	(20)		
(24).	40		
120.	14 Buch		
1.0.0			
(24)			
96			
4 Bogen			

Alſo 1 Ballen, 2 Ries, 14 Buch, 4 Bogen.

§. 170. Nachdem wir gelernet haben, wie wir Dinge von geringerer Benennung durch die Diviſion zu größern Benennungen bringen ſollen,

können wir auch nun leicht begreifen, wie man eine gegebene benamte Größe, die aus einem oder mehrern Gliedern beſteht, durch eine gegebene Zahl dividiren ſoll. Wir wollen erſtlich ſehen, wie wir zu verfahren haben, wenn wir nur eine benamte Größe zu dividiren haben. Es iſt ſehr begreiflich, daß man ſie mit der gegebenen Zahl auf die gewöhnliche Art dividire, geht alles auf, oder iſt der Diviſor völlig einigemal darinn enthalten, ſo hat das gar keine Schwierigkeit. Man ſoll 9680 Thlr. in 4 Leute vertheilen, daß heißt, die Zahl mit 4 dividiren, damit man wiſſe, was jedweder bekömmt. Hier iſt vier in 9680, 2420mal enthalten, und alles geht gegen einander auf, alſo 2420 Thlr. iſt der Quotient, und ſo viel bekömmt ein jeder. Von ſolcher Art Exempel haben wir nicht nöthig, mehr anzuführen, ſie ſind für ſich ſelbſt ſchon klar. Allein es könnte doch kommen, daß man eine geringe Benennung zu dividiren hätte, und der Quotient würde ſo groß, daß in ihm auch Einheiten der nächſt höhern Benennung steckten: ſo müſte ich, um dieſen gefundenen Quotienten zum ſchicklichern, und doch ihm völlig gleichen Ausdruck zu bringen, den Quotienten noch mit den Größen dividiren, die mir anzeigten, wie viel Einheiten der niedrigern Ordnung auf eine Einheit der nächſt höhern giengen.

Z. E. 100000 Pfennige ſollten unter 10 Leute vertheilet werden. Alſo:

1̸0̸0̸0̸0̸0̸|10000 gäbe jedem 10000 Pfennige
1̸ 0̸|

Das

Das iſt noch kein ſchicklicher Ausdruck, man mache dieſe Pfennige mit 8 Groſchen:

```
  1.0000 | 1250 gr.
  (8)... |
 --------
  20..
   (8)..
  16..
 --------
   40.
   (8).
   40.
 --------
    0
   (8)
```

Alſo ſtatt 10000 Pfennige hätte ich nun 1250 gr. Auch das iſt noch nicht ſchicklich genug, weil darin noch Thaler ſtecken, folglich durch 36 dividirt

```
  12.50 | 34 Thlr.
  (36). |
  108.
 --------
  170
   (36)
  144
 --------
    26 gr.
```

Jeder bekömmt alſo 34 Thlr. 26 gr.

Auf eben die Art verfahren, brächten 967197 Vierfas durch 869 getheilet: 6 Wiſpel, 3 Scheffel, 8 Himbten, 1 Vierfas. Und 582528 Quentin durch 37 getheilet, gäbe zum Quotienten

tienten 1 Ct. 9 ℔ oder ſo viel bekäme jeder der 37, darunter es ſollte vertheilet werden. Es könnte aber drittens auch kommen, daß man eine Größe hätte, die zwar nicht von der geringſten Benennung wäre, aber doch, was ihre Zahl anbetrift, kleiner als der Diviſor: Z. E. es ſollten 12 mgr. in 24 Leute vertheilet werden. Hier iſt der Diviſor 24 größer als der Dividendus 12. Wäre die benamte Zahl von der kleineſten Benennung, ſo gienge keine Diviſion an, ſo daß eine ganze Zahl zum Quotienten käme, ſondern es käme ein Bruch (doch davon wiſſen wir noch nichts, weil wir die Lehre von Brüchen noch nicht gehabt haben.) Iſt aber die Zahl noch nicht von der geringſten Benennung, ſo kann ſie ja durch die Multiplikation mit der Größe, die anzeigt, wie viel Einheiten der nächſt niedrigern Ordnung auf eine Einheit dieſer Art gehen, zu der nächſt niedrigern Ordnung gebracht werden, ohne daß ſich die Größe im mindeſten verändert, und alsdenn dividiret werden. Hier bey dieſem Exempel, da 12 mgr. in 24 Leute ſollen vertheilet werden, müſte man 12 mgr. durch 8 zu Pfennigen machen, und denn ließe ſich es durch 24 theilen.

12 mgr	96	4 pf. Jeder bekömmt alſo 4 Pfennig.
8	(24)	
96	96	

Exempel: Es ſollen 4 Wiſpel in 200 Leute vertheilet werden. 4 läßt ſich durch 200 nicht dividiren, alſo die 4 Wiſpel mit 40 zu Himten, giebt

giebt 160 Himbten, das läßt ſich auch noch nicht durch 200 dividiren, alſo die 160 Himbten mit 4 zu Vierfas, giebt 640 Vierfas: das dividire man durch 200, und man bekömmt 3 Vierfas, und ein kleiner Reſt bleibt über.

4 Wiſpel	640	3 Vierfas
40	(200)	
160 Himbten	600	
4	40	
640 Vierfas		

So viel bekömmt ein jedweder.

Exempel: 5 Thlr. durch 36 getheilet. Der Quotient iſt 5 mgr.

1 Cr. durch 228 — — 16 Loth

4 Ballen in 3200, der Quotient iſt 6 Bogen

Endlich kann es auch kommen, daß man zwar Größen von größerer als der kleineſten Benennung hätte, die auch größer wären als der Diviſor, dieſer aber gienge nicht ganz darinnen auf: wie würde man alsdenn zu verfahren haben? Z. E. man ſollte 89 Thlr. in 6 Leute, jeden gleich viel vertheilen. Hier iſt 6 in 89 14mal enthalten, und 5 Thlr. bleiben noch im Dividendus übrig, die doch auch unter die 6 Leute zu vertheilen wären. Wenn ein ſolcher Fall vorkömmt, ſo muß man den Reſt durch die Multiplikation mit der Größe, die da anzeiget, wie viel Einheiten der nächſt niedrigern Benennung eine Einheit dieſer ausmachen, zur nächſt niedrigern Ordnung bringen, und alsdenn

denn wieder mit dem gegebenen Diviſor dividiren, und den Quotienten zu dem erſten Quotienten hinzu fügen, das macht alsdenn den wahren Quotienten aus. Es iſt dieſes auch leicht einzuſehen, denn es iſt ja einerley, ob ich den Reſt zur kleinern Benennung bringe, oder ſo laſſe, ſein Werth wird wirklich gar nicht durch die Bringung zur kleinern Benennung geändert.

Ich will dieſes eben angeführte Exempel wieder vornehmen, und das, was ich geſagt habe, dadurch erläutern. 89 Thlr. wird in 6 Leute getheilet. Alſo:

```
 89 | 14 Thlr.
  6.|
----
 29
(6)
 24
----
  5
```

nun bleiben 5 Thlr. zum Reſte.

Die mit 36 zu gr. gemacht, giebt 180 gr.

```
  36
   5
-----
 180
```

Aber 180 gr. und 5 Thlr. ſind völlig einerley. Dieſe 5 Thlr. oder 180 gr. ſollen doch auch getheilet werden: alſo dividiret man nun dieſe 180 durch 6, welches leicht angehet, und der Quotient iſt 30 gr. Man ſieht nun ein, daß dieſe 30 gr. mit zur Beantwortung der Frage gehören. Es bekömmt alſo jeder 14 Thlr. 30 mgr.

Exem-

Exempel: 125 Thlr. in 8 Leute getheilet.

```
 125 | 15 Thlr.
 (8).|
 ----
  45
  (8)
  40
 ----
  5 Thlr.
```

Die 5 Thlr. Reſt zu gr. ſind 180 gr. dividiret nun durch 8.

```
 180 | 22 gr.
 (8).|
 16.
 ----
  20
  (8)
  16
 ----
  4 gr.
```

Die 4 gr. Reſt zu Pfennigen, ſind 32 pf. Auch dividiret durch 8

```
 32 | 4 pf.
 (8)|
 32
```

Alſo der ganze Quotient iſt 15 Thlr. 22 mgr. 4 pf.

So werden 1423 Ballen, dividirt durch 480 zum Quotienten geben 2 Ballen, 9 Ries, 12 Buch, 22 Bogen.

§. 171. Nach allen dieſen Vorbereitungen wird es nun leicht ſeyn, eine zuſammengeſetzte benamte Größe zu dividiren. Nach der gemeinen Methode bringet man ſie erſt durch die Multiplikation mit den Größen, die anzeigen, wie viel Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachen, zur kleineſten Benennung. Alsdenn theilet man dieſe kleineſte Benennung durch den gegebenen Diviſor, und der Quotient iſt nun von der kleineſten Benennung. Nun bringet man dieſen Quotienten auf die Art, wie wir ſchon oft angezeiget haben, durch die Diviſion wieder zu den größern Benennungen, um ſchickliche Ausdrücke zu bekommen. Z. E. es ſollen 5875 Thlr. 23 mgr. 4 pf. in 47 Theile getheilet werden. So müßte man nach dieſer Methode die Thlr. mit 36 multipliciren, und zu dem Produkte die 23 gr. addiren, alsdenn die gefundenen Groſchen mit 8 multipliciren, und alsdenn die 4 pf. zu addiren, nun hätte man die ganze Größe in Pfennigen. Dieſe Anzahl Pfennige dividirte man denn durch die gegebenen 47. Der Quotient wäre wieder Pfennige. Dieſen Quotienten dividirte man mit 8, ſo bekäme man ihn in Groſchen, und denn den Quotienten der Groſchen durch 36, ſo bekäme man ihn endlich in Thalern. Das ſtünde alſo:

```
5875 Thlr. 23 gr. 4 pf.
  36
-------
 35250
17625
-------
211500 gr.
    23 gr.
-------
211523 gr.
     8
-------
1692184 pf.
      4 pf.
-------
1692188 pf.
```

```
1692188 | 36004 pf.          36004 | 4500 gr.
(47)....                     (8)...
141....                      32....
-------                      -------
 282...                       40..
 (47)...                      (8)..
 282...                       40..
-------                      -------
    1..                         0.
  (47)..                      (8).
-------                      -------
    18.                          4
  (47).                        (8)
-------                          0
   188                       -------
  (47)                         4 pf.
   188
```

4.500 | 125 Thlr. Alſo 125 Thlr. 4 pf.
(36)..
90.
(36).
72.
180
(36)
180
0

Aber man ſiehet bald, daß dieſes ungemein weitläuftig iſt. Wir wollen es bequemer machen. Man fängt von der großen Benennung zu dividiren an, geht alles auf, ſo iſt das ein Theil des Hauptquotienten, iſt das nicht, ſo iſt der Quotient dennoch ein Theil des Hauptquotienten. Den Reſt macht man nun zur nächſt niedrigern Benennung, addirt ihn dazu, und fängt nun dieſe Summe wieder an zu dividiren. Der Quotient iſt wieder ein Theil des Hauptquotienten. Bleibt wieder ein Reſt, ſo macht man den abermals zur kleinern Benennung, und addirt das dazu, was etwa davon noch im Dividendus iſt, und dividirt das wieder, das iſt wieder ein Theil des Hauptquotienten, und ſo verfährt man, bis man ganz fertig iſt. Es iſt dieſes auch leicht einzuſehen, denn die Reſte der Benennungen gehörten mit zum Dividendus, und es iſt ja einerley, ob ſie unter den gegebenen Namen blieben, oder ob ſie ihren Namen veränderten, wenn ſie nur ihren Werth behielten. Es iſt wahr, man muß die mehrſte Zeit eben ſo viele Operatio-

nen

nen machen, als bey der vorhergehenden Methode. Allein weil die Reſte ſehr oft nur klein ſind, laſſen ſie ſich leichter durch die Multiplikation zu kleinern Benennungen bringen, und kann man das mehrentheils im Kopfe thun. Wir wollen das vorige Exempel wieder vornehmen.

5875 Thlr. 23 gr. 4 pf. durch 47.

Man theile erſt die 5875 Thlr. durch 47.

```
5875 | 125
(47)..|
117.
(47).
 94.
235
(47)
235
```

Hier geht alles auf, alſo der erſte Theil des Hauptquotienten iſt 125 Thlr.

Nun ſind noch 23 gr. 4 pf. zu theilen. Die 23 laſſen ſich nun nicht durch 47 theilen, alſo, in dem Fall muß man ſie zu kleinern Benennungen bringen. Es ſind nebſt den 4 pf. dazu 188 pf. Dieſe durch 47 getheilet.

```
188 | 4 pf.
(47)|
188
```

Wieder ein Theil des Quotienten. Der ganze Quotient iſt alſo 125 Thlr. 4 pf. welches wir bey der erſten Methode auch fanden.

Noch ein Exempel: 76 Thlr. 6 mgr. 6 pf. dividirt durch 6. Erſtlich die 76 Thlr.

76 | 12 Thlr.
(6).
16
(6)
12
4 Thlr.

Dieſen Reſt der 4 Thlr. zu gr. gemacht, und die 6 gr. zu addirt, macht 150 mgr. wieder dividirt durch 6.

150 | 25 gr.
(6).
12.
30
(6)
30

Nun noch 6 pf. in 6

6 | 1 pf.
6 |

Alſo der ganze Quotient iſt 12 Thlr. 25 mgr. 1 pf.

Exempel. 217 Thlr. 20 gute Groſchen 2 pf. durch 13, giebt zum Quotienten 16 Thlr. 18 ggr. 2 pf.

770118 Ballen, 5 Ries, 6 Buch, 8 Bogen durch 78632, giebt zum Quotienten, 9 Ballen, 7 Ries, 18 Buch, 19 Bogen.

Es kann unter den Diviſionsexempeln auch welche geben, wo erſt Summen durch die Addition verbunden, auch durch die Subtraktion getrennet wer-

werden, die man nachher dividiren ſoll, und wie in allen Rechnungsarten, alſo auch hier muß der Verſtand es oft beurtheilen, ob ein vorgegebenes Exempel zur Diviſion in benamten Zahlen gehöre. Wir wollen doch einmal eines hieher ſetzen. Ein Oberſte bekömmt von verſchiedenen Kaſſen folgende Einnahmen; von der einen 554 Thlr. 12 gr. 4 pf. von der andern 680 Thlr. 6 gr. von der dritten 700 Thlr. davon ſoll er 1200 Mann einen Monat ſalariren, wie viel bekömmt jeder? Hier müſſen nothwendig die Summen erſt addirt, und denn durch 1200 dividirt werden. Alſo:

554 Thlr.	12 gr.	4 pf.		1934 | 1 Thlr.
680 "	6 "	- "		1200 |
700 "				
1934 Thlr.	18 gr.	4 pf.		734 Thlr.

734 Thlr. zu gr.
36
―――
4404
2202
―――
26424 gr.
18 addirt
―――
26442 gr.

 26442

76447 | 22 gr.
(1200).
2400.

2447
(1200)
2400

42 gr.

42 zu pf.
8

336
4

340 pf.

Der Pfennige ſind nicht genug, ſie in 1200 zu theilen, wir wollen ſie jetzt einmal beyſeit ſetzen, da es jedem nicht einen pf. bringt. Es bekam alſo jeder 1 Thlr. 22 gr.

§. 172. Die Diviſion in benamten Zahlen wird durch die Multiplikation probirt: wenn man den gefundenen Quotienten durch den Diviſor multiplicirt, ſo muß der Dividendus wieder herauskommen, geſchieht das, ſo hat man richtig gerechnet. Der Grund liegt in dem Verfahren der Diviſion überhaupt, denn wenn man den Quotienten ſo vielmal nimmt, als er im Dividendus ſteckte, ſo muß ja nothwendig das Produkt der Dividendus ſeyn. Exempel, 76 Thlr. 6 mgr. 6 pf. durch 6 dividirt, gab zum Quotienten 12 Thlr. 25 mgr. 1 pf. Man multiplicire das mit 6, ſo kömmt der Dividendus heraus.

12 Thlr. 25 mgr. 1 pf.
6

76 Thlr. 6 mgr. 6 pf.

Das ſiebente Kapitel.

Von den Brüchen

§. 173. Wir haben bisher einige Hauptveränderungen der ganzen Zahlen und ihre Behandlung gezeiget. In dem Kapitel vom Dividiren war immer der Diviſor kleiner als der Dividendus, und alsdenn ſteckt er ein oder etliche mal im Dividendus, welches mir der Quotient anzeigte, manchmal blieb auch noch ein Reſt übrig. Jetzt wollen wir aber einmal den Diviſor größer als den Dividendus annehmen. Es ſey erſtlich bey der Einheit. Wir wollen 1 durch 2, 3, 4 u. ſ. w. dividiren, welches geſchrieben alſo ſtehen würde, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Man ſieht, hier iſt der Diviſor im Dividendus nicht **einmal** enthalten. Indeſſen muß ſich doch eine Einheit, wenn ſie anders trennbar iſt, und auf alle Fälle iſt ſie doch in Gedanken trennbar, in 2, 3 und mehr Theile theilen laſſen. Dieſe Theile aber ſind, wie man leicht einſieht, keine Ganzen, ſondern nur Stücke oder Theile des Ganzen, und heißen ein **Bruch**.

So iſt der Quotient von $\frac{1}{2}$ die Hälfte der Einheit, und wird **ein Halb** genannt. Von $\frac{1}{3}$ der dritte Theil der Einheit, und wird **ein Drittel** genannt, von $\frac{1}{4}$ der 4te Theil der Einheit, und heißt **ein Viertel**, u. ſ. w. Ueberhaupt bekommen dieſe Brüche, welche auch zugleich den

Quotienten vorſtellen können, ihren Namen von der Anzahl der Theile, in welche die Einheit getheilet iſt, wie wir das weiter unten noch ſagen werden.

§. 174. Man kann leicht gedenken, daß man die Einheit noch in mehr Theile, und in ſo viel, als man will, zertheilen kann. So wird man ſie in 5, 6, 10, 30, 80, 1000 und in mehr Theile, oder weniger theilen können; und wenn man das ſchreiben wollte, würde man ſchreiben müſſen, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{1000}$ ꝛc. und das wäre denn von der Einheit der fünfte, ſechſte, zehnte, dreyßigſte, achtzigſte und der tauſendſte Theil.

§. 275. Wenn man nun aber eine Einheit in beliebige Theile, z. E. in 3 oder 4 Theile, oder in ſo viel als man will getheilet, und einen ſolcher Theile genommen hätte, z. E. $\frac{1}{3}$, ſo könte man doch, wenn man wollte, noch einen von dieſen Theilen dazu legen, und man hätte $\frac{1}{3}$ und noch $\frac{1}{3}$, alſo zwey Drittel, man ſchreibet dieſes alſo: ($\frac{2}{3}$), legte man noch einen dazu, ſo hätte man drey Drittel $\frac{3}{3}$, und ſo könnte man nach gerade, wenn man nun immer einen eben ſo großen Theil dazu legte, vier Drittel ($\frac{4}{3}$), fünf Drittel ($\frac{5}{3}$) bekommen, und das nennt man alles **Brüche**. So ſind $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{100}{4}$ u. ſ. w. Brüche, die auf eben die Art entſtanden ſind, nemlich, daß man zu $\frac{1}{4}$ immer einen gleichen Theil geleget. Alle Brüche, ſie mögen ſeyn welche ſie wollen, können auf dieſe Art entſtehen. Z. E. $\frac{1}{25}$, da hätte ich die Einheit in 25 gleiche Theile getheilet, und immer einen Theil davon genommen, bis ich

ich ſieben ſolcher Theile gehabt hätte, und die wären alſo $\frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{7}{25}$. Man ſieht, daß das auf alle Fälle angeht, der Diviſor ſey ſo groß als er wolle. Wir gaben hier nur einigen Begrif von der möglichen Entſtehung der Brüche, und wie man ſie anſehen könnte. Wir gehen jezt weiter.

§. 176. Wenn der Diviſor ſo groß iſt als der Dividendus, ſo iſt der Quotient = 1. §. 113. Wenn der Diviſor kleiner als der Dividendus, ſo iſt der Quotient mehr als 1, denn er ſteckt alsdenn im Dividendus ein oder etliche mal; und wenn der Diviſor größer als der Dividendus, ſo muß der Quotient daher nothwendig weniger als 1 seyn. Solche Brüche, wo der Diviſor größer als der Di videndus, die alſo weniger als 1 ſind, heißen ächte Brüche, alſo z. E. $\frac{1}{4}, \frac{3}{12}, \frac{6}{23}, \frac{5}{36}$ u. ſ. w. Solche Brüche, wo der Diviſor kleiner als der Dividendus, heißen unächte Brüche, als z. E. $\frac{6}{4}, \frac{9}{8}, \frac{25}{20}, \frac{250}{124}$ u. ſ. w. und da iſt der Diviſor im Dividendus noch ein oder etliche mal in enthalten. Man kann alſo auf den Fall den Dividendus durch den Diviſor dividiren, und alsdenn den Reſt neben dem Quotienten anhängen, und den Diviſor darunter, wenn auch dieſer Reſt etwa noch ſollte getheilet werden. Der unächte Bruch wird alsdenn durch zwey Glieder vorgeſtellet. Z. E. $\frac{12}{7}$ wäre $1 + \frac{5}{7}$; $\frac{9}{8}$ wäre $1 + \frac{1}{8}$, welches aus dem obigen, und dem Kapitel von der Diviſion der ganzen Zahlen ſchon klar iſt. Brüche aber, wo der Diviſor ſo groß als der Dividendus, können immer als 1 angeſehen werden, und ſind einan-

der vollkommen gleich. So ſind z. E. $\frac{4}{4}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{40}{40}$ = 1 unter einander gleich, weil der Diviſor im Dividendus nur einmal ohne allen Reſt ſtecket.

§. 177. Man nennet bey einem Bruche die obere Zahl oder den Dividendus den **Zähler**, die untere oder den Diviſor den **Nenner**. Z. E. $\frac{3}{4}$, da iſt 3 der Zähler und 4 der Nenner. Man heißet aus der Urſache die unterſte Zahl den **Nenner**, weil ſie nennet oder anzeigt, in wie viel Theile die Einheit getheilt ſey, und die obere Zahl anzeiget oder zählet, wie viel man ſolcher Theile genommen habe, oder wie viel ſolcher Theile da ſind. Wenn man die Brüche ausſpricht, ſo hängt man an das Wort, welches die untere Zahl oder den Nenner anzeiget, die Sylbe **Theil** oder **tel** an, und die obere ſpricht man blos aus. So ſpricht man $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{12}$ aus, zwey Drittel, fünf Zwölftel. Wir haben davon ſchon etwas im §. 173 erwähnet.

§. 178. Weil man durch Buchſtaben alle mögliche Größen und Zahlen bezeichnen kann, ſo wird es auch leicht begreiflich ſeyn, daß man auch Brüche in Buchſtaben bezeichnen kann. Z. E. $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ $\frac{n}{m}$ u. ſ. w. Hier heißt der obere Buchſtabe gleichfalls der **Zähler** und der untere der **Nenner**, und ſie werden auf die gelehrte Art, wie die Zahlbrüche ausgeſprochen $\frac{a}{b}$, a btel; $\frac{c}{d}$ c dtel u. ſ. w. Iſt bey ſolchem Bruche der Zähler und Nenner einerley, ſo muß er a ch = 1 ſeyn, weil der Diviſor im Dividendus alsdenn ein-

einmal enthalten iſt, und ſolche Brüche müſſen denn auch unter einander gleich ſeyn, weil jeder = 1 iſt. Alſo, z. E. $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \frac{d}{d} = 1$.

§. 179. In dem gewöhnlichen Dividiren können Quotienten verſchiedener Exempel einander völlig gleich, oder gleich groß ſeyn, wenn ſchon die Diviſoren und Dividendus der Exempel einander nicht gleich ſind. Es kömmt nur darauf an, ob in den verſchiedenen Exempeln der Diviſor im Dividendus gleich vielmal enthalten ſey. Alſo ſind z. E. die Quotienten von 8 dividirt durch 4, und von 12 dividirt durch 6, einander vollkommen gleich, beyde = 2. Da man beym Bruche den Zähler als den Dividendus, und den Nenner als den Diviſor betrachten kann, ohngeachtet man nicht allezeit wirklich dividiren kann, ſo ſiehet man auch, daß auch verſchiedene Brüche einander gleich ſeyn können, ohngeachtet die Zähler und Nenner ſehr von einander verſchieden ſind. So iſt z. E. $\frac{1}{2}$ gewiß = $\frac{6}{12}$; wie wir das hernach deutlich ſehen werden. Bey gewöhnlichen Dividirexempeln, wo auch der Dividendus und Diviſor ſehr verſchieden, ſind die Quotienten größer oder kleiner gegen einander, nachdem der Diviſor im Dividendus mehr oder weniger mal enthalten iſt. So kann man alſo auch von verſchiedenen Brüchen urtheilen. Sie können bey ihren verſchiedenen Nennern und Zählern einer größer oder kleiner als der andere ſeyn, und das könnte man doch verlangen, zu wiſſen. Nur daß man da nicht allezeit wirklich dividiren kann. Wir könnten zwar nun hier eine

Me-

Methode anzeigen, die in die Diviſion ſchlägt, wodurch man die verſchiedene Größe oder Kleinheit der Brüche unter einander beurtheilen kann. Wir halten ſie aber für Anfänger zu ſchwer, und unten noch in dieſer Lehre wollen wir eine geſchwinde Methode davon anzeigen. Jetzt begnügen wir uns, die Methode anzuzeigen, die man gewöhnlich gebraucht, wenn man von der Größe der Brüche unter einander urtheilen will, und die wir auch überhaupt in dieſer ganzen Lehre ſehr nützen werden.

§. 180. Wir wollen vom Kleinen anfangen. Man hätte zwey Brüche, die man mit einander vergleichen wollte, entweder ſie ſind nun von gleichen Nennern, oder von ungleichen Nennern. Sind ſie von gleichen Nennern, ſo iſt die Vergleichung von ſelbſt deutlich; der wird der größte ſeyn, welcher den größten Zähler hat. Man habe z. E. $\frac{2}{6}$ und $\frac{5}{6}$ zu vergleichen, ſo ſiehet man bald, daß $\frac{5}{6}$ mehr iſt als $\frac{2}{6}$, weil da der Zähler am größten iſt. Das heißt, bey beyden iſt die Einheit in 6 Theile getheilet, bey $\frac{2}{6}$ hat man von dieſen Theilen 2 genommen, und bey $\frac{5}{6}$ hat man 5 davon genommen.

Es iſt keine Schwierigkeit, es zu begreifen, daß der letzte Bruch von einem größern Werth iſt. Von $\frac{12}{133}$ und $\frac{24}{133}$ iſt der letzte der größeſte u. ſ. w. Aber wenn die Nenner nicht gleich ſind, z. E. $\frac{4}{5}$ und $\frac{6}{7}$? Man wird bald auf den Einfall gerathen, wenn es möglich wäre, dieſe Brüche alſo zu verändern, daß beyde einerley Nenner bekämen, ohne daß doch aber ihr Werth im mindeſten verändert würde, ſo würde man ſie leicht ver-

gleichen

gleichen können. Und das geht wirklich an. Man heißt dieſes Brüche unter einerley Benennung zu bringen. Man erinnere ſich aus der Diviſion §. 138. daß, wenn eine Größe mit einerley Zahl multipliciret und dividiret wird, die Größe doch eben dieſelbige bleibe, denn um ſo vielmal ſie vermehrt wird, um ſo vielmal wird ſie auch vermindert. Man kann bey einem Bruche den Zähler als den Dividendus, nnd den Nenner als den Diviſor betrachten. Werden beyde, Nenner und Zähler, mit einerley Zahl multipliciret, ſo iſt das eben ſo viel, als ob die Größe gar nicht geändert wird. Wenn man z. E. bey $\frac{4}{5}$ den Zähler mit 7 multipliciret, alſo 7mal größer macht, eben auch den Nenner 7mal größer macht, oder mit 7 multipliciret, ſo ändert das den Bruch $\frac{4}{5}$ nicht, er würde nun alſo ausſehen $\frac{4.7}{5.7} = \frac{28}{35}$.

Eben ſo iſt es auch wahr, daß, wenn ich Zähler und Nenner mit einerley Zahl dividirte, der Bruch auch nicht geändert würde, weil der Dividendus um eben ſo vielmal kleiner gemacht wird, als auch mit dem Diviſor geſchehen iſt, folglich immer noch eben der Qoutient gedacht werden müßte. §. 138. Wenn man z. E. bey $\frac{4}{6}$ die 4 halb ſo groß machte, oder durch 2 dividirte, aber auch den Diviſor d. Nenner hier die 6 auch nur halb ſo groß machte, oder auch durch 2 dividirte, ſo wäre der Bruch nicht geändert. Dieſes ſtünde alſo: $\frac{4:2}{6:2}$ wäre, wenn man wirklich dividirte $= \frac{2}{3}$. Eben dieſes gilt für Buchſtabenbrüche. Denn da die Buchſtaben alle mögliche Zahlen und Größen bedeu-

deuten können, ſo wird der Bruch $\frac{a}{b}$ alle mögliche Brüche, und $\frac{m}{m}$ auf alle mögliche Fälle = 1 ſeyn. Alſo: $\frac{a.m}{b.m}$ muß nicht von $\frac{a}{b}$ unterſchieden ſeyn; imgleichen aus eben den Gründen $\frac{a:m}{b:m}$ kann auch nicht von $\frac{a}{b}$ verſchieden ſeyn. Aus allen dieſen folgt die allgemeine Regel: **Zähler und Nenner eines Bruchs, beyde mit einerley Größe multiplicirt, oder dividirt, ändert den Bruch nicht.**

§. 181. Nun wir dieſes wiſſen, ſoll es uns nicht mehr ſchwer werden, zwey gegebene Brüche unter einerley Benennung zu bringen, oder ihnen einerley Nenner zu geben. Man muß nemlich ſuchen, Zähler und Nenner beyde mit ſolchen Zahlen zu multipliciren, oder, wenn es angehen will, zu dividiren, daß ſie einerley Nenner bekommen. Anfänger thun am beſten, wenn ſie es bey der Multiplikation laſſen, weil die auf alle Fälle angeht. Aber welche Zahlen nimmt man dazu? Denn daß ſie bey beyden Brüchen verſchieden ſeyn müſſen, ſieht man gleich, weil man ſonſt nimmermehr einerley Nenner bekäme. Wir wollen die beyden Brüche wieder vornehmen, $\frac{4}{5}$ und $\frac{6}{7}$, bey jedem muß eine andere Zahl ſeyn, die Zähler und Nen-

Nenner multiplicirt, und in beyden gleiche Nenner hervorbringt. Man betrachte aber nur, wenn **man jedes Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern multiplicirt, ſo bekömmt man in beyden einerley Nenner.** Dieſes iſt alſo die Regel, und weil bey jedem dieſer Brüche Zähler und Nenner alsdenn mit einerley Zahl multiplicirt ſind, ſo ſind die Brüche auch in Anſehung ihrer Werthe wirklich nicht geändert. Will man alſo z. E. dieſe beyden Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ unter einerley Benennung bringen, ſo multiplicirt man bey $\frac{4}{5}$ Zähler und Nenner mit 6 dem Nenner des andern; und bey $\frac{5}{6}$ Zähler und Nenner mit 5 dem Nenner des andern. Dieſe Brüche würden nun alſo ausſehen $\frac{4.6}{5.6}$ und $\frac{5.5}{6.5}$ wirklich multiplicirt $= \frac{24}{30}$ und $\frac{25}{30}$.

Man ſiehet auch gleich, daß man durch die Anwendung dieſer Regel in beyden Brüchen **einerley Nenner** bekömmt, denn wenn man jeden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern multipliciret, ſo wird der Bruch dadurch nicht nur gar nicht geändert, ſondern natürlich kommen auch dadurch in beyden Nennern einerley Faktoren, nur daß ſie in andrer Ordnung ſind, welches aber, wie uns bekannt iſt, in Anſehung des Produkts keinen Unterſchied machet.

Exempel. $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{7}$ unter einerley Benennung gebracht, $= \frac{3.7}{8.7}$ und $\frac{5.8}{7.8} = \frac{21}{56}$ und $\frac{40}{56}$.

Ferner: $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{7} = \frac{1.7}{4.7}$ und $\frac{1.4}{7.4} = \frac{7}{28}$ und $\frac{4}{21}$.
$\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{12} = \frac{3.12}{4.12}$ und $\frac{7.4}{12.4} = \frac{36}{48}$ und $\frac{28}{48}$.
$\frac{9}{10}$ und $\frac{11}{12} = \frac{9.12}{10.12}$ und $\frac{11.10}{12.10} = \frac{108}{120}$ und $\frac{110}{120}$

Wenn

Wenn man alſo zwey Brüche unter einerley Benennung gebracht hat, ſo kann man ſie leicht in Anſehung ihrer Größe vergleichen. Das iſt der größte, deſſen Zähler der größte iſt, da man alſo in einer in gewiſſe Theile getheilten Größe die mehrſten Theile genommen hat. Dieſe Methode, zwey Brüche unter einerley Benennung zu bringen, gilt auch bey Buchſtabenbrüchen, und muß gelten, weil Buchſtaben, ja auch Größen und Zahlen, und in eben der Rechnung einerley Buchſtaben eben die Größe bedeuten. Es ſoll $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ unter einerley Benennung gebracht werden. Es iſt $= \frac{a.d}{b.d}$ und $\frac{c.b}{d.b}$

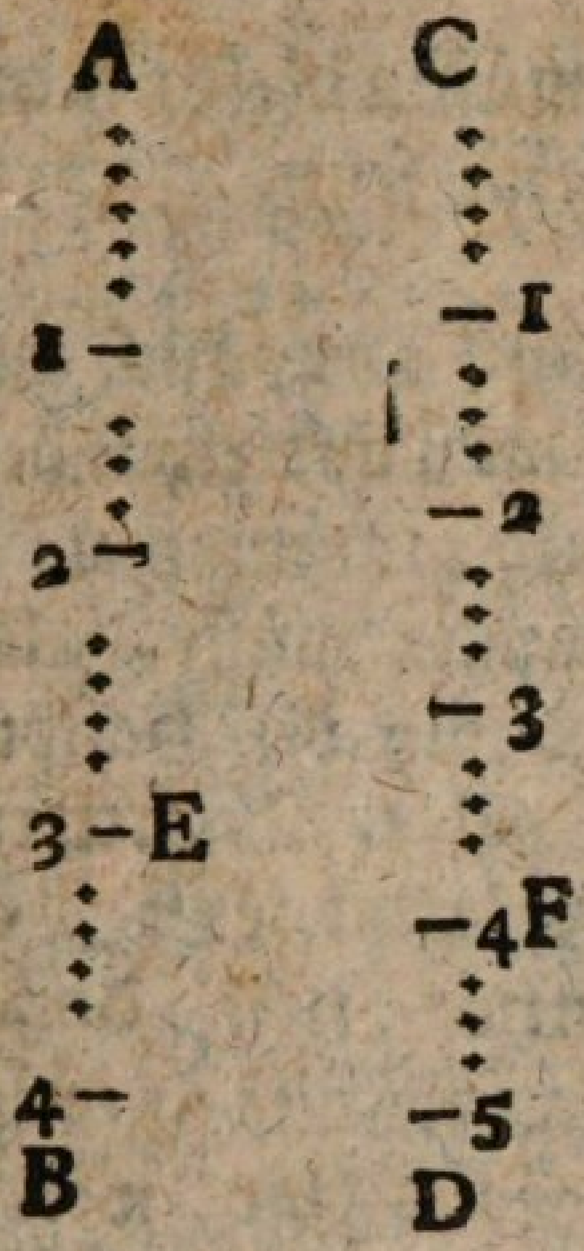
Ferner: $\frac{n}{m}$ und $\frac{r}{s} = \frac{n.s}{m.s}$ und $\frac{r.m}{s.m}$

$\frac{1}{2}$ und $\frac{r}{m} = \frac{1.m}{2.m}$ und $\frac{2.r}{2.m} = \frac{m}{2.m}$ und $\frac{2.r}{2.m}$

§. 181. Wir wollen doch dieſe Regel, daß alsdenn, wenn zwey Brüche durch Multiplicirung eines jeden Nenners und Zählers mit dem Nenner des andern unter einerley Benennung gebracht werden, ihr Werth darum nicht geändert wird, durch ein deutliches Exempel erläutern.

AB und CD ſollen zwey gleich lange Linien ſeyn, die alſo beyde, jede als die Einheit betrachtet werden können. AB ſey in 4 gleiche Theile getheilet, und CD in 5 gleiche Theile.

A



Nun wollen wir auf die Linie A B drey Theile nehmen, alſo von A bis E, ſo hätte man $\frac{3}{4}$, und auf der Linie C D 4 Theile bis F, ſo hätte man $\frac{4}{5}$, dieſe $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ wollen wir mit einander vergleichen, und alſo unter gleiche Benennung bringen. Dieſes geſchieht, wenn $\frac{3.5}{4.5}$ und $\frac{4.4}{4.5}$. Alſo, nun iſt der Nenner in beyden = 20, und iſt der Zähler in einem 15, in dem andern 16. Wenn ich beyde Linien in 20 Theile theile, wird ihre Größe nicht geändert. Ich müßte alsdenn jeden Theil der Linie AB in 5, und jeden Theil der CD in 4 gleiche Theile theilen. Wenn ich nun bey der erſten bis E zähle, habe ich 15 ſolcher Theile, und bey der zweyten bis F 16 ſolcher Theile, alſo nun $\frac{15}{20}$ und $\frac{16}{20}$, indeſſen iſt E und F

nichts verrückt, alſo müſſen dieſe neuen Brüche den Brüchen $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ gleich ſeyn.

§. 183. Man kann aber auch mehr Brüche als zwey haben, die man mit einander vergleichen will. Man wird bald muthmaßen, daß man es auf ähnliche Art anfangen müſſe, als bey dieſen. Freylich; und hier iſt nun die Hauptregel: **man multiplicires bey allen Brüchen, es mögen auch noch ſo viel ſeyn, eines jeden Zähler und Nenner mit den Nennern aller übrigen.** Daß ſie alle einerley Nenner bekommen, iſt ſchon daraus klar, weil eines jeden Nenner aus der Multiplikation gleicher Faktoren entſteht, indem er mit allen übrigen Nennern multipliciret wird, und daß ſie in Anſehung ihres Werths ungeändert bleiben, folgt daraus, weil bey einem jeden Bruche, außer ſeinem eigenen Zähler und Nenner, im Zähler und Nenner immer gleiche Faktores ſind, und es alſo ſo gut iſt, als ob eine Größe im Diviſor und Dividend mit gleichen Zahlen multipliciret ſey, §. 138.

Ein Exempel ſoll dieſes erläutern. Man bringe unter einerley Benennung.

$$\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{2} = \frac{2.4.6.2}{3.4.6.2},\ \frac{3.3.6.2}{4.3.6.2},\ \frac{5.3.4.2}{6.3.4.2},\ \frac{1.3.4.6}{2.3.4.6}.$$

$$\text{Iſt} = \frac{96}{144}\ \frac{108}{144}\ \frac{120}{144}\ \frac{72}{144}$$

Nun ſind ſie unter einander leicht zu vergleichen.

Exem-

Exempel. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} = \frac{1.3.4.5.6.7}{2.3.4.5.6.7}$ $\frac{1.2.4.5.6.7}{3.2.4.5.6.7}$ $\frac{1.2.3.5.6.7}{4.2.3.5.6.7}$ $\frac{1.2.3.4.6.7}{5.2.3.4.6.7}$ $\frac{1.2.3.4.5.7}{6.2.3.4.5.7}$ $\frac{1.2.3.4.5.6}{7.2.3.4.5.6} = \frac{2520}{5040}$ $\frac{1680}{5040}$ $\frac{1260}{5040}$ $\frac{1008}{5040}$ $\frac{840}{5040}$ $\frac{720}{5040}$.

Ferner: $\frac{4}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} = \frac{4.7.3.2.4}{5.7.3.2.4}$ $\frac{3.5.3.2.4}{7.5.3.2.4}$ $\frac{2.5.7.2.4}{3.5.7.2.4}$ $\frac{1.5.7.3.4}{2.5.7.3.4}$ $\frac{1.5.7.3.2}{4.5.7.3.2} = \frac{672}{840}$ $\frac{360}{840}$ $\frac{560}{840}$ $\frac{420}{840}$ $\frac{210}{840}$.

Die gewöhnlichen Rechenbücher lehren auf eine etwas andere Art Brüche unter einerley Benennung zu bringen, die aber wirklich auf dieſe Methode herausläuft, und eben den Grund hat. Wir haben dieſe erwählet, weil ſie ſehr einleuchtend und deutlich iſt.

§. 184. Buchſtabenbrüche werden auf eben dieſe Art unter einerley Benennung gebracht, und der Grund davon iſt auch von dieſem Grunde bey Zahlen gar nicht unterſchieden. Ich darf alſo nur einige Exempel davon anführen.

$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}\ \frac{f}{g} = \frac{adg}{bdg}\ \frac{cbg}{dbg}\ \frac{fbd}{gbd}$;

$\frac{n}{m}\ \frac{r}{s}\ \frac{x}{y}\ \frac{1}{x} = \frac{nsyx}{msyx}\ \frac{rmyx}{smyx}\ \frac{xmsx}{ymsx}\ \frac{msy}{xmsy}$.

Bey den Brüchen von Zahlen, die unter einerley Benennung gebracht werden ſollen, kann man ſich manche Vortheile machen, welche auf dem Grunde beruhen, daß Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt, den Bruch nicht ändert. Man ſieht man-

nichmal, daß man nur nöthig hat, wenn man mehrere Brüche unter einerley Benennung bringen ſoll, bey einigen Zähler und Nenner mit dieſer, bey andern mit einer andern Zahl zu multipliciren, und bey manchen Zähler und Nenner mit einer Zahl zu dividiren. Es geht dieſes fürtreflich an, wenn die Nenner der verſchiedenen Brüche ſo beſchaffen ſind, daß, wenn die großen Nenner unter den verſchiedenen Brüchen in Faktores zerfället werden, auch die kleinen Nenner, und zum Theil auch Zähler mit unter dieſen Faktoren ſind. Z. E. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{16}, \frac{3}{12}$. In den Faktoren der größten Nenner ſtecken hier auch die kleinen 2 und 4. Nach einiger Ueberlegung ſieht man gleich, daß hier ein gemeinſchaftlicher Nenner die 4 werden kann. Alsdenn multiplicire man beym erſten Bruch Zähler und Nenner mit 2, und man bekömmt $\frac{2}{4}$. Den andern Bruch läſſet man ungeändert, weil er ſchon 4 zum Nenner hat. Alſo $\frac{3}{4}$. Beym dritten Bruch dividiret man Zähler und Nenner durch 4, ſo bekömmt man $\frac{1}{4}$, In den 4ten Bruch, Zähler und Nenner durch 3 dividirt, ſo bekömmt man auch $\frac{1}{4}$. Wir haben alſo:

$$\frac{1.2}{2.2}\ \frac{3}{4}\ \frac{4:4}{16:4}\ \frac{3:3}{12:3} = \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}.$$

Man lernet dieſe Verkürzungen nach gerade durch die häufige Uebung von ſelbſt.

§. 185. Wir haben §. 180 gezeiget, daß Zähler und Nenner, mit einerley Zahl multipliciret oder dividiret, den Bruch nicht ändere.

Man

Man weis daher, daß dieſe Brüche einander ſehr gleich ſeyn können, die noch ſo verſchieden ausſehen. Z. E. $\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{24}{36} = \frac{80}{120}$ u. ſ. w. Dieſe ſind hier alle entſtanden, daß in dem Bruche $\frac{2}{3}$ einmal Zähler und Nenner mit 5, einmal mit 6, einmal mit 12, einmal mit 40 multipliciret ſind, welches, weil jedesmal Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt ſind, den Bruch ſelbſt ungeändert gelaſſen hat. Nun wird man wol lieber den Bruch mit ſeiner kleinſten als mit der gröſten Benennung ſehen, weil er leichter ſich vorzuſtellen iſt. Man wird leichter $\frac{2}{3}$ als $\frac{80}{120}$ ſich vorſtellen können, und ſo kömmt man auf viele Brüche, die man gern zur kleinſten Benennung hätte. Man bringt ſie zu kleinern Benennungen, wenn man Zähler und Nenner mit einerley Zahl dividirt, und ihr Werth bleibt eben derſelbe. Bey Brüchen von wenig Zahlen findet man es auch bald durch Verſuche, mit welchen Zahlen man Zähler und Nenner dividiren muß, um ſie zur kleinern, oder zu der kleinſten Benennung zu bringen. Aber bey Brüchen, wo Zähler und Nenner aus vielen Zahlen beſtehen, findet man es nicht gleich allezeit.

Wir wollen jetzt eine Regel geben, die wir nachher durch ein Exempel erläutern, und alsdenn auch beweiſen wollen. Es kömmt jetzt darauf an, für zwey gegebene Zahlen ihr gröſtes gemeinſchaftliches Maas zu ſuchen, das heißt, eine Zahl, durch welche ſie beyde dividiret, nicht nur aufgehen, ſondern daß auch keine gröſſere Zahl möglich ſey,

wodurch ſie beyde devidirt aufgehen. Denn Zähler und Nenner ſind hier die beyden gegebenen Zahlen.

Hier iſt die Regel. **Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, geht alles auf, ſo iſt die kleinere Zahl ſelbſt das gröſte gemeinſchaftliche Maas beyder Zahlen; bleibt ein Reſt, ſo mache man den wieder zum Diviſor, und den erſten Diviſor zum Dividendus; bleibt wieder ein Reſt, ſo dividirt man damit wieder den lezten Diviſor, und ſo fähret man fort, bis alles aufgeht. So iſt der lezte Diviſor gewis das gröſte gemeinſchaftliche Maas von beyden Zahlen.**

Einige Exempel ſollen dieſe Regel erläutern. Man hat den Bruch $\frac{3}{81}$, man dividirt hier die gröſte Zahl durch die kleinſte, alſo 81 durch 3, oder den Nenner durch den Zähler. Bey einem ächten Bruch §. 176 iſt das allezeit, weil da der Zähler immer die kleinſte Zahl iſt. Aber 81 durch 3 dividirt geht ganz auf: alſo iſt hier 3 das gröſte gemeinſchaftliche Maas. Und wenn man nun wirklich Zähler und Nenner dividiret, ſo wird aus dem Bruch $\frac{3}{81}$ folgender $\frac{1}{27}$. Daß alsdenn die kleineſte Zahl, hier die 3, das gröſte gemeinſchaftliche Maas beyder Zahlen ſey, folget daraus, weil doch die kleineſte Zahl durch kein gröſeres Maas als durch ſich ſelbſt gemeſſen werden kann, folglich dieſes wol das gröſte gemeinſchaftliche Maas beyder Zahlen ſeyn müſſe.

Es

Es ſey der Bruch gegeben $\frac{384}{812}$. Man dividire den Nenner durch den Zähler. Alſo:

```
  812 | 2
(384) |
  768
  ---
   44
```

Nun macht man den Diviſor oder die 384 wieder zum Dividendus, und den Reſt 44 wieder zum Diviſor:

```
 384 | 8
(44) |
 352
 ---
  32
```

Nun macht man den Diviſor 44 wieder zum Dividendus, und den Reſt 32 zum Diviſor:

```
  44 | 1
(32) |
 ---
  12
```

Nun wieder 32 zum Dividendus und 12 zum Diviſor:

```
  32 | 2
(12) |
  24
 ---
   8
```

Nun 12 zum Dividendus und 8 zum Diviſor:

```
 12 | 1
(8) |
 18
 ---
  4
```

Nun 8 zum Dividendus und 4 zum Diviſor:

$$\begin{array}{c|l} 8 & 2 \\ (4) & \\ 8 & \end{array}$$

Hier geht alles auf, alſo dieſer letzte Diviſor oder 4 iſt das größte gemeinſchaftliche Maas, oder der größte gemeinſchaftliche Diviſor beyder Zahlen, 384 und 812 oder des Bruchs $\frac{384}{812}$. Alſo $\frac{384}{812} = \frac{384:4}{812:4} = \frac{96}{203}$. Zu einer kleinern Benennung kann der Bruch nicht gebracht werden. Wir müſſen aber nun auch beweiſen, daß man, wenn man alſo verfährt, den größten gemeinſchaftlichen Diviſor beyder Zahl finde. Wir wollen es an dieſem Exempel beweiſen, weil wir bey einem allgemeinen Beweis noch verſchiedene Dinge voraus ſetzen müſten, die wir in dieſe Anfangsgründe nicht bringen wollen, und auch der Beweis von dieſem Exempel ſich leicht auf alle mögliche Art wird appliciren laſſen.

Wir wollen, um es recht deutlich zu machen, nochmal das Exempel in der Reihe an einander hinſetzen.

$$\begin{array}{c|l} 812 & 2 \\ (384) & \\ 768 & \\ \hline 44 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 384 & 8 \\ (44) & \\ 352 & \\ \hline 32 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 44 & 1 \\ (32) & \\ 32 & \\ \hline 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 32 & 2 \\ (12) & \\ 24 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} 12 & 1 \\ (8) & \\ 8 & \\ \hline 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 8 & 2 \\ (4) & \\ 8 & \end{array}$$

Der

Der letzte Diviſor 4 iſt das Maas des vorhergehenden Diviſors, nemlich der 8, denn es bleibt bey der Diviſion nichts übrig, allein auch zugleich das Maas des vorhergehenden Dividendus der 12. Denn in dem, nemlich in der 12, war der vorige Diviſor, die 8, ein-oder etlichemal (hier einmal) und noch der Reſt 4 enthalten. Wenn man alſo den Reſt 4 zum Diviſor genommen hätte, ſo hätte ſowol 12 als 8 darin aufgehen müſſen. Da 12 durch die 4 gemeſſen wird, ſo muß auch der vorhergehende Dividendus 32 dadurch gemeſſen werden, denn der beſtand aus den 12 einigemal genommen plus dem Reſte, welche beyde die 4 miſſet. Da 32 dadurch gemeſſen wird, ſo muß der vorige Dividendus 44 auch dadurch gemeſſen werden, denn der beſtand aus der 32 etliche mal, oder hier einmal genommen, plus dem Reſte, welche beyde die 4 miſſet. Da 44 durch die 4 gemeſſen wird, ſo muß auch der folgende Dividendus 384 dadurch gemeſſen werden, denn der beſtand aus dem Diviſor 44 einigemal genommen, plus dem Reſte, welche beyde die 4 miſſet. Da 384 durch die 4 gemeſſen wird, ſo muß auch der vorige Dividend 812 dadurch gemeſſen werden, denn der beſtand aus den 384 etlichemal genommen, plus dem Reſte, welche beyde die 4 miſſet. Alſo muß 4 ein gemeinſchaftlicher Diviſor für beyde Zahlen, 384 und 812 ſeyn. Er muß aber auch der größte ſeyn. Denn wäre er nicht der größeſte, und es wäre ein größerer da, ſo müſte der den Reſt der erſten Diviſion, die 44 auch meſſen, wie aus dem Vorhergehenden klar iſt,

alſo auch den Reſt der 2ten, der 3ten, der 4ten, der 5ten, welches die 4 iſt. Aber 4 hat kein gröſſeres Maas, als ſich ſelbſt, folglich war das das Maas, und folglich iſt kein gröſſer gemeinſchaftlicher Diviſor möglich.

Anmerkung: Wir hätten können einige Vortheile angeben, dadurch man mannichmal einige Diviſionen erſparen kann, allein weil dies Buch für Anfänger geſchrieben iſt, dürfen wir keine zu ſchwere Dinge hineinbringen.

§. 186. Wenn man auf die gezeigte Art immerfort dividiret, und endlich auf den Diviſor 1 kömmt, ſo iſt dieſes ein Beweis, daß die beyden Zahlen kein gröſſeres gemeinſchaftliches Maas haben als die 1, und weil 1 nicht dividiret, ein Beweis, daß der Bruch zu keiner kleinern Benennung kann gebracht werden. Z. E. es ſey der Bruch gegeben, $\frac{53}{120}$

120 | 2	53 | 3	14 | 1	11 | 3	3 | 1	2 | 2
(53)	(14)	(11)	(3)	(2)	(1)
106	42	11	9	2	2
14	11	3	2	1	

Hier iſt der letzte Diviſor 1, alſo der Bruch $\frac{53}{120}$ kann nicht zur kleinern Benennung gebracht werden.

An

Anmerkung. Nachdem die Einheit iſt, davon man einen Bruch hat, wenn ſie nemlich ſehr klein iſt, ſo, daß ein Theil des Nenners in der Rechnung nicht viel ſagen will, pflegt man wol dem Zähler oder Nenner noch eins zuzugeben, wenn man ſieht, daß er dadurch leichter zur kleinern Benennung kann gebracht werden. Z. E. Wenn hier $\frac{53}{120}$ Theile eines Zolls wären; alſo der Zoll in 120 Theile getheilet, davon man 53 genommen hätte, und die Rechnung NB. erforderte keine ſtarke Genauigkeit, ſo könnte man wol $\frac{54}{120}$ ſetzen, und davon wäre der größte gemeinſchaftliche Diviſor 6, alſo $\frac{54}{120} = \frac{54:6}{120:6} = \frac{9}{20}$ welches ſchon faßlicher wäre.

§. 187. Wenn man unächte Brüche hat, §. 176 die man zur kleinern Benennung bringen will, ſo thut man beſſer, daß man, weil doch der Zähler größer iſt als der Nenner, oder den Nenner ein oder etlichemal in ſich faſſet, den Zähler durch den Nenner dividirt, und alsdenn neben dem ganzen Quotienten, noch den Reſt mit dem vorigen Nenner darunter hinſetzet, daß alſo der Reſt der Zähler wird, denn dieſer Reſt iſt ja noch ein Theil oder Theile der Einheit, die in ſo viel Theile, als der Nenner enthielt, zergliedert war. Z. E.

$\frac{26}{4} = 26 \,|\, 6\frac{2}{4}$

(4)

24

2

Alſo $\frac{26}{4} = 6\frac{2}{4}$. Ein ſolcher angehängter Bruch kann noch öfters zur kleinern Benennung gebracht werden,

wel-

welches man öfters gleich, ohne die vorher gelehrte Methode zu gebrauchen, ſehen kann. Hier kann Zähler und Nenner mit 2 dividirt werden, und $6\frac{2}{4}=6\frac{1}{2}$.

§. 188. Brüche, die aus Buchſtaben, die auch wol mit Zahlen vermiſcht ſind, beſtehen, laſſen ſich nur zu kleinern Benennungen bringen, wenn entweder Zahlen, ſowol im Zähler als Nenner ſich befinden, für welche man ein gemeinſchaftliches Maas finden kann, oder wenn in dem Zähler und Nenner ſich gleiche Buchſtaben befinden, oder wenn beydes da iſt; alsdenn gilt ebenfalls, wie man leicht einſehen wird, die allgemeine Regel: Zähler und Nenner, mit einerley Größe dividiret, ändert den Bruch nicht. Z. E. $\frac{4ab}{12c}$ kann zu kleinerer Benennung gebracht werden, weil man hier für die Zahlen ein gemeinſchaftliches Maas finden kann, es iſt $= \frac{4ab:4}{12c:4} = \frac{ab}{3c}$ eben ſo $\frac{abc}{adc} = \frac{abc.ac}{adc:ac} = \frac{b}{d}$ und $\frac{a^2b}{a^3} = \frac{a^2b:a^2}{a^3:a^2} = \frac{b}{a}$ auch $\frac{9ab^2}{12b^2} = \frac{9ab^2:3b^2}{12b^2:3b^2} = \frac{3a}{4}$

Iſt das aber nicht, ſo können ſie zu keiner kleinern Benennung gebracht werden, weil man ja die Buchſtaben als allgemeine Größen anſieht, die man noch nicht beſtimmt hat, alſo keinen gemeinſchaftlichen Diviſor dafür ſuchen kann. Z. E

ac

$\frac{ac}{db}$ oder $\frac{3ab}{5cd}$ oder $\frac{x}{yd}$ konnen zu keiner kleinern Benennung gebracht werden.

§. 189. Noch eine Anmerkung, ehe wir weiter gehen. Weil 1 nicht dividiret, ſo kann man jede ganze Zahl als einen Bruch ſchreiben, deſſen Nenner 1 iſt. Alſo $6 = \frac{6}{1}$, $12 = \frac{12}{1}$, $116 = \frac{116}{1}$ auch in Buchſtaben. Z. E. $a = \frac{a}{1}$ $xy = \frac{xy}{1}$ u. ſ. w. Daß das angeht, fällt von ſelbſt in die Augen, aber wir werden unten ſehen, daß uns das ſehr vortheilhaft iſt.

§. 190 Nach dieſen Vorbereitungen gehen wir zu den verſchiedenen Veränderungen, die man durch die **Addition, Subtraktion, Multiplikation** und **Diviſion** mit den Brüchen vornehmen kann.

Wir reden erſtlich von der **Addition** der Brüche. Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, ſo ſind ſie leicht zu addiren, denn es ſind gleichartige Dinge. **Man addirt alsdenn die Zähler zuſammen, und ſezet den gemeinſchaftlichen Nenner darunter.** Z. E. $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$ denn die Zähler addirt, 1 und 3 iſt 4 alſo $\frac{4}{8}$, eben ſo macht man es, wenn man mehrere hat, als $\frac{1}{24} + \frac{5}{24} + \frac{7}{24} + \frac{8}{24} = \frac{21}{24}$. Es iſt auch dieſes leicht einzuſehen, denn man ſoll Theile von Einheiten zuſammen zählen, da die Einheit in einerley Theile getheilet iſt, wenn man zum Exempel $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8}$

$\frac{5}{8}$ von einer Elle Zeug hätte, alſo die Elle Zeug in 8 Stücke getheilet wäre, wovon man ein Stück, noch 2 Stück und noch 5 Stücke hätte, ſo würde niemand zweifeln, daß das nicht 8 Stücke zuſammen wären, und zwar von der Größe, da die Einheit in 8 Theile wäre getheilet worden, alſo zuſammen $\frac{8}{8} = 1$. Eben ſo auch mit Buchſtaben, und der Grund davon iſt eben der: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{n}{b} = \frac{a+c+n}{b}$ und $\frac{2a}{d} + \frac{x}{d} + \frac{r}{d} = \frac{2a+x+r}{d}$.

§. 191. Sind aber die Brüche nicht von einerley Benennung, ſo muß man ſie erſt unter einerley Benennung bringen, nach dem §. 181, und addirt ſie alsdenn, wie wir eben gezeigt haben, §. 190.

Man addire: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1.3.2.8}{5.3.2.8} + \frac{1.5.2.8}{3.5.2.8} + \frac{1.5.3.8}{2.5.3.8} + \frac{1.5.3.2}{8.5.3.2} = \frac{48}{240} + \frac{80}{240} + \frac{120}{240} + \frac{30}{240} = \frac{48+80+120+30}{240} = \frac{278}{240}$.

Ferner. Man addire: $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{10} = \frac{2.3.8.10}{5.3.8.10} + \frac{1.5.8.10}{3.5.8.10} + \frac{5.5.3.10}{8.5.3.10} + \frac{3.5.3.8}{10.5.3.8} = \frac{480}{1200} + \frac{400}{1200} + \frac{750}{1200} + \frac{360}{1200} = \frac{480+400+750+360}{1200} = \frac{1990}{1200}$.

An-

Anmerkung. Wenn man Brüche addirt, ſo bekömmt man oft in der allgemeinen Summe einen unächten Bruch, wo der Zähler größer iſt wie der Nenner, folglich die Einheit noch ſelbſt ein oder mehrere mal darin ſtecket, bey dieſen beyden Exempeln iſt es uns alſo ergangen. Sowol $\frac{278}{240}$ als $\frac{1990}{1200}$ iſt ein unächter Bruch. Bey ſolchen Fällen dividirt man den Zähler durch den Nenner, und hängt, wenn ein Reſt überbleibet, den Reſt als einen Bruch mit dem alten Nenner an, welchen man öfters noch durch die Diviſion des Zählers und Nenners mit einerley Zahl zur geringern Benennung bringen kann. Hier waren $\frac{278}{240}$ $= 1\frac{38}{240}$, und da läßt ſich der Bruch noch durch die Diviſion des Zählers und Nenners mit 2 zur geringſten Benennung bringen, er wird $= 1\frac{19}{120}$ welches faſt $1\frac{20}{120} = 1\frac{1}{6}$ iſt. Der andere Bruch $\frac{1990}{1200} = 1\frac{790}{1200}$ wenn man Zähler und Nenner durch 10 dividirt $= 1\frac{79}{120}$. Wenn es hier auf keine große Genauigkeit ankäme, und man zu den $\frac{79}{120}$ noch $\frac{1}{120}$ nähme, ſo wäre der Bruch $1\frac{80}{120}$ welches $1\frac{2}{3}$ wäre.

Ueberhaupt wenn man Brüche addirt, wenn man ſchon keinen unächten Bruch bekömmt, findet es ſich doch ſehr oft, daß man ſie zu kleinern Benennungen bringen kann, und findet man den gröſten gemeinſchaftlichen Theiler des Zählers und Nenners, wodurch man den Bruch zur kleineſten Benennung bringt, nach §. 185.

§. 192. Buchſtabenbrüche zu addiren iſt eben ſo leichte, man bringt ſie unter einerley Benennung, und

und ſetzet denn die Zähler durch das Zeichen + zuſammen, und giebt ihnen den gemeinſchaftlichen Nenner. Z. E. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{n}{m}+\frac{x}{y}=\frac{admy}{bdmy}$ $+\frac{cbmy}{dbmy}+\frac{nbdy}{mbdy}+\frac{xbdm}{ybdm}$ $=\frac{admy+cbmy+nbdy+xbdm}{bdmy}$

Man addire $\frac{1}{a}+\frac{b}{c^2}+\frac{d^2}{n}$ es iſt $=\frac{1c^2n}{ac^2n}$ $+\frac{ban}{c^2an}+\frac{d^2ac^2}{nac^2}=\frac{c^2n+ban+d^2ac^2}{ac^2n}$

Hier iſt keine weitere Verkürzung oder Reduction zur geringern Benennung möglich, wie ein jeder ſelbſt ſiehet.

§. 193. Unächte Brüche werden eben ſo addiret als die ächten, und es verſteht ſich von ſelbſt, daß man nachher durch die Diviſion des Zählers durch den Nenner die Einheiten heraus finden kann, und wenn etwa ein Reſt überbleibet, ſelbigen an die ganze Zahl des Quotienten als einen Bruch, welchen man dem Diviſor zum Nenner giebet, anhänget. Z. E. $\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}$ $=\frac{5.2.3+3.4.3+1.4.2}{4.2.3}=\frac{30+36+8}{24}=\frac{74}{24}$ $=3\frac{2}{24}=3\frac{1}{12}$

Man

Man kann auch ganze Zahlen und Brüche addiren. Jetzt erinnere man ſich, was wir §. 189 gelehret haben. Alſo wenn man eine Zahl und einen Bruch zuſammen zu addiren hat, ſo ſieht man die ganze Zahl als einen Bruch an, deſſen Nenner $= 1$ iſt, und bringt ihn mit dem Bruch unter einerley Benennung, und verfähret damit wie mit den andern Brüchen. Z. E. $4 + \frac{3}{4} = \frac{4}{1} + \frac{3}{4} = \frac{4.4}{1.4} + \frac{3.1}{4.1} = \frac{16}{4} + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$ eben ſo $5 + \frac{3}{4} = \frac{5}{1} + \frac{3}{8} = \frac{5.8}{1.8} + \frac{3.1}{8.1} = \frac{40}{8} + \frac{3}{8} = \frac{43}{8}$.

Man hat dieſes oft nöthig, daß man eine ganze Zahl zu einem Bruch addirt, und einen unächten Bruch daraus machet. Allein wenn man dieſe Exempel genauer betrachtet, ſo wird man bald einſehen, daß man auf folgende Art weit kürzer dazu gelangen kann. Man multipliciret die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, addirt den Zähler des Bruchs dazu, und ſetzet den alten Nenner darunter. Es iſt dieſes daher leicht begreiflich, weil die ganze Zahl mit eben der Zahl multiplicirt wird, womit ſie auch hernach dividirt wird, alſo ungeändert bleibt; es iſt überhaupt auch kein ander Nenner möglich, weil die ganze Zahl 1 zum Nenner hatte, und der neue Nenner durch die Multiplikation alter Nenner in einander bey der Addition der Brüche entſtehet, aber 1 nicht multipliciret. Man wollte alſo $2\frac{3}{4}$ zu einem Bruche bringen, alſo 4mal 2 iſt 8 und 3 dazu iſt 11, der neue Bruch heiſt alſo $\frac{11}{4}$ er ließe ſich auch alſo

betrachten: $2 + \frac{3}{4} = \frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{2.4}{1.4} + \frac{3.1}{4.1} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ welches die vorhergehende Betrachtung erläutert. Ferner $5\frac{3}{2} = \frac{10+3}{2} = \frac{13}{2}$ u. ſ. w. Eben das gilt auch in Buchſtaben. Man hätte die Größe $a + \frac{c}{d}$ das iſt $= \frac{a}{1} + \frac{c}{d} = \frac{ad+c}{d}$; $m + \frac{n}{m} = \frac{m^2+n}{m}$ hierin iſt gar nichts ſchweres.

Wenn man mehr als eine ganze Zahl, jede mit einem angehängten Bruche hätte, ſo addirt man die ganzen Zahlen zuſammen, und auch die Brüche, auf die gezeigte Art. Iſt der neue aus allen andern entſtandene Bruch ein ächter Bruch, ſo hänget man ihn an die Summe der ganzen Zahlen an, iſt es ein unächter, ſo ſuchet man durch die Diviſion des Zählers durch den Nenner die Einheiten heraus, addirt die noch zu den ganzen Zahlen, und ſetzet den Reſt mit dem alten Nenner darunter, als einen Bruch neben die Summe; welchen Bruch man, wenn es angeht, auch zur kleinern Benennung bringen muß. Ein Exempel: Man addite $1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8} + 3 + \frac{5}{6}$ Man addire erſt die ganze Zahlen, welche zuſammen 10 ausmachen. Nun die Brüche unter einerley Benennung $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6}$ =

$$= \frac{2.2.8.6 + 3.8.6. + 3.2.6 + 5.3.2.8}{3.2.8.6}$$

$$= \frac{192 + 144 + 36 + 240}{288} = \frac{612}{288} = 2\tfrac{36}{288} = 2\tfrac{1}{8}$$

dieſes zu 10 addirt, giebt $12\frac{1}{8}$.

Man könnte dieſe ganze Zahlen mit Brüchen vermiſcht, auch noch auf andere Art addiren, wenn man nemlich jede ganze Zahl mit ihrem Bruche zu einem unächten Bruche machte, wie wir eben gelehrt haben, und aus der Reihe:

$1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8} + 3 + \frac{5}{6}$

würde alsdenn $\frac{5}{3} + \frac{9}{2} + \frac{17}{8} + \frac{3}{1} + \frac{5}{6}$ nun brächte man dieſe Brüche zu einerley Benennung. Sie wären $= \frac{480 + 1296 + 612 + 864 + 250}{288} = \frac{3492}{288}$

$= 12\frac{36}{288} = 12\frac{1}{8}$.

§. 194. Dadurch, daß wir nun wiſſen, Brüche und ganze Zahlen zu addiren, haben wir zugleich auch die Addition in **gebrochenen benamten Zahlen** gelernet. Es iſt nemlich dieſe die Addition, wenn einem würkliche im gemeinen Leben vorkommende Dinge mit einem Bruch daran, oder ein Bruch alleine, mit andern ganzen oder gebrochenen Zahlen zuſammen zu addiren gegeben ſind. Es verſteht ſich, daß das, was man addiren ſoll, von einerley Art iſt, wie das ohnedem bey aller Addition durchaus erfordert wird. Man verfährt bey dieſer Addition auf die eben gelehrte

Art, und iſt gar nicht der mindeſte Unterſchied darunter, außer daß es vorkommen kann, daß, wenn man benamte Größen zwar von einerley Art, aber von verſchiedenen höhern und niedrigern Benennungen zu addiren hätte, man oft die Summen der ganz niedrigern Benennungen ſo groß bekommen kann, daß man ſie durch die Diviſion zu den höhern Benennungen bringen muß, da man denn freylich wiſſen muß, wie viel Einheiten der niedrigern Benennung auf eine Einheit der nächſt höhern gehen. Ein Exempel gehörig erkläret wird alles dieſes ſo deutlich erläutern, daß man die Exempel, die in den Rechenbüchern häufig angeführt werden, alle wird rechnen können.

Man addire	$5\frac{3}{8}$ rthl.	$6\frac{1}{3}$ gr.	$5\frac{1}{2}$ pf.
	$2\frac{1}{5}$ „	$4\frac{1}{6}$ „	$7\frac{3}{4}$ „
	$5\frac{2}{9}$ „	$9\frac{1}{10}$ „	$4\frac{1}{6}$ „
	$12\frac{287}{360}$ rthl.	$19\frac{108}{180}$ gr.	$17\frac{20}{48}$ pf.
		2	
	$12\frac{287}{360}$ rthl.	$21\frac{3}{4}$ gr.	$1\frac{5}{12}$ pf.

Hier hat man erſt jede Reihe ganzer Zahlen und jede Reihe Brüche addirt. In den Brüchen der Pfennige ſtecken nun noch ganze, weil es ein unächter Bruch iſt. Es ſind $1\frac{20}{48} = 1\frac{5}{12}$ pf. Man findet das, wenn man den gemeinſchaftlichen Nenner 48 macht, ſo erhält man an Brüchen $\frac{68}{48}$, welches ein unächter Bruch iſt. Dividiret giebt $1\frac{20}{48} = 1\frac{5}{12}$ das zu den ganzen Pfennigen addirt, giebt $17\frac{5}{12}$ pf. Alſo ſind überhaupt $17\frac{5}{12}$ pf. da ſtecken in den Pfennigen noch Groſchen. Durch 8 dividirt

giebt

giebt 2 gr. alſo bleiben nun für die Pfennige $1\frac{5}{12}$. Der Bruch bey den Groſchen $\frac{108}{180}$ läßt ſich zur kleinern Benennung bringen, er wird durch 36 im Zähler und Nenner dividiret $\frac{3}{5}$. Wir haben alſo Groſchen überhaupt, die von den Pfennigen herkommende zu addirt, $21\frac{3}{5}$. Die Thaler müſſen alſo bleiben, weil ſich der Bruch nicht zur kleinern Benennung bringen läßt. Man möchte ſagen, ob man denn ſolche Brüche der größern Benenuung, wie hier z. E. bey den Thalern und Groſchen nicht in Werthen der geringern Benennungen ausdrücken kann. Allerdings, allein es wird ſchicklicher seyn, daß wir dieſes im Schluſſe der Brüche lehren, wo es auch §. 224. vorkömmt.

§. 195. Bey der Subtraktion in Brüchen werden entweder Brüche von Brüchen, oder ganze Zahlen von Brüchen, oder Brüche von ganzen Zahlen oder Größen, wo auf einer oder auf beyden Seiten Brüche mit ganzen Zahlen vermiſcht ſind, abgezogen; wir wollen alle dieſe Fälle deutlich zu machen ſuchen, und allezeit der Buchſtabenbrüche Subtraktion mit erklären.

§. 196. Erſtlich Brüche von Brüchen abgezogen. Hier ſind entweder die Nenner dieſer Brüche gleich oder ungleich. Man kann nur gleichartige Dinge von einander abziehen, und alſo auch nur Brüche von einander, die gleiche Nenner haben, und dieſe Subtraktion iſt ſehr leichte. Sie heißt ſo viel, man ſoll von einer angezeigten Anzahl von Theilen, davon die Einheit in gleiche Theile

le getheilet war, und da alſo alle Theile unter einander gleich ſind, eine andere Anzahl von gleich großen Theilen, die dieſen völlig ähnlich ſind, wegnehmen. Z. E. von $\frac{5}{6}$ ſoll man $\frac{3}{6}$ abziehen, das heißt, von 5 Theilen, da die Einheit in 6 gleiche Theile getheilt war, ſoll man 3 Theile, da auch die Einheit in 6 gleiche Theile getheilt iſt, und wovon alſo jeder Theil ſo groß, als jeder Theil des erſtern iſt, wegnehmen. Wenn man 3 ſolcher Theile von $\frac{5}{6}$ abnimmt, ſo bleiben noch $\frac{2}{6}$ übrig, welche $= \frac{1}{3}$ ſind.

Wenn man einen Apfel in 6 Theile getheilet hätte, und 5 davon empfangen hätte, ſo hätte man $\frac{5}{6}$ und nähme jemand 3 davon weg oder $\frac{3}{6}$, ſo hätte man noch $\frac{2}{6}$ Theile. Dieſes iſt alles ſehr begreiflich. Hieraus fließet nun folgende Regel:

Man ſubtrahiret Brüche, die gleiche Nenner haben, von einander, wenn man den Zähler des Bruchs, den man abziehen ſoll, von dem Zähler des andern, wovon man ihn wegnehmen ſoll, ſubtrahiret, und den Nenner läſſet wie er iſt. Die Namen dieſer Brüche ſind eben wie bey ganzen Zahlen. Der, von welchem etwas abgezogen werden ſoll, heißt der **Minuendus**; das, was man von ihm nehmen ſoll, der **Subtrahens**, und was überbleibet, der **Reſt** oder die **Differenz**. Das Subtraktionszeichen iſt, wie bekannt, folgendes (—) z. E. von $\frac{8}{9}$ ziehe man ab $\frac{5}{9}$, da iſt $\frac{8}{9}$ der Minuendus, $\frac{5}{9}$ der Subtrahens, und $\frac{3}{9}$, welches nach geſchehener Abziehung übrig bleibt, der Reſt oder die

die Differenz. Wir dürfen nur einige Exempel hierüber machen, um völlig deutlich zu ſeyn:

Man ſubtrahire von $\frac{2}{3}$ die $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

von $\frac{11}{12}$ ſubtrahiret $\frac{3}{12} = \frac{11-3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ §. 180.

von $\frac{23}{36}$ ſubtrahiret $\frac{11}{36} = \frac{23-11}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ §. 180.

Bey Buchſtabenbrüchen, die gleiche Nenner haben, verfähret man eben ſo, nur iſt zu merken, daß man da nur die Subtraktion anzeigen kann mit dem Minuszeichen, wie wir hier auch ſchon bey den Zahlen thaten, die man doch nachher noch würklich ſubtrahiren konnte, das bey Buchſtaben nicht angeht, weil die alle mögliche Größen bedeuten.

von $\frac{a}{b}$ ſubtrahire $\frac{c}{b} = \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

von $\frac{xy}{m}$ ſubtrahire $\frac{h}{m} = \frac{xy-h}{m}$

von $\frac{a^2x}{rm}$ ſubtrahire $\frac{r}{rm} = \frac{a^2x-r}{rm}$

§. 197. Wenn aber die Nenner der Brüche, die von einander abgezogen werden ſollen, ungleich wären, ſo wird einem jeden bald einfallen das, was wir §. 180 und 181 gelehret haben, daß man ſie zu gleichen Benennungen vorher bringen müſſe, alsdenn werden ſie leicht von einander können abgezogen werden, weil ſie alsdenn gleichnamigte und

gleichartige Dinge ſind. Und das iſt auch die ganze Regel, die für Zahlen und Buchſtaben gilt, und die wir nun durch Exempel erläutern dürfen. Von $\frac{3}{4}$ ſubtrahiret $\frac{2}{9}$. Erſt unter einerley Benennung gebracht $= \frac{3.9}{4.9} - \frac{2.4}{9.4} = \frac{27}{36} - \frac{8}{36} = \frac{27-8}{36} = \frac{19}{36}$

von $\frac{5}{8}$ ſubtrahiret $\frac{7}{12} = \frac{5.12}{8.12} - \frac{7.8}{12.8} = \frac{60}{96} - \frac{56}{96}$ $= \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$ §. 180.

von $\frac{1}{3}$ ſubtrahiert $\frac{1}{8} = \frac{1.8}{3.8} - \frac{1.3}{8.3} = \frac{8}{24} - \frac{3}{24} = \frac{5}{24}$

In Buchſtaben von $\frac{a}{b}$ ſubtrahiret $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{c.b}{d.b} = \frac{ad-cb}{bd}$

von $\frac{x+r}{c}$ ſubtrahiret $\frac{n}{m} = \frac{(x+r)m}{cm} - \frac{nc}{mc} = \frac{xm+rm-cn}{cm}$ oder $\frac{(x+r)m-cn}{cm}$

von $\frac{1}{x}$ ſubtrahiret $\frac{1}{y} = \frac{1.y}{xy} - \frac{1.x}{yx} = \frac{y-x}{xy}$

von $\frac{a^2x}{dn}$ ſubtrahiret $\frac{cn}{a} = \frac{a^2x.a}{dn.a} - \frac{cn.dn}{adn}$ $= \frac{a^3x}{adn} - \frac{cdn^2}{adn} = \frac{a^3x-cdn^2}{adn}$

§. 198. Wir wollen nun Brüche von ganzen Zahlen, und ganze Zahlen von Brüchen ſubtrahiren. Es wird leicht ſeyn, wenn man ſich erinnert, daß jede ganze Zahl einem Bruch gleich ſey, deſſen Nenner = 1 iſt. §. 189. Nun iſt nichts

wei

weiter zu bemerken, als daß man dieſe Brüche gleichfalls unter einerley Benennung bringen, und alsdenn auf die gewöhnliche Art verfahren müſſe.

Z. E. von 1 ſubtrahiret $\frac{3}{4} = \frac{1}{1} - \frac{3}{4} = \frac{1.4}{1.4} - \frac{3.1}{4.1} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

von 5 ſubtrahiret $\frac{3}{8} = \frac{5}{1} - \frac{3}{8} = \frac{5.8}{1.8} - \frac{3.1}{8.1} = \frac{40}{8} - \frac{3}{8} = \frac{40-3}{8} = \frac{37}{8} = 4\frac{5}{8}$ Anmerkung §. 191.

Man bemerke hiebey, daß es nothwendig ſey, daß alsdenn die Differenz ein unächter Bruch ſeyn müſſe, wenn der Minuendus > 2 und der Subtrahens < 1 und alſo ein ächter Bruch iſt, denn alsdenn wird ja nicht einmal eine Einheit davon abgezogen, und der Reſt muß alſo mehr als 1 ſeyn, und wenn der in einen Bruch geſetzt iſt, nothwendig ein unächter Bruch. Wenn der Subtrahens eine ganze Zahl, und der Minuendus ein ächter Bruch, zum Exempel wenn von $\frac{3}{4}$ ſubtrahiret werden ſoll 1 oder eine jede andere ganze Zahl, ſo muß die Differenz nothwendig eine Minusgröße werden, weil mehr von ihr weggenommen wird, als ſie ſelbſt geweſen iſt, alſo der Reſt nothwendig ins Entgegengeſetzte kommen muß. Wir wollen dieſes Exempel behalten. Von $\frac{3}{4}$ ſubtrahiret $1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{1} = \frac{3.1}{4.1} - \frac{1.4}{1.4} = \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \frac{3-4}{4} = -\frac{1}{4}$

von $\frac{5}{8}$ ſubtrahiret $6 = \frac{5}{8} - \frac{6}{1} = \frac{5.1}{8.1} - \frac{6.8}{1.8} = \frac{5}{8} - \frac{48}{8} = -\frac{43}{8} = -5\frac{3}{8}$.

Man kann dabey die kurze Regel bemerken, daß man in ſolchen Fällen umgekehrt den Minuen-

dus von dem Subtrahens nimmt, und die Differenz mit dem Minuszeichen ſetzet.

Hätte man in Buchſtaben von einer ganzen Größe einen Bruch zu ſubtrahiren, ſo verfähret man eben ſo, wie wir bey Zahlen gelehrt haben. Denn a iſt allezeit $= \frac{a}{1}$

von a ſubtrahire $\frac{c}{d} = \frac{a}{1} - \frac{c}{d} = \frac{a.d - c.1}{1.d \quad d.1}$ $= \frac{ad-c}{d}$

von f+g ſubtrahiret $\frac{n}{m} = \frac{f+g}{1} - \frac{n}{m} = \frac{(f+g)m}{1.m} - \frac{n.1}{m.1} = \frac{fm+gm}{m} - \frac{n}{m} = \frac{fm+gm-n}{m}$

oder auch $\frac{(f+g).m-n}{m}$

Wäre der Subtrahens eine ganze Größe, und der Minnendus ein Bruch, ſo iſt das eben auf die Art. Von $\frac{a}{b}$ ſubtrahiret $d = \frac{a}{b} - \frac{d}{1} = \frac{a.1}{b.1}$ $- \frac{d.b}{1.b} = \frac{a}{b} - \frac{db}{b} = \frac{a-db}{b}$

§. 199. Wenn entweder im Minuendus, oder im Subtrahens Brüche mit ganzen Zahlen verbunden ſind, oder wenn das auf beyden Seiten iſt, ſo erinnere man ſich, daß man nach §. 193. eine

eine ganze Zahl, womit ein Bruch verbunden iſt, zu einem unächten Bruche machen könne. Iſt nun auf einer Seite eine ſolche Größe, ſo müſte man alſo verfahren, und der ganzen Zahl, die auf der andern Seite iſt, gäbe man den Nenner 1, und bringet alsdenn dieſe Brüche zu gleicher Benennung, und verfähret damit auf die gelehrte Art. Allein das wird nicht einmal nöthig ſeyn, man kann alsdenn ſchon die ganze Zahl von der mit dem Bruche vermiſchten Zahl abziehen. Sind auf beyden Seiten Brüche und ganze Zahlen vermiſcht, ſo macht man beyde zu unächten Brüchen. Iſt auch auf einer Seite ein ächter Bruch, ſo darf man nur, nachdem man auf einer Seite einen unächten Bruch gemacht hat, die Brüche unter gleiche Benennung bringen, und alsdenn ſubtrahiren.

Man bemerke aber wohl, daß, wenn der Subtrahens größer als der Minuendus wird, allezeit der Quotient eine Minusgröße iſt. Es fällt alles dieſes von ſelbſt deutlich in die Augen. Einige Exempel von allen ſollen es erläutern.

Von $4\frac{3}{4}$ ſubtrahiret $2 = 4\frac{3}{4} - 2 = 2\frac{3}{4}$.

von $4\frac{3}{4}$ ſubtrahiret $5 = \frac{19}{4} - \frac{5}{1} = \frac{19}{4} - \frac{5.4}{4} = \frac{19}{4} - \frac{20}{4} = -\frac{1}{4}$.

von $4\frac{3}{4}$ ſubtrahiret $3\frac{1}{8} = \frac{19}{4} - \frac{25}{8} = \frac{19.8}{4.8} - \frac{25.4}{8.4} = \frac{152}{32} - \frac{100}{32} = \frac{152 - 100}{32} = \frac{52}{32} - \frac{20}{32} = 1\frac{5}{8}$ §. 180.

von $4\frac{3}{4}$ ſubtrahiret $5\frac{1}{8} = \frac{19}{4} - \frac{41}{8} = \frac{19.8}{4.8} - \frac{41.4}{8.4} = \frac{152}{32} - \frac{164}{32} = \frac{152 - 164}{32} = -\frac{12}{32} = -\frac{3}{8}$.

von

von $5\frac{3}{7}$ ſubtrahiret $\frac{3}{8} = \frac{38}{7} - \frac{3}{8} = \frac{38.8}{7.8} - \frac{3.7}{8.7} = \frac{304}{56} - \frac{21}{56} = \frac{283}{56} = 5\frac{3}{56}$.

von $3\frac{2}{3}$ ſubtrahiret $\frac{3}{4} = \frac{11}{3} - \frac{3}{4} = \frac{11.4}{3.4} - \frac{3.3}{4.3} = \frac{44}{12} - \frac{9}{12} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$.

von $\frac{3}{8}$ ſubtrahiret $1\frac{3}{4} = \frac{3}{8} - \frac{7}{4} = \frac{3.4}{8.4} - \frac{7.8}{4.8} = \frac{12}{32} - \frac{56}{32} = -\frac{44}{32} = -1\frac{12}{32} = -1\frac{3}{8}$

Wir wollen dieſes auch auf Buchſtaben appliciren, mit welchen man auf eine gleiche Art verfähret. Von $a + \frac{c}{d}$ ſubtrahiret b. Dieſes iſt $= \frac{ad + c}{d} - \frac{b}{1}$ §. 193. $= \frac{ad + c}{d} - \frac{bd}{d} = \frac{ad + c - bd}{d}$

von $a + \frac{c}{d}$ ſubtrahiret $b + \frac{n}{m} = \frac{ad + c}{d} - \frac{bm + n}{m}$

$= \frac{(ad+c)m}{dm} - \frac{(bm+n)d}{md}$

$= \frac{(ad+c)m - (bm+n)d}{md}$

von $m + \frac{n}{m}$ ſubtrahiret $\frac{a}{b} = \frac{mm + n}{m} - \frac{a}{b}$

$= \frac{(m^2+n)b}{mb} - \frac{a.m}{b.m} = \frac{(m^2+n)b - am}{bm}$

von $x + \frac{n}{m}$ ſubtrahire $x + \frac{r}{s} = \frac{xm + n}{m} - \frac{xs + r}{s}$

$= \frac{(xm+n)s}{ms} - \frac{(xs+r)m}{ms} = \frac{(xm+n)s - (xs+r)m}{ms}$

$= \frac{xms + ns - xms - rm}{ms} = \frac{ns - rm}{ms}$

§. 200. Es geht aber auch an, und kommt vor, daß man mit Zahlen vermiſchte Brüche von einander ſubtrahiren muß, wenn auch ſchon die Brüche neben den ganzen Zahlen mit dem Minuszeichen ſtehen. Z. E. Man ſollte von $4-\frac{3}{4}$ ſubtrahiren die $3\frac{1}{8}$ oder auch die $2-\frac{1}{6}$. Man ſiehet bald, daß man erſt, wenn vom Minuendus noch vorher, wie hier, etwas abgezogen werden muß, ehe man den Subtrahens davon nimmt, dieſes geſchehen müſſe, bey $2-\frac{1}{6}$ iſt es auch im Subtrahens vorher nöthig. Wir wollen beyde Exempel hinſetzen, das iſt genug, ſie zu erklären. Von $4-\frac{3}{4}$ abgezogen $3\frac{1}{8}$ iſt $=(\frac{4}{1}-\frac{3}{4})-(\frac{3}{1}+\frac{1}{8})=(\frac{16}{4}-\frac{3}{4})-(\frac{24+1}{8})=\frac{13}{4}-\frac{25}{8}=\frac{13.8}{4.8}-\frac{25.4}{4.8}=\frac{104}{32}-\frac{100}{32}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.

Das andere Exempel doch kürzer $(4-\frac{3}{4})-(2-\frac{1}{6})=\frac{13}{4}-\frac{11}{6}=\frac{78-44}{24}=\frac{34}{24}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$.

Anmerkung. Wir ſetzen nicht ohne Urſach die erſten Grundſätze ſo weitläuftig aus einander, weil auf deren richtige Erkenntniß alles ankömmt.

§. 201. Als wir das Subtrahiren in ganzen Zahlen lehrten, zeigten wir, wie man mit entgegengeſetzten Zeichen ſubtrahiren müßte §. 57. Es iſt ſehr begreiflich, daß dieſes Grundſätze ſind, welche auch von Brüchen gelten, und daß man auch Brüche mit entgegengeſetzten Zeichen von einander ſubtrahiren könne. Bis daher ſind beyde

Grö-

Größen plus geweſen, denn wenn wir z. E. $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ abziehen, ſo waren beydes Plusgrößen. Bey der Behandlung in der Subtraktion der Brüche mit entgegengeſetzten Zeichen gilt auch die Regel des §. 57 Man verändere das Zeichen des Subtrahens, und verwandle die Subtraktion in eine Addition. Z. E. von $+\frac{3}{4}$ ſollte man abziehen nicht $\frac{3}{8}$ ſondern $-\frac{3}{8}$, alſo müſte ich das Zeichen des Subtrahens $-$ in $+$ verwandeln, die beyden Brüche unter einerley Benennung bringen, und alsdenn addiren:

Es wäre alſo: $+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{3.8}{4.8}+\frac{3.4}{8.4}=\frac{24}{32}+\frac{12}{32}=\frac{36}{32}=1\frac{4}{32}=1\frac{1}{8}$.

Von $-\frac{3}{4}$ abgezogen $+\frac{1}{4}$ iſt, wenn man das Zeichen des Subtrahens invertiret, und die Subtraktion in eine Addition verwandelt $=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{4}{4}=-1$.

In Buchſtaben gilt eben dieſes Geſetz. Von $\frac{a}{b}$ abgezogen $-\frac{c}{d}$ wären $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ Wenn man überhaupt dieſe Regel weiß, ſo wird man die Applikation leicht davon machen können.

§. 202. Man findet manniamal ganze Reihen von Brüchen, worinn das $+$ und $-$ Zeichen abwechſelnd vorkommen; und welche man auch zu einer Größe reduciren wollte. Z. E. man hätte folgende Größe: $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}$. Man muß alsdenn die Plus- und die Minusgrößen jede beſonders addiren, und alsdenn dieſe Größen von einander ab-

abziehen; man könnte auch ein ſolches Exempel füglich als ein Additionsexempel von entgegengeſetzten Größen behandeln. In dieſem Exempel wären die Minusgrößen $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, und die Plusgrößen $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$. Die erſten unter einerley Benennung gebracht, wären $\frac{3.6}{4.6}$, $\frac{4.1}{6.4} = \frac{18}{24}$, $\frac{4}{24}$, zuſammen addirt $= \frac{22}{24} - \frac{11}{12}$ dies wären die Minusgrößen.

Die Plusgrößen $\frac{1.8.2}{4.8.2}$ $\frac{3.4.2}{8.4.2}$ $\frac{1.4.8}{2.4.8} = \frac{16}{64}$ $\frac{24}{64}$ $\frac{32}{64}$ addirt $= \frac{72}{64} = \frac{9}{8}$.

Alſo von $\frac{9}{8}$ ſoll abgezogen, oder vielmehr dazu mit entgegengeſetzten Zeichen addirt werden $\frac{11}{12}$. Dieſes ſtünde $\frac{9}{8} - \frac{11}{12} = \frac{9.12}{8.12} - \frac{11.8}{12.8} = \frac{108}{96} - \frac{88}{96}$ $= \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$.

Man muß in Buchſtabenrechnungen eben ſo verfahren.

Man hätte folgende Reihe, woraus man eine Größe haben wollte.

$\frac{c}{d} - \frac{b}{d} + a - \frac{f}{g}$. Die Plusgrößen ſind $\frac{c}{d} + a$

$= \frac{c}{d} + \frac{a}{1} = \frac{c+ad}{d}$

Die Minusgrößen $\frac{b}{d}$ und $\frac{f}{g} = \frac{bg+fd}{dg}$

Alſo ſtünde nun das Exempel:

$\frac{c+ad}{d} - \left(\frac{bg+fd}{dg}\right)$. Man ſiehet wenn man hier nur bey dem erſten Bruche Zähler und Nenner mit g multipliciret, daß alsdenn beyde Brüche einerley Benennung bekommen.

Alſo

$$\text{Alſo} = \frac{cg + adg - (bg + fd)}{dg} = \frac{cg + adg - bg - fd}{dg}$$

§. 203. Nunmehro wird man auch leicht einſehen, wie man zu verfahren hat, wenn man folgendes Subtraktionsexempel hätte, welche Art auch wol vorkömmt.

$$\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{4}\right) - \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} - 1 + \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{8}\right).$$

Es iſt nemlich leicht begreiflich, daß man den Minuendum erſt zu **einer** Größe bringen müſte, nachher auch den Subtrahens, und endlich beyde wieder unter einerley Benennung, und denn von einander abziehen müſte. Wir wollen das Exempel herſetzen. Die **Plusgrößen** des Minuendus $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3.2}{4.2} + \frac{1.4}{2.4} = \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

Des Minuendus **Minusgrößen** $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4} = \frac{4}{32}$ und $\frac{24}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$

Des **Minuendus** Plus- und Minusgrößen zuſammen: $\frac{5}{4} - \frac{7}{8} = \frac{5.8}{4.8} - \frac{7.4}{4.8} = \frac{40}{32} - \frac{28}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ für den Minuendus.

Nun des Subtrahens **Plusgrößen** $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

Des Subtrahens **Minusgrößen** 1, $\frac{1}{8} - \frac{8}{8}$ und $\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$.

Des Subtrahens Plus- und Minusgrößen zuſammen: $\frac{5}{4} - \frac{9}{8} = \frac{5.2}{4.2} - \frac{9}{8} = \frac{10}{8} - \frac{9}{8} = \frac{1}{8}$.

Des Minnenkus und des Subtrahens Größen zuſammen: $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. welches alſo das Reſulta-

ſultat des Exempels iſt. Wären die beyden letzten Brüche $\frac{3}{8}$ — $\frac{1}{8}$ nicht von einerley Benennung geweſen, ſo hätte man ſie von einerley Nennern machen, und alsdenn ſubtrahiren müſſen.

§. 204. Wir werden das Nöthigſte von der Subtraktion der Brüche geſagt haben. Wir erinnern nur noch etwas von der Subtraktion der Brüche in benamten Zahlen. Wer überhaupt Brüche ſubtrahiren kann, wird es in benamten Zahlen auch können. Man muß nur wiſſen, wie viel Einheiten der geringern Ordnung zu einer Einheit der nächſt höhern erfordert werden.

Ein Exempel ſoll die Sache erläutern, und das Verfahren ſelbſt wird zeigen, daß man alſo verfahren müſſe.

Von $2\frac{11}{12}$ rthl. $7\frac{3}{5}$ gr. $1\frac{1}{4}$ pf. ziehe man ab $1\frac{3}{7}$ rthl. $9\frac{2}{7}$ gr. $1\frac{1}{8}$ pf. Hier ſind in dem Subtrahens und dem Minuendus mit ganzen Zahlen vermiſchte Brüche, die man alſo erſtlich zu unächten Brüchen machen muß. Wäre das nicht, ſo ließe man ſie blos ſtehen, und verführe auf die gewöhnliche Art. Es ſtehet das Exempel alſo:

Minuendus $\frac{35}{12}$ rthl. $\frac{38}{5}$ gr. $\frac{5}{4}$ pf.

Subtrahens $\frac{10}{7}$ rthl. $\frac{65}{7}$ gr. $\frac{9}{8}$ pf.

Nun bringe man allezeit Brüche von gleichen Größen, als von den Thlr. oder Groſchen, oder Pfennige zu gleichen Benennungen, und ſubtrahire ſie denn, alſo erſt $\frac{5}{4}$ pf. und $\frac{9}{8}$ pf. $= \frac{10}{8}$ pf. $- \frac{9}{8}$ pf. $= \frac{1}{8}$ pf. bey den Groſchen $\frac{38}{5} - \frac{65}{7} = \frac{266}{35} - \frac{325}{35} = -\frac{59}{35}$ gr.

weil hier der Subtrahens größer als der Minuendus, und daher umgekehrt abgezogen und mit dem Minuszeichen geſetzt wird. Nun die Thaler $\frac{35}{12} - \frac{10}{7} = \frac{245}{84} - \frac{120}{84} = \frac{125}{84}$ rthl. Die Differenz iſt alſo: $\frac{125}{84}$ rthl. $- \frac{59}{35}$ gr. $+ \frac{1}{8}$ pf. und da die Rthl. und Groſchen unächte Brüche, nemlich dividiret $= 1\frac{41}{84}$ rthl. $- 1\frac{24}{35}$ gr. $+ \frac{1}{8}$ pf., welche ſich leicht auf bloße Plusſummen bringen laſſen.

Wir dürfen, den Raum zu erſparen, nicht mehr Exempel anführen, die in allen Rechenbüchern genug ſtehen, wir begnügen uns, die Art des Verfahrens gezeigt zu haben. Wir werden am Ende der ganzen Berechnung noch zeigen, wie man Brüche in benamten Zahlen von einer größern Ordnung in Werthen der kleinern ausdrücken könne, welches man oft thut, und die **Reduktion** der Brüche in benamten Zahlen nennet.

§. 205. Wir kommen zur Multiplikation der Brüche. Man kann Brüche, ſie mögen ächte oder unächte Brüche ſeyn, mit ganzen Zahlen, man kann auch Brüche mit Brüchen multipliciren, dieſe Brüche mögen nun beyde ächte oder beyde unächte, oder einer davon nur ein unächter Bruch ſeyn. Auf alle Fälle werden wir eine allgemeine Regel geben, wenn wir vorher erſt über die einzelnen Fälle Betrachtungen angeſtellet haben. Wir nehmen erſt den Fall vor, da der eine Faktor ein Bruch, der andere aber eine ganze Zahl iſt. Z. E. man ſollte $\frac{3}{4}$ mit 5 multipliciren, oder welches einerley iſt 5 mit $\frac{3}{4}$. Wenn man den Bruch betrachtet, ſo wird man ſich erinnern

nern, daß er anzeiget, die Einheit ſey in gewiſſe Theile getheilet, in ſo viel als der Nenner anzeiget, und von denen ſind ſo viel genommen, als der Zähler bemerket. Als hier in $\frac{3}{4}$ iſt die Einheit in 4 Theile getheilet, wovon man 3 genommen hat. Soll ein ſolcher Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciret werden, ſo heiſt das ſo viel: man ſoll ſolcher Größen, als nun der Bruch iſt, ſo viel nehmen, als die ganze Zahl, womit man multipliciret, Einheiten hat. Hier, man ſoll die $\frac{3}{4}$ fünfmal nehmen, oder welches einerley iſt, fünf ſolcher Größen zuſammen addiren. Man müſte alſo in dieſem Falle $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ nehmen. Wenn aber bey Additionsexempeln die Nenner einerley ſind, ſo addirt man nur die Zähler zuſammen §. 190, und ſo kämen hier $\frac{15}{4}$ heraus. Da alle Multiplikation in der That eine wiederholte Addition iſt, ſo würde das auf alle mögliche Fälle gelten, aber auch weitläuftig ſeyn. Man ſieht aber, daß eben das heraus kömmt und heraus kommen muß, wenn man nur den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl multipliciret, weil es einerley iſt, ob ich ihn eine gegebene Größe Anzahl mal addire, oder nur mit einer Zahl, die eben ſo viel Einheiten hat, gleich multiplicire. **Brüche werden alſo mit einer ganzen Zahl multipliciret, wenn man nur den Zähler des Bruchs mit der gegebenen ganzen Zahl multipliciret.** Alſo $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$. Ein Exempel mag es erläutern. Eine Elle Zeug ſey in 4 Theile getheilet, wovon man 3 an den Schneider gegeben hätte, er hätte alſo $\frac{3}{4}$ Ellen bekommen.

Er verlangte aber 5mal ſo viel, ſo iſt ja ganz begreiflich, daß er $\frac{15}{4}$ haben muß.

Es iſt auch, wie man leicht begreifen wird, gleichviel, ob der Bruch ein ächter oder unächter Bruch ſey, man muß immer auf die Art verfahren, wenn er mit einer ganzen Zahl ſoll multipliciret werden. Daher wird es auch leicht begreiflich ſeyn, wie man es anzufangen hat, wenn man eine mit einem Bruche verbundene ganze Zahl mit einer andern ganzen Zahl zu multipliciren hätte. Z. E. $1\frac{3}{4}$ mit 4. Man kann aus der mit dem Bruche verbundenen ganzen Zahl ja allezeit einen unächten Bruch machen, deſſen Zähler man alsdenn multipliciret.

$$1\tfrac{3}{4} \cdot 4 = \tfrac{7}{4} \cdot 4 = \tfrac{28}{4} = 7.$$

Brüche in Buchſtaben mit andern Buchſtaben, die nicht Brüche ſind, zu multipliciren, wird auf eine gleiche Art bewerkſtelliget, man multipliciret nur den Zähler.

Z. E. $\frac{a}{b} \cdot d = \frac{ad}{b}$. Es iſt auch leicht begreiflich, daß das ſo ſeyn muß. Denn man ſoll die Größe $\frac{a}{b}$, dmal nehmen, oder dmal zu ſich ſelbſt addiren, welches, wie wir bey den Zahlen gezeigt haben, durch die Multiplikation des Zählers geſchieht. Auch bey ſolchen Größen, als $\frac{a+b}{c}$ mit einer ganzen Größe als mit d, geſchieht es auf eben die Art,

wie

wie bey Zahlen, denn $a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c}$ $= \frac{ac + b}{c}$ das nun mit d multipliciret, iſt $= \frac{(ac + b)}{c}d = \frac{(ac+b)d}{c} = \frac{acd + bd}{c}$. Wäre $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 4$, ſo würde $\frac{acd + bd}{c}$ wenn man für die Buchſtaben die Zahlen ſetzet, $= \frac{1.3.4. + 2.4}{3} = \frac{12 + 8}{3} = \frac{20}{3}$. Das würde auch heraus gekommen ſeyn, wenn man gleich im Anfang die Buchſtaben beſtimmet hätte. Denn alsdenn war $a + \frac{b}{c}.d = 1 + \frac{2}{3}.4 = \frac{5}{3}.4 = \frac{5.4}{3}$ $= \frac{20}{3}$.

Das Produkt der Brüche, welche mit ganzen Zahlen multipliciret werden, iſt oft ein unächter Bruch, der alſo größer als die Einheit iſt, worin der **Diviſor** oder **Nenner** ein oder etliche mal ſtecket; iſt das: ſo ſuchet man durch die Diviſion die ganze Zahl heraus, und hängt da den Reſt mit dem Nenner als Bruch an.

Z. E. $\frac{3}{4}.7 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Wir wollen dieſes alles noch durch einige hingeſchriebene Exempel erläutern.

$\frac{3}{8} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}.$

$\frac{11}{12} \cdot 15 = \frac{11 \cdot 15}{12} = \frac{165}{12} = 13\frac{9}{12} = 13\frac{3}{4}.$

$1\frac{5}{8} \cdot 6 = \frac{13 \cdot 6}{8} = \frac{78}{8} = 9\frac{6}{8} = 9\frac{3}{4}.$

$\frac{a}{b} \cdot d = \frac{ad}{b}$

$\frac{a}{b} \cdot d + c = \frac{a \cdot (d+c)}{b} = \frac{ad + ac}{b}$

$d + \frac{1}{a} \cdot f = \frac{ad + 1 \cdot f}{a} = \frac{adf + f}{a}$

$\frac{ac - n}{m} \cdot f = \frac{acm - n \cdot f}{m} = \frac{acmf - nf}{m}.$

§. 206. Wenn Brüche mit Brüchen multipliciret werden ſollen, ſo ſcheint es etwas ſchwerer zu ſeyn, einzuſehen, wie man dabey verfahren ſoll. Z. E. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{6}$.

Allein man erinnere ſich, was wir eben gelehret haben. Wäre der Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, ſo multiplicirte man nur den Zähler, thäte man dieſes hier auch, und multiplicirte blos den Zähler des einen Bruchs mit dem Zähler des andern, und ließe dem Multiplicando ſeinen Nenner, ſo würde das Produkt zu groß, denn es ſoll der Multiplicandus nicht mit einer ſo großen ganzen Zahl, als der Zähler des Multiplicators iſt, ſondern mit einer Zahl, die durch den Nenner des Multiplicator getheilet iſt, multipliciret werden. Habe ich nun die Zähler der beyden Brüche mit ein-

einander multiplicirt, ſo iſt das Produkt um ſo vielmal zu groß geworden, als der Nenner des einen Bruchs Einheiten hat. Es muß alſo um ſo vielmal kleiner gemacht werden. Das kann geſchehen, wenn ich den Diviſor oder Nenner um ſo vielmal vergrößere, und das geſchieht, wenn ich auch die Nenner beyder Brüche mit einander multiplicire. **Brüche mit Brüchen werden alſo multipliciret, wenn man ſowol ihre Zähler als Nenner mit einander multipliciret; oder wenn man das Produkt der Zähler zum neuen Zähler, und das Produkt der Nenner zum neuen Nenner machet.**

Z. E. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}$ iſt $\frac{3.5}{4.8} = \frac{15}{32}$.

Weil manchem unſer voriger Diſcours noch undeutlich seyn möchte, wollen wir ihn durch dieſes Exempel erläutern. Es ſoll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{8}$ multipliciret werden. Multiplicirte man von $\frac{3}{4}$ den Zähler 3 blos mit dem Zähler des andern mit 5, und ließe des erſten Nenner 4, ſo wie er wäre, ſo bekäme man $\frac{15}{4}$, man ſieht aber, daß das offenbar zu groß iſt. Denn $\frac{3}{4}$ ſollte nicht mit 5, ſondern mit 5 Theilen einer Größe, die in 8 Theile getheilet war, multipliciret werden. Iſt es alſo blos mit 5 multipliciret, ſo iſt es 8mal zu groß genommen, weil jede eins der fünfe eigentlich nur ein Achttheil war. Dieſe $\frac{15}{4}$ müſſen alſo achtmal kleiner gemacht werden. Das kann aber geſchehen, wenn ihr Theiler achtmal ſo groß wird; dieſer wird aber achtmal ſo groß, wenn er mit dem Nenner

des andern multipliciret wird, und denn wird das Produkt recht ſeyn. Alſo: $\frac{3}{4}\ \frac{5}{8}=\frac{3.5}{4.8}=\frac{15}{32}$.

Wir glauben, daß wir es verſuchen können, auch über unſere Regel einen Beweis durch die Buchſtabenrechnung zu geben. Wir müſſen unſern Leſer immer mehr nach gerade dazu gewöhnen, und wir wollen nichts weiter als alle ſchon gehabte Regeln dabey anwenden.

Es ſoll der Bruch $\frac{a}{b}$ mit dem Bruche $\frac{c}{d}$ multipliciret werden. Durch einen jeden dieſer Brüche können alle mögliche Brüche vorgeſtellet werden, was alſo da bewieſen wird, gilt von allen möglichen Brüchen. Wir wollen nun den Quotienten, den $\frac{a}{b}$ hat, n nennen, denn, wenn man a durch b dividirte, ſo müſte doch ein Quotient da ſeyn.

Alſo $\frac{a}{b}=n$ und den Quotienten, den $\frac{c}{d}$ hat, m nennen, alſo $\frac{c}{d}=m$. Folglich wird $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=n.m$ ſeyn müſſen. Wir wollen ſehen, ob wir das heraus bringen.

Alſo

Alſo $\frac{a}{b}=n,$ $\frac{c}{d}=m$

multipl. b. ——————————— d
mit b $\frac{a.b}{b}=bn$ und $\frac{c.d}{d}=dm$

———————————

oder $a=bn$ und $c=dm$

———————————

$a=bn$ da aber
$c=dm$ und

——————

folglich $a.c=bn\,dm$

——————————: bd

$\frac{ac}{bd}=nm$ oder beyde Größen durch bd dividirt,

———————————

nun war $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=nm$ wie wir gleich im Anfange auch ſagten,

———————————

ſo iſt auch $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

weil, wenn zwey Dinge einem Dritten gleich ſind, ſie auch unter einander gleich ſeyn müſſen; nun waren beyde dem nm gleich, alſo müſſen ſie unter einander gleich ſeyn. Bey $\frac{ac}{bd}$ ſehe ich aber, daß der Zähler des einen Bruchs mit dem Zähler des andern, und der Nenner des einen auch mit dem Nenner des andern multipliciret ſey. Da nun durch $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ alle mögliche Brüche vorgeſtellet werden, ſo folget, wenn Brüche mit einander zu multipliciren ſind, ſo multipliciret man

Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner.

§. 207. Man ſiehet hieraus, wie leicht es iſt, Brüche mit Brüchen zu multipliciren. Wir haben ſchon in dem Beweis des vorhergehenden Paragraphen Gelegenheit gehabt, zu bemerken, daß Buchſtabenbrüche, die mit einander ſollen multipliciret werden, auf eben die Art behandelt werden müſſen. Wir führen noch einige Exempel an.

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{35};\ \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{35}{56}=\frac{5}{8}$$

$$\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}=\frac{6.11.8.3.6}{11.12.9.4.7}=\frac{2376}{8316}=\frac{2}{7}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{g}\cdot\frac{n}{m}=\frac{acfn}{bdgm}$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{r}{s}=\frac{r}{xa^2bs},\ \frac{nm+r}{x}\cdot\frac{h}{m}=\frac{hnm+rh}{xm}.$$

§. 209. Wenn auch einer oder etliche, oder alle Brüche, die mit einander multipliciret werden ſollen, unächte Brüche wären, alſo größer als 1, ſo wird doch die Multiplikation derſelben mit einander auf eben die Art geſchehen müſſen. Und unſer allgemeiner Beweis §. 206 gilt auch dafür, weil man durch die Buchſtabenbrüche alle mögliche, alſo auch unächte Brüche verſtehen kann. Z. E. $\frac{7}{5}\cdot\frac{9}{8}$ würde $=\frac{63}{40}=1\frac{23}{40}$ ſeyn. Man ſiehet auch hieraus, wie man Faktores behandeln müſſe, wo ganze Zahlen mit Brüchen vermiſcht ſind. Z. E. $1\frac{3}{4}\cdot 2\frac{1}{3}$. Man macht ſie zu unächten

ächten Brüchen, und verfähret nach der gelehrten Regel. Dieſe waren $\frac{7}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}$.

Die Regel iſt alſo völlig allgemein. Man multipliciret Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner, wenn man zwey oder mehrere Brüche mit einander multipliciren ſoll, und weil man jede ganze Zahl als einen Bruch anſehen kann, deſſen Nenner = 1 iſt, ſo gilt ſie auch, wenn unter den Faktoren eine oder etliche ganze Zahlen ſich befinden, weil man ſie als Brüche ſchreiben kann.

Alſo: $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{96}{84} = 1\frac{12}{84} = 1\frac{1}{7}$.

§. 209. Wenn ächte Brüche mit einander multipliciret werden, oder überhaupt, wenn man eine Größe mit einem ächten Bruch multipliciret, ſo wird das Produkt immer kleiner, als einer der Faktoren war. $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$, da iſt $\frac{3}{7}$ merklich kleiner als einer der beyden Faktoren, wie man bey $\frac{5}{7}$ gleich ſiehet, und bey $\frac{3}{5}$ ſchon daraus finden kann, weil dort die Einheit nur in 5 Theile, beym Produkte aber in 7 Theile getheilet iſt, und von beyden ſind 3 zum Zähler gekommen. Und das iſt leicht begreiflich, wenn man bedenket, daß ein ächter Bruch allezeit kleiner als 1 iſt. Multipliciret man alſo einen ächten Bruch mit einem ächten Bruche, ſo muß das Produkt nothwendig kleiner werden, als einer der Faktoren, denn er iſt weniger als einmal genommen. Unächte Brüche mit einander multipliciret, wird daher das Produkt

größer

größer als einer der Faktoren, weil ein unächter Bruch größer als 1 iſt.

§. 210. Wenn man einen Bruch etliche mal mit ſich ſelbſt multipliciret, ſo erhebet man ihn zur Potenz, und zwar zu der ſo vielten Potenz, ſo vielmal man ihn mit ſich ſelbſt multipliciret. Man muß ihn aber ſo multipliciren, wie man Brüche multipliciret. Alſo $\frac{5}{8}$ zur zweyten Potenz $\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}$ $= \frac{5^2}{8^2}$ oder $= \frac{25}{64}$, zur dritten Potenz $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{8 \cdot 8 \cdot 8}$ $= \frac{5^3}{8^3}$ u. ſ. w. Zur nten Potenz, das iſt, zu der ſo vielten Potenz, als man will, weil n alle mögliche Zahlen bedeuten kann, wäre $\frac{5^n}{8^n}$ und auch in Buchſtaben $\frac{n}{m}$ zur dritten Potenz wäre $\frac{n.n.n}{m.m.m}$ $= \frac{n^3}{m^3}$ und zur rten Potenz $\frac{n^r}{m^r}$.

Werden ächte Brüche zu Potenzen erhoben, ſo werden ſie immer kleiner, zu deſto höhern Potenzen ſie erhoben werden. Es folgt dieſes ſchon aus dem vorigen §. 209, weil ſie beſtändig mit einer kleinern Größe als 1 multipliciret werden. Schon durch die erſte Multiplikation oder Erhebung zur 2ten Potenz muſten ſie kleiner werden, und nun natürlich durch die Multiplikation abermals noch kleiner, weil die Größe wiederum mit einer kleinern als 1 multipliciret wird. Se-

ſzet man dieſe Erhebung zu Potenzen immer fort, ſo muſte endlich die Größe unendlich klein werden, das iſt, kleiner als jede Größe, die man ſich vorſtellen kann. Ein ächter Bruch zur Potenz erhoben, muß auch immer Bruch bleiben, die Potenz ſteige ſo hoch als man wolle, denn da er ohne Erhebung, oder in der erſten Potenz ſchon kleiner als 1 war, und nun immer kleiner wird, ſo kann er ja niemals eine ganze Zahl werden. Hieraus folget auch, daß, wenn man eine Bruchpotenz hat, das iſt, da Zähler und Nenner zu gleichen Potenzen erhoben ſind, auch die **Wurzel** davon oder die Größe, durch deren Multiplikation ſie entſtanden iſt, ein Bruch ſeyn müſte. Sollte man ſolche Brüche, die aus zuſammengeſetzten Größen beſtehen, als z. E. $\frac{an+c}{a-x}$ zu Potenzen erheben müſſen, ſo verſtehet es ſich von ſelbſt, daß man den Zähler mit ſich ſelbſt, und auch den Nenner mit ſich ſelbſt ſo vielmal multipliciren müſſe, zu der ſo vielſten Potenz man den Bruch erheben wollte. Man zeiget es aber oft auch nur an, wenn man die Größen in Klammern einſchließet, und oben an die Klammern ſchreibet, zu der wie vielſten Potenz ſie erhoben werden ſollten.

Z. E. $\frac{an+c}{a-x}$ zur zweyten Potenz wäre $\frac{(an+c)^2}{(a-x)^2}$ multiplicirte man wirklich, ſo wäre es

=

$= \frac{(an+c).(an+c)}{(a-x).(a-x)} = \frac{a^2n^2+2anc+c^2}{a^2-2ax+x^2}$ wie man durch die wirkliche Multiplikation finden wird.

§. 211. Wir lehrten in der Multiplikation der ganzen Größen §. 83, daß Größen, die einerley Zeichen hätten, es ſey + oder —, allezeit zum Produkt + gäben, und Größen von verſchiedenen Zeichen allezeit —. Das gilt gleichfalls bey Brüchen, wie das einem jeden von ſelbſt beyfallen wird, weil es doch auch Größen ſind.

Z. E. $+\frac{5}{8}.+\frac{3}{8}=+\frac{15}{64}; -\frac{5}{8}.-\frac{3}{8}=+\frac{15}{64}; -\frac{5}{8}.+\frac{3}{8}=-\frac{15}{64}; +\frac{5}{8}.-\frac{3}{8}=-\frac{15}{64}$.
Auch ſo in Buchſtaben: $+\frac{a}{b}.+\frac{c}{d}=+\frac{ac}{bd}$;

$-\frac{a}{b}.-\frac{c}{d}=+\frac{ac}{bd}$; $+\frac{a}{b}.-\frac{c}{d}=-\frac{ac}{bd}$; $-\frac{a}{b}.+\frac{c}{b}=-\frac{ac}{bd}$. Das gilt auch, wenn ſchon ein Faktor eine ganze Zahl, oder unächter Bruch, oder beyde unächte Brüche ſind.

§. 212. Wir haben bey der Multiplikation der Brüche in benamten Zahlen wenig zu erinnern. Man verfähret damit wie mit andern Brüchen. Wir wollen doch aber ein Paar Exempel zur Erläuterung hinſetzen. Man multiplicire $87\frac{3}{4}$ Thlr. mit 16. Am bequemſten iſt es, man macht die Thaler zum unächten Bruche, und multipliciret alsdenn den Zähler mit 16, und dividiret

ret denn den Zähler durch den Nenner. Oder man könnte auch 87 erſt mit 16, und denn $\frac{3}{4}$ mit 16 multipliciren. $87\frac{3}{4} \cdot 16 = \frac{351}{4} \cdot 16 = \frac{5616}{4} =$ 1404 Thlr.

$5\frac{1}{3}$ Thlr. + $7\frac{1}{2}$ gr. + $3\frac{1}{4}$ pf. mit $\frac{2}{5}$ = $\frac{16}{3}$ Thlr. + $\frac{15}{2}$ gr. + $\frac{13}{4}$ pf. mit $\frac{2}{5}$ nun jedes damit multipliciret = $\frac{32}{15}$ Thlr. + $\frac{30}{10}$ gr. = $\frac{26}{20}$ pf. Hier läßt ſich der Zähler durch den Nenner dividiren = $2\frac{2}{15}$ Thlr. + 3 gr. + $1\frac{3}{10}$ pf.

§. 210. Bey der Diviſion der Brüche haben wir zu merken, daß eben der Begrif dabey ſtatt finde, als bey der Diviſion mit ganzen Zahlen. Man ſoll nemlich eine Größe oder Zahl ſuchen, welche anzeigt, **wie vielmal** der Diviſor im Dividendus enthalten ſey, und dieſe Zahl iſt der Quotient. Man ſoll $\frac{3}{4}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiren, das heiſt, man ſoll erforſchen, wie vielmal $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$ enthalten ſey, und dieſe Zahl, die mir ſolches anzeiget, und welche wieder ein Bruch ſeyn wird, heiſt der Quotient. Wir haben hier verſchiedene Fälle zu bemerken, welche bey dieſer Operation vorkommen können.

1) Der Diviſor eine ganze Zahl, der Dividendus ein Bruch, ächter oder unächter.

2) Der Diviſor ein Bruch, ächter oder unächter, der Dividendus eine ganze Zahl.

3) Der Diviſor und Dividendus, beyde Brüche, entweder ächte oder beyde unächte, oder der Diviſor

Diviſor ein **unächter**, oder der Dividendus ein **unächter**, und der andere ächt.

Wir wollen über alle Fälle eine allgemeine Regel geben und beweiſen. Wir fangen aber erſtlich davon an, wenn der Diviſor eine ganze Zahl und der Dividendus ein Bruch ſey.

§. 214. Wir wollen mit einem Exempel anfangen. Man habe den Bruch $\frac{8}{9}$, welcher durch 2 ſoll dividiret werden. Nun iſt bekannt, daß der Bruch $\frac{8}{9}$ entſtanden ſey, wenn man die Einheit in 9 Theile getheilet, und davon 8 genommen hat, weil $\frac{8}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$. Soll ich dieſe $\frac{8}{9}$ durch 2 dividiren, ſo iſt die Frage, wie vielmal zwey Theile, davon jeder gleich iſt, in $\frac{8}{9}$ ſich befinden, und da ſehe ich gleich, daß davon 4 ſolcher Theile, und alſo der Quotient $\frac{4}{9}$ ſeyn müſſe. $\frac{8}{9} : 2$ wäre alſo $= \frac{4}{9}$. Man ſiehet gleich, daß man dieſes erhält, wenn man nur den Zähler durch den gegebenen ganzen Diviſor dividiret, und den Nenner ungeändert läßt. So wäre $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8:4}{9} = \frac{2}{9}$ und $\frac{6}{19} : 3 = \frac{6:3}{19} = \frac{2}{19}$ und da man durch Buchſtaben alle mögliche Zahlen ausdrücken kann, ſo wäre $\frac{a}{b} : d = \frac{a:d}{b}$. Alles dieſes muß auch gelten, wenn der Dividendus ein unächter Bruch wäre, und $\frac{16}{13} : 2 = \frac{16:2}{13} = \frac{8}{13}$. Man ſieht auch, daß das ſo ſeyn müſſe, weil ich wiſſen will, wie vielmal ſo viele Theile, als der Diviſor anzeigt, im Dividendus enthalten ſind.

§. 215. So lange geht nun das recht gut, als ſich der Zähler durch den Diviſor theilen läßt, wenn aber das nicht angehet, wie denn? Z. E. wenn man $\frac{5}{7}$ durch 2 theilen ſollte. Da geht 2 in 5 nicht auf. Man erinnere ſich, daß man jeden Bruch in unzählige andere verändern kann, die alle dem erſten völlig gleich ſind, weil Zähler und Nenner, mit einerley Zahl multipliciret oder dividiret, den Bruch im geringſten nicht ändert. Man verwandele alſo den Bruch in einen ſolchen durch die Multiplikation des Zählers und Nenners mit einer Zahl, daß ſich alsdenn der Zähler durch den gegebenen Diviſor wirklich dividiren läßt. Und hierzu kann man die Zahl des Diviſors ſelbſt nehmen. So wäre $\frac{5}{7} : 2 = \frac{5.2}{7.2} : 2$.

Wenn man nun den Zähler dividiret durch den gegebenen Diviſor, ſo fällt die 2, womit er multipliciret war, wieder weg, und bleibt blos die 5. Aber im Nenner bleibt ſie alſo: $\frac{5.2}{7.2} : 2 = \frac{5}{7.2} = \frac{5}{14}$. Wir wollen dieſes einmal ganz allgemein betrachten. Es ſollte der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividiret werden. Das wäre $\frac{a}{b} : c$ aber auch $= \frac{a.c}{c.b} : c$ nun den Zähler dividiret durch $c = \frac{a.c : c}{b.c} = \frac{a}{b.c}$ Da der Bruch $\frac{a}{b}$ alle mögliche ächte und unächte Brüche vorſtellen kann, und auch c alle mögliche ganze Zahlen; ſo giebt mir dieſes auch die Regel: nemlich ich ſe-

he, daß ich den Bruch durch die ganze Zahl dividirte, wenn ich ſeinen Nenner damit multiplicirte. Folglich: **Brüche werden durch ganze Zahlen dividiret, wenn ihr Nenner damit multiplicirer wird.** Und dieſe Regel iſt ganz allgemein, und es kömmt auch durch dieſes Verfahren eben das heraus, was man erhalten würde, wenn man den Zähler, wie wir im Anfange zeigten, durch die ganze Zahl dividiren könnte, und $\frac{8}{9}:2$ nach der erſten Operation $= \frac{8:2}{9} = \frac{4}{9}$, und nach der andern $\frac{8}{9}:2 = \frac{8}{9.2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ völlig mit der erſten einerley Quotienten geben, ſo daß $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$, welches auch, wie man ſiehet, zutrift.

§. 216. Wir wollen nun den zweyten Fall vornehmen, der uns immer zu einer Regel auf alle mögliche Fälle leiten wird. Der Dividendus ſoll eine ganze Zahl ſeyn, und der Diviſor ein Bruch: $3 : \frac{5}{8}$. Man betrachte hiebey, daß man jede ganze Zahl als einen Bruch anſehen könne, deſſen Nenner $= 1$. Alſo $3 = \frac{3}{1}$, folglich $3 : \frac{6}{8}$ wäre auch $\frac{3}{1} : \frac{5}{8}$, das iſt alſo ſchon wirklich, als ob man Bruch durch Bruch zu dividiren hätte. Man weis ferner, wie man Brüche zu einerley Benennung bringen ſoll, und $\frac{3}{1} : \frac{5}{8}$ wäre auch $= \frac{3.8}{1.8} : \frac{5}{8}$ oder $\frac{3.8}{8} : \frac{5}{8} = \frac{24}{8} : \frac{5}{8}$. Nun ſind beydes Brüche, und bey beyden die Einheit in gleiche Theile getheilet, weil ſie von gleichen Nennern ſind. Alſo kann ich nun die Zähler als ganze Stücke betrachten, und die Nenner geben mir nichts mehr an, denn jedes einzelne Stück von 24 war nun ſo groß, als das von 5. Man ſoll alſo wirklich jetzt 24 durch

5 dividiren. Man dividiret alſo alsdenn den Zähler des Dividendus durch den Zähler des Diviſors. Alſo $\frac{24}{8} : \frac{5}{8} = \frac{24}{5}$.

Exempel: $3 : \frac{2}{3} = \frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{3.5}{5} : \frac{2}{5} = \frac{15}{5} : \frac{2}{2} = \frac{15}{2}$.

$7 : \frac{3}{4} = \frac{7}{1} : \frac{3}{4} = \frac{7.4}{4} : \frac{3}{4} = \frac{28}{4} : \frac{3}{4} = \frac{28}{3}$. Und wenn man dieſes allgemein betrachtet, ſo wäre

$$c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{c.b}{b} : \frac{a}{b} = \frac{cb}{a}.$$

§. 217. Wir haben geſehen, daß, wenn der Dividendus eine ganze Zahl und der Diviſor ein Bruch war, man beyde zu Brüchen machte, beyde zu einerley Benennungen brachte, und alsdenn Zähler mit Zähler dividirte. Dieſes zeiget uns auch, daß man es ſo machen könnte, wenn der Dividend ein Bruch und der Diviſor eine ganze Zahl wäre, wovon wir zu Anfange redeten, wenn wir nicht dort kürzere Wege gefunden hätten. Ja dieſes giebt uns ſchon die Lehre, wie wir es anzufangen haben, wenn beyde, ſowol Dividendus als Diviſor Brüche, ächte oder unächte, oder von beyden eins wären. Denn hier hatten wir endlich auch auf beyden Seiten Brüche. Man bringet nemlich, wenn Dividend und Diviſor Brüche ſind, beyde zu einerley Benennung, und dividiret alsdenn Zähler durch Zähler. Z. E. $\frac{3}{5} : \frac{5}{8} = \frac{3.8}{5.8} : \frac{5.5}{8.5} = \frac{24}{40} : \frac{25}{40} = \frac{24}{25}$ und $\frac{2}{3} : \frac{6}{5} = \frac{2.5}{3.5} : \frac{6.3}{5.3} = \frac{10}{15} : \frac{18}{15} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

Allgemein: $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} : \frac{c.b}{b.d} = \frac{ad}{cb}$$

$$\frac{n}{m} : \frac{r+s}{t} = \frac{nt}{mt} : \frac{(r+s)m}{tm} = \frac{nt}{(r+s)m} = \frac{nt}{rm+sm}.$$

§. 218. Wir wollen nun nochmals ein allgemeines Exempel vornehmen, da auf beyden Seiten Brüche ſind, und daraus eine ganz kurze Regel auf alle Fälle herleiten: Es ſoll $\frac{n}{m}$ durch $\frac{r}{s}$ dividiret werden. Das ſtellet nun alle mögliche Brüche vor, ächte und unächte, auch kann ein Bruch, welchen man will, eine ganze Zahl bedeuten, weil man ſowol den Nenner m, als den Nenner s als 1 annehmen kann, indem die Buchſtaben alle mögliche Zahlen bedeuten können. Alſo dieſes Exempel wird auf alle Fälle paſſen, und für alle Fälle eine Regel geben. Wollte ich nun dieſes Exempel dividiren, ſo brächte ich es zu einerley Benennung. Alſo: $\frac{n}{m} : \frac{r}{s}$ wäre $= \frac{n.s}{m.s} : \frac{r.m}{s.m}$ und alsdenn Zähler durch Zähler dividiret, $= \frac{ns}{rm}$ Wenn ich aber dieſes genau betrachte, ſo ſehe ich, daß ich eben das erhalten hätte, wenn ich den Diviſor umgekehrt, und ſtatt $\frac{r}{s}$ geſetzt hätte $\frac{s}{r}$ und alsdenn die Diviſion in die gewöhnliche Multiplikation der Brüche, da Zähler mit Zähler und Nenner mit Nennern multipliciret werden, verwandelt

wandelt hätte. Denn $\frac{ns}{rm}$ oder $\frac{n}{m}\cdot\frac{s}{r}$ iſt einerley.

Da dieſe beyden Buchſtabenbrüche alle mögliche Arten der Brüche, auch auf einer Seite ganze Zahlen mit dem Nenner 1 bedeuten können, ſo folget daraus die höchſt allgemeine Regel. **Wenn man Brüche durch Brüche dividiren ſoll, ſo kehrt man den Diviſor um, und verwandelt die Diviſion in eine Multiplikation des nunmehrigen Zählers mit Zählern, und des Nenners mit Nennern.** Hiebey iſt zu merken, daß man vor der Umkehrung dem Diviſor, wenn er eine ganze Zahl iſt, den Nenner 1 giebt, und ihn alſo zum Bruche macht, und denn umkehrt. Iſt der Dividend eine ganze Zahl, ſo giebt man ihm auch der Deutlichkeit halber den Nenner eins, ehe man den Diviſor umkehrt.

Exempel: $\frac{1}{8} : 3 = \frac{1}{8} : \frac{3}{1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$.

$\frac{7}{11} : 15 = \frac{7}{11} : \frac{15}{1} = \frac{7}{11} \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{165}$

$2 : \frac{3}{8} = \frac{2}{1} : \frac{3}{8} = \frac{2}{1} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

$1\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{3}{2} : \frac{3}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{24}{6} = 4$.

$\frac{3}{5} : 2\frac{1}{6} = \frac{3}{5} : \frac{13}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{13} = \frac{18}{65}$

$\frac{9}{10} : \frac{7}{10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{90}{70} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$

$\frac{2}{9} : \frac{1}{8} = \frac{2}{9} \cdot \frac{8}{1} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$.

Man verfähret eben ſo in Buchſtabenbrüchen, wenn ſie auch aus noch ſo vielen Gliedern beſtünden.

z. E. $\frac{r+x}{a-b} : \frac{n-m}{c} = \frac{r+x}{a-b} \cdot \frac{c}{n-m}$
$= \frac{(r+x)c}{(a-b).(n-m)} = \frac{rc+cx}{an-am+bm-nb}.$

§. 219. Man findet auch mannichmal die Brüche oder ganze Zahlen mit Brüchen vermiſcht, auf beſondere Art ausgedrückt, welches aber den, der dieſes wohl innen hat, gar nicht irre machen wird, indem es leichte auf alle dieſe Regeln zurücke bringen wird.

z. E $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}$ heiſt $\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$

$\frac{1\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$ wäre $= 1\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{7}{4} : \frac{5}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{20} = 2\frac{9}{20}$

und ſolcher Ausdruck $\frac{\frac{2}{3}}{1 : \frac{5}{8}}$ würde auch leicht zu verſtehen ſeyn. Es ſollte der Diviſor oder 1 erſtlich durch $\frac{5}{8}$ dividiret werden, und durch dieſen Quotienten alsdenn die $\frac{2}{3}$.

Alſo: $\frac{\frac{2}{3}}{1 : \frac{5}{8}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1\;8}{1\cdot 5}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{3} : \frac{8}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}$
$= \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ u. ſ. w.

§ 220. Bey der Diviſion in Brüchen gelten die Geſetze, was plus und minus anbetrift, eben ſo als in ganzen Zahlen, nemlich einerley Zeichen geben zum Quotienten **plus**, verſchiedene **minus**. So würde z E. $+\frac{5}{8} : +\frac{3}{5} = +\frac{5}{8} \cdot +\frac{5}{3} = +\frac{25}{24}$ $= +1\frac{1}{24}$ und $-\frac{5}{8} : -\frac{3}{5}$ wäre auch $= +1\frac{1}{24}$. Aber $-\frac{5}{8} : +\frac{3}{5}$ wäre $= -1\frac{1}{24}$ und gleichfalls

auch

auch $+\frac{5}{8} : -\frac{3}{5} = -1\frac{1}{24}$. Alle dieſe Geſetze gelten, die Brüche mögen ächte oder unächte ſeyn, oder auf einer Seite ſich eine ganze Zahl befinden, kurz auf alle Fälle.

§. 221. Die Probe der Multiplikation in ganzen Zahlen geſchahe durch die Diviſion §. 115. und die Probe der Diviſion durch die Multiplikation §. 114. Da Multiplicīren und Dividiren in Brüchen einerley Hauptbegrif mit Multipliciren und Dividiren in ganzen Zahlen hat, ſo muß auch eben dieſe Probe ſtatt finden. Will man wiſſen, ob ein Multiplikationsexempel in Brüchen recht gerechnet iſt, ſo muß man das Produkt mit dem andern Faktor dividiren, und alsdenn muß der erſte zum Quotienten kommen, und es findet hier eben der Beweis ſtatt, den wir dort gaben. Wir wollen ein Buchſtabenexempel zur Erläuterung herſetzen.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ war $= \frac{ac}{bd}$. Man dividire dieſes Produkt mit einem der Faktoren, z. E. mit $\frac{a}{b}$ ſo muß $\frac{c}{d}$ der Quotient werden. Alſo $\frac{ac}{bd} : \frac{a}{b} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{b}{a} = \frac{acb}{bda}$ hier fällt a gegen a und b gegen b im Nenner und Zähler weg. Alſo bleibt $\frac{c}{d}$ welches der eine Faktor war. In Zahlen: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$. Man dividire mit einem der Faktoren, z. E. mit $\frac{5}{8}$, ſo muß $\frac{3}{4}$

der Quotient ſeyn. Alſo: $\frac{15}{32} : \frac{5}{8} = \frac{15}{32} \cdot \frac{8}{5} = \frac{120}{160} = \frac{12}{16}$ $= \frac{3}{4}$ und ſo auf alle Fälle.

Will man die Probe machen, ob ein Diviſionsexempel in Brüchen recht gerechnet ſey, es mögen ächte oder unächte Brüche, oder auch der Dividendus, oder der Diviſor eine ganze Zahl ſeyn, ſo multiplicire man den Quotienten mit dem Diviſor, ſo kömmt der Dividendus heraus. Z. E. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ iſt $= \frac{ad}{bc}$, welches der Quotient iſt. Multipliciret man dieſen Quotienten mit $\frac{c}{d}$ als dem Diviſor, ſo muß der Dividendus $\frac{a}{b}$ zum Produkt kommen. Man multiplicire $\frac{ad}{bd} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd}$, hier geht d gegen d, und c gegen c im Zähler und Nenner auf, und es bleibt $\frac{a}{b}$ als der Dividendus. In Zahlen $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$. Wenn man dieſen Quotienten $\frac{6}{5}$ mit dem Diviſor $\frac{2}{3}$ multiplicirt, ſo kömmt $\frac{4}{5}$ wieder heraus, denn $\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ gleichfalls $6 : \frac{1}{8} = 6 \cdot \frac{8}{1}$ $= 48$ das mit $\frac{1}{8}$ multipliciret $= 48 \cdot \frac{1}{8} = \frac{48}{1} \cdot \frac{1}{8}$ $= \frac{48}{8} = \frac{6}{1} = 6$.

§. 222.

§. 222. Man kann einen Bruch, er ſey welcher er wolle, nicht nur blos durch Schreiben anzeigen, ſondern auch durch eine Reihe von Gliedern ausdrücken, deren Ende, wenn man auch noch ſo lange fortrechnet, nicht gefunden wird, und das nennet man eine unendliche Reihe. Man nähert ſich hier der Wahrheit nur, ohne ſie gänzlich zu erreichen. Oft haben ſolche Reihen ihren großen Nutzen, wie wir weiter unten zeigen werden. Es wird einem jeden gleich ganz deutlich ſeyn, daß man eine jede ganze Zahl, die größer als 1 iſt, ſo anſehen kann, als ob ſie durch die Addition zweyer ganzer Zahlen entſtanden ſey, und daß ſie auch ſo ausgedrückt werden könne.

Z. E. 3 kann ja als $2 + 1$ und 5 als $3 + 2$ oder als $4 + 1$ vorgeſtellet werden, oder man kann eine ſolche Zahl auch alſo anſehen, als ob ſie durch die Subtraktion zweyer Größen von einander entſtanden ſey. So könnte man 3 als $5 - 2$ und 5 als $6 - 1$ oder noch auf viele andere Arten vorſtellen. Will man einen Bruch durch eine unendliche Reihe vorſtellen, ſo drücke man den Nenner durch eine Größe aus, welche aus 2 Theilen beſteht, die entweder durch die Addition oder Subtraktion herrühren. Z. E. So könnte man $\frac{2}{3}$ durch $\frac{2}{2+1}$ oder $\frac{2}{4-1}$ vorſtellen. Man dividire alsdenn würklich, und man bekömmt zum Quotienten eine unendliche Reihe.

In der Diviſion zeigten wir hievon etwas an, welches wir nun ergänzen. Um die Sache allgemein vorzuſtellen, wollen wir auf beyde Fälle einen Buchſtabenbruch erwählen, weil ſich doch alle mögliche Brüche dadurch vorſtellen laſſen.

Man ſchreibe alſo den Bruch $\frac{a}{b+c}$, a ſolle alle mögliche Zahlen vorſtellen, auch 1, und $b+c$ alle mögliche Zahlen, die beyden zuſammen größer als 1 ſind. Z. E. der Bruch $\frac{5}{6}$, da wäre $a = 5$, und wenn man b als 4 annähme, ſo wäre $c = 2$. Eben ſo wird auch $\frac{a}{b-c}$ gleichfalls alle mögliche Brüche vorſtellen können. Beyde Exempel wollen wir machen, ſo haben wir für alle Brüche, ſie mögen auf dieſe oder jene Art vorgeſtellet ſeyn, die unendlichen Reihen, denn wenn die Zahlen gegeben ſind, ſo kann man ſie leicht anſtatt der Buchſtaben hinſchreiben.

Erſtlich

Erſtlich $\frac{a}{b+c}$ es ſtünde alſo:

$$b+c)\ a\ \Big|\ \frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb} + \frac{acccc}{bbbbb}$$

$$a + \frac{ac}{b}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$-\frac{ac}{b}$$

$$-\frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$+\frac{acc}{bb}$$

$$+\frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$-\frac{accc}{bbb}$$

$$-\frac{accc}{bbb} - \frac{acccc}{bbbb}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$+\frac{acccc}{bbbb}$$

$$+\frac{acccc}{bbbb} + \frac{accccc}{bbbbb}$$

und ſo weiter.

Ich ſage alſo, b iſt in a $\frac{a}{b}$ mal enthalten, in den Quotienten geſetzt, und mit dem

Divi

Diviſor multipliciret, (man erinnere ſich, wie die Brüche multiplicirt und dividirt werden.) c mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt iſt $\frac{ac}{b}$, und b mit $\frac{a}{b}$ iſt a; beyde unter den Dividend geſetzt; man ziehet ab, a von a geht auf, aber weil $+\frac{ac}{b}$ von nichts abgezogen werden kann, wirds mit veränderten Zeichen herunter geſetzt. §. 132, man fahre fort, b in $-\frac{ac}{b}$ iſt $-\frac{ac}{bb}$ in den Quotienten. Mit dem Diviſor multipliciret $+$ c mit $-\frac{ac}{bb} = -\frac{acc}{bb}$ und $+$ b mit $-\frac{ac}{bb} = -\frac{ac}{b}$. unter den Dividend geſetzt, abgezogen $-\frac{ac}{b}$ von $-\frac{ac}{b}$ geht auf. Und $-\frac{acc}{bb}$ aus obigem Grunde mit verkehrten Zeichen unter den Strich. Man fahre fort, b in $+\frac{acc}{bb}$ iſt $+\frac{acc}{bbb}$; in den Quotienten; mit dem Diviſor multipliciret $+\frac{acc}{bbb}$ mit c iſt $+\frac{accc}{bbb}$ und $+\frac{acc}{bbb}$ mit b iſt $+\frac{acc}{bb}$. Da kömmt wieder $-\frac{accc}{bbb}$ unter den Strich.

Man

Man dividire auf die Art weiter fort, ſo wird, wenn man die Subtraktion, Multiplikation, Diviſion- und Plus- und Minusgeſetze behalten hat, nichts, was wir hier geſchrieben haben, unverſtändlich ſeyn.

Man kann ſo immer fort dividiren, bis in die Ewigkeit. Betrachten wir aber dieſe Reihe recht, ſo können wir ſie auch leicht weiter fortführen. Ich ſehe gleich folgende Geſetze: 1) Die Zeichen wechſeln ab; 2) ferner iſt bei allen a im Zähler in der erſten Potenz; 3) im zweyten Gliede fängt c im Zähler in der erſten Potenz an, und ſteigt in allen folgenden Gliedern um eine Potenz höher. Da im Nenner b gleich im erſten Gliede in der erſten Potenz anfängt, und in jedem folgenden allezeit um eine Potenz höher ſteigt, ſo wird es in allen Gliedern um eine Potenz höher als c ſeyn. Nun kann ich die Reihe leicht ſetzen:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} - \frac{ac^5}{b^6}.$$

Man ſieht, daß man den Quotienten nicht vollkommen hat, ſondern ſich immer nur nähert, und man müſte noch den Reſt als Bruch geſetzt dazu addiren. Wir wollen hernach einmal einige Exempel in Zahlen machen. Man wollte $\frac{1}{6}$ ſo ausdrücken. So wäre $a = 1$; es ſey $b = 4$; alſo $c = 2$. Nun ſtatt der Buchſtaben die Werthe der Zahlen geſetzt.

Alſo

Alſo $\frac{1}{4+2} = \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 2}{4^2} + \frac{1 \cdot 2^2}{4^3} - \frac{1 \cdot 2^3}{4^4} + \frac{1 \cdot 2^2}{4^5} \ldots\ldots$

Oder die Potenzen würklich ausgedrückt; $= \frac{1}{4} - \frac{2}{16} + \frac{4}{64} - \frac{8}{256} + \frac{16}{1024} \ldots\ldots$

Hievon muß man erſt die Plus=, denn die Minusgrößen addiren, und denn von einander abziehen. Man hätte hier von Plusgrößen $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{64}$ $\frac{16}{1024}$, die unter einerley Benennung gebracht, machen zuſammen $\frac{336}{1024} = \frac{21}{64}$ und die Minusgrößen waren $\frac{2}{16}$, $\frac{8}{256}$ zuſammen $\frac{5}{32}$. Wenn man alſo von $\frac{21}{64}$ die $\frac{5}{32}$ abziehet, nachdem ſie unter einerley Benenitung gebracht ſind, ſo hat man $\frac{11}{64}$, welches nur um eine Kleinigkeit größer iſt als $\frac{1}{6}$, und je länger man die Reihe durch die Plus= und Minuszeichen fortgeſetzet hätte, je mehr würde man ſich der Wahrheit genähert haben. Noch ein Exempel: man ſoll $\frac{2}{7}$ auf die Art ausdrücken, ſo wird a = 2, nun ſey b = 4, alſo c = 3, alſo $\frac{a}{b+c} = \frac{2}{4+3}$. In der Buchſtabenreihe, anſtatt der Buchſtaben, dieſe beſtimmten Werthe geſetzet, ſo würde die Reihe ſeyn.

$\frac{2}{4+3}$

$$\frac{2}{4+3} = \frac{2}{7} = \frac{2}{4} - \frac{2.3}{4^2} + \frac{2.3^2}{4^3} - \frac{2.3^3}{4^4} + \frac{2.3^4}{4^5}$$

$$- \frac{2.3^5}{4^6} + \frac{2.3^6}{4^6} - \frac{2.3^7}{4^8} \text{.. u. ſ. w.} = \frac{2}{4} - \frac{6}{16}$$

$$+ \frac{18}{64} - \frac{54}{256} + \frac{162}{1024} - \frac{486}{4096} + \frac{1458}{16384}$$

$- \frac{4374}{65536}$ u. ſ. w. Dieſe Größen unter einerley Benennung gebracht, und nachher die Minus- und Plusgrößen von einander abgezogen, wird einen Bruch machen, der nur um ſehr weniges kleiner iſt als $\frac{2}{7}$, daß er etwas kleiner iſt, kömmt daher, weil man bey der Minusgröße die Reihe abgebrochen hat.

Wir müſſen noch zeigen, wie eine Reihe von Größen durch die wirkliche Diviſion eines Bruchs, der alſo ausſiehet, $\frac{a}{b-c}$ entſtehet. Denn auch unter dieſer Zeichnung kann man, wie wir gezeiget haben, alle mögliche Brüche vorſtellen. Wir wollen das dividirte Exempel hier ganz hinſetzen, wer die Diviſion recht erlernet hat, wird es ohne Schwierigkeit verſtehen.

$$b-c)\ a\ \Big|\ \frac{a}{b}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}+\frac{ac^3}{b^4}\ \text{u. ſ. w.}$$

$$a-\frac{ac}{b}$$

$$+\frac{ac}{b}$$

$$+\frac{ac}{b}-\frac{ac^2}{b^2}$$

$$+\frac{ac^2}{b^2}$$

$$+\frac{ac^2}{b^2}-\frac{ac^3}{b^3}$$

$$+\frac{ac^3}{b^3}$$

$$+\frac{ac^3}{b^3}-\frac{ac^4}{b^4}$$

$$+\frac{ac^4}{b^4}$$

In dieſer Reihe ſind alle Größen plus, und die Reihe geht alſo fort $\frac{a}{b-c}=\frac{a}{b}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}+\frac{ac^3}{b^4}+\frac{ac^4}{b^5}+\frac{ac^5}{b^6}$ u. ſ. w. bis in die Ewigkeit

Ein Exempel in Zahlen ſoll dieſes erläutern. Wir wollen die Reihe von $\frac{1}{2}$ ſuchen. Es ſey $a=1$.
$b=4$.

$b=4.$ und $c=2.$ ſo wäre $\frac{a}{b-c}=\frac{1}{4-2}$ welches $\frac{1}{2}$ iſt. Nun ſtatt der Buchſtaben die Zahlen geſetzet.

Alſo: $\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1.2}{4^2}+\frac{1.2^2}{4^3}+\frac{1.2^3}{4^4}+\frac{1.2^4}{4^5}\ldots$

$=\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{4}{64}+\frac{8}{256}+\frac{16}{1024}\ldots$

Wenn man dieſe Brüche addirt, nachdem ſie unter einerley Benennung gebracht ſind, ſo wird faſt $\frac{1}{2}$ herauskommen. Sie ſind zuſammen $\frac{31}{64}$, alſo von $\frac{1}{2}$ noch um $\frac{1}{64}$ nur verſchieden, und ſetzt man die Reihe fort, ſo kann man ihn endlich ſo genau ausdrücken, daß der Unterſchied zwiſchen dem gegebenen Bruch, und dem, der aus der Addition dieſer Reihe entſpringt, unendlich klein iſt, und alſo die Reihe ſicher anſtatt des Bruchs kann geſetzet werden. Noch ein Exempel, man ſoll 3, oder eine jede ganze Zahl in bloßen Brüchen ausdrücken. Das geht an, denn 3 iſt $=\frac{3}{1}$, dieſes nun nach Buchſtaben $\frac{a}{b-c}$ eingerichtet, ſo wäre $a=3.$ Nun wollen wir $b=2$ gelten laſſen nnd $c=1.$ Alſo wäre $\frac{a}{b-c}=\frac{3}{2-1}$ welches $\frac{3}{1}$ iſt $=3.$ Nun wenn man nach dem Ausdruck $\frac{3}{2-1}$ in der Reihe die Zahlen anſtatt der Buchſtaben

ſetzet, ſo wird die Reihe oder $3 = \frac{3}{2} + \frac{3.1}{2^2} + \frac{3.1^2}{2^3} + \frac{3.1^3}{2^4} + \frac{3.1^4}{2^5} + \frac{3.1^5}{2^6} + \frac{3.1^6}{2^7}$ u. ſ. w. aber 1 iſt in allen Potenzen = 1. und multipliciret daher in keiner Potenz. Die Reihe wird alſo: $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{128}$, welche Brüche zuſammen addirt $= \frac{381}{121}$ ausmachen. Wenn man Zähler und Nenner beyde mit 128 dividiret, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen beyden $\frac{3}{121}$, nemlich zwiſchen 3 und dieſem Bruche, und um ſo viel iſt noch der Bruch zu klein, welchen Unterſchied man noch weit kleiner hätte machen können, wenn man die Reihe fortgeſetzet hätte. Ein jeder wird die Exempel leicht vermehren können.

§. 223. Ehe wir weiter gehen, reden wir noch etwas von der Diviſion der Brüche in benamten Zahlen, welches ein jeder, der das Vorhergehende gefaßt hat, leicht begreifen wird. Es geſchiehet dieſe Diviſion, wie die Diviſion der Brüche in unbenamten Zahlen, und es kann der Dividendus von ein oder mehrern Gliedern ſeyn. Der Diviſor iſt gewöhnlich eine ganze Zahl, wäre er aber auch ein Bruch, ſo könnte derjenige, welcher unſere Lehre von der Diviſion der Brüche behalten hat, doch nicht irren.

Wir wollen einige Exempel geben.

$5\frac{1}{2}$ rthl. in 16 Theile $= \frac{11}{2} : \frac{16}{1} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{11}{32}$ rthl. ſo viel bekömmt jeder.

$214\frac{1}{7}$ Thaler + $15\frac{1}{9}$ gr. + $3\frac{3}{8}$ pf. in 21 Theile
$= \frac{1499}{7}$ rthl. + $\frac{136}{9}$ gr. + $\frac{27}{8}$ pf. in $\frac{21}{1}$ Theile
$= \frac{1499}{7} \cdot \frac{1}{21}$ Thaler + $\frac{16}{9} \cdot \frac{1}{21}$ gr. + $\frac{27}{8} \cdot \frac{1}{21}$ pf.
$= \frac{1499}{147}$ Thaler + $\frac{136}{189}$ gr. + $\frac{27}{168}$ pf.
würklich dividiret $= 10\frac{29}{147}$ Thaler $\frac{136}{189}$ gr. $\frac{9}{68}$ pf.

§. 224. Man möchte nun ſagen, wie man ſolche Ausdrücke als $\frac{3}{20}$ rthl. $\frac{136}{189}$ gr. ꝛc. zu Benennungen einer geringern Art bringen möchte, denn das ſieht man bald ein, daß, da z. E. $\frac{3}{26}$ rthl. da es noch kein ganzer Thaler iſt, Groſchen, auch wol Pfennige enthalten müſſe, und daß der Werth dieſes Bruchs ſich doch in Groſchen und Pfennigen müſſe geben laſſen. Bey der Addition, Subtraktion und Multiplikation der Brüche in benamten Zahlen haben wir ſchon verſprochen es zu lehren, wie man es anzufangen habe, wenn man in Brüchen in benamten Zahlen Größen von höhern Benennungen hat, ſie in Werthen der geringern Benennung ausdrücken zu lernen. Man nennet dieſes Brüche reduciren. Es iſt hiebey nothwendig, daß man wiſſe, wie viel Einheiten der geringern Ordnung auf eine Einheit der nächſt höhern gehen. Nachdem multipliciret man den Zähler des Bruchs in benamten Zahlen (welchen Bruch ich in geringern Benennungen ausdrücken will) mit der Zahl, die mir anzeiget, wie viel eine Einheit von dieſer Ordnung, in welcher der Bruch ſich befindet, Einheiten der nächſt niedrigern enthalte. Nun dividiret man dieſes Produkt durch den Nenner des Bruchs, und giebt dem Quotienten den Namen

der geringern Benennung. Z. E. $\frac{3}{8}$ rthl. wie viel Groſchen? Es gehen 36 Groſchen auf einen Thaler. Alſo $\frac{3.36}{8} = \frac{108}{8} = 13\frac{4}{8} = 13\frac{1}{2}$ gr. wollte man den $\frac{1}{2}$ gr. zu Pfennigen haben, ſo gehen 8 pf. auf einen Groſchen, alſo $\frac{1.8}{2} = \frac{8}{2} = 4$ pf. folglich $\frac{3}{8}$ rthl. iſt $= 13$ gr. 4 pf.

Wir müſſen dieſes Verfahren beweiſen. Es iſt bekannt, daß der **Nenner** eines Bruchs anzeiget, in wie viel Theile die Einheit getheilet iſt, und der **Zähler**, wie viel man dieſer Theile genommen habe. Wenn man alſo neben dem Zähler die Größe anzeigte, welche herauskäme, wenn man die größere Einheit in ſo viel Theile der geringern theilte, als ſie wirklich hat, und dieſe Größe ſo vielmal nähme, als der Zähler des Bruches fordert, ſo iſt es leicht begreiflich, daß ich alsdenn den Bruch in den nächſt geringern Werthen ausgedrückt hätte, und es iſt würklich noch eben die Größe, denn man hat den Zähler würklich nicht verändert, ſondern nur an ſeiner Statt eben ſo viel, aber in einer geringern Ordnung geſetzet. Z. E. $\frac{3}{4}$ rthl. da iſt die Einheit in 4 Theile getheilet, nun weiß ich 1 Thaler hat 36 gr. Alſo 36 gr. ſind in 4 Theile getheilet, das macht ein Theil 9 mgr. Solcher Theile hat man 3 genommen, das ſind alſo 27., folglich $\frac{3}{4}$ rthl. $= 27$ gr., denn $\frac{3}{4}$ rthl. wäre doch auch $\frac{3.1}{3}$ rthl., nun anſtatt der 1 die würkliche kleinere Benennung des Thalers in Groſchen oder 36 geſetzet, ſo bekömmt man den Werth des Bruchs in einer geringern Benennung. Unſer jetziges Verfahren müſten wir aber alſo ausdrücken $= \frac{3.36}{4}$ gr. $= \frac{108}{4}$ gr. $= 27$ gr. Die ganz

all

allgemeine Formel alſo: wenn ein Bruch einer Größe $= \frac{a}{b}$ wäre, und man wollte ihn in niedrigern Werthen ausdrücken, da c Einheiten auf die eine Einheit der nächſt größern giengen, wäre $\frac{a.c}{b}$

Nun wird es uns leicht ſeyn, alle benamte Brüche von höhern Benennungen in Werthen der niedrigern auszudrücken, welches oft ſehr nöthig und nützlich iſt.

Exempel: $1\frac{3}{4}$ rthl. $6\frac{2}{3}$ gr. wie viel Pfennige? Man ſieht wohl, daß man wiſſen muß, wie viel Pfennige auf einen rthl. und Groſchen gehen; auf einen Groſchen gehen 8 pf., und auf einen Thaler 288. Dieſe Groſchen zu unächten Brüchen gemacht, und den Zähler der Thaler mit 288, und der Groſchen mit 8 multipliciret, denn dividiret, und beyde Quotienten addiret.

Alſo: $= \frac{7.288}{4} + \frac{20.8}{3} = \frac{2016}{4} + \frac{160}{3} = 504 + 53\frac{1}{3} = 557\frac{1}{3}$ pf.

§. 225. Es möchte manchen gefällig ſeyn, wenn wir hiebey den Namen und Werthe verſchiedener Dinge beyfügten, wie viel Einheiten der geringern Ordnung zu einer Einheit der nächſt höhern gehören. Und dieſes wollen wir nun jetzt anzeigen.

1 rthl. hat 36 mgr.; 1 mgr. hat 8 pf.; ein Pfennig hat 2 Heller.

1 rthl. hat 24 gute Groſchen; 1 guter Groſchen hat 12 Pfennig.

1 Mariengulden hat 20 mgr.

1 Schiffpfund hat 20 Ließpfund; 1 Ließpfund hat 14 Pfund.

1 Centner hat 114 Pfund auch an manchen Orten 110 Pfund.

1 Pfund hat vier Viertelpfund: 1 Viertelpfund 8 Loth.

1 Loth hat vier Quentin; 1 Quentin hat 4 Pfennig Gewichte.

1 Pfund hat 2 Mark; eine Mark 8 Unzen; eine Unze 2 Loth u. ſ. w.

Hiernach wiegt man Silber.

1 Mark hat 16 Loth; 1 Loth 1½ Carat; 1 Carat 12 Gran.

Hiernach wiegt man Gold.

1 Pfund hat 12 Unzen; 1 Unze hat 8 Drachmen; 1 Drachmen 3 Scrupel; 1 Scrupel 20 Gran. Dieſes iſt Apothekergewicht.

1 Ballen Papier hat 10 Ries; 1 Ries 20 Buch; 1 Buch 24 Bogen.

1 Wiſpel 4 Scheffel; 1 Scheffel 10 Himbten; 1 Himbte 4 Vierfas; 1 Vierfas 4 Loch. Doch dieſes iſt an vielen Orten verändert.

1 Fuder Wein hat 4 Ochshöft, 1 Ochshöft 60 Stübchen; 1 Stübchen 4 Quartier; 1 Quartier 2 Nöſſel.

1 Ohm Wein hat 40 Stübchen.

1 Fas Bier hat 108 Stübchen.

1 Tonne iſt ¼ Faß.

Zimmer Rauchwerk oder Häute hält 4 Dächer Dächer 10 Stück.

Wir führen nicht mehr an, weil doch faſt an allen Orten andere Eintheilungen ſind, die man ſich bekannt machen muß. Wir gehen weiter, zu der fernern theoretiſchen Abhandlung der Brüche fort.

§. 226. Wir zeigten im §. 145 an, wie man auch Potenzen habe, davon Exponenten Brüche wären, und verſprachen, in der Lehre von den Brüchen zu zeigen, wie man dieſe Art Potenzen bey der Multiplikation und Diviſion behandeln müſſe. Wir wollen jetzt dieſes Verſprechen erfüllen. Wenn die Exponenten der Potenzen Brüche ſind, ſo laſſen ſich dieſe Brüche eben ſo behandeln als andere Brüche: nemlich ſo zu verſtehen, daß Zähler und Nenner dieſes Bruchs mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt, den Bruch nicht ändere. Z. E. $x^{\frac{3}{4}}$ wäre völlig gleich $x^{\frac{3.2}{4.2}} = x^{\frac{6}{8}}$ und da $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ und . $x^{\frac{6}{8}} = \sqrt[8]{x^6}$ §. 145 ſo wird auch $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[8]{x^6}$. gleichfalls da $\sqrt[4]{x^6}$ iſt $= x^{\frac{6}{4}}$. Aber wenn man auch hier Zähler und Nenner mit einerley Zahl dividiret, ſo ändert das die Größe nicht $x^{\frac{6}{4}} = x^{\frac{6.2}{4.2}} x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3}$ und $\sqrt[4]{x^6}$ iſt alſo völlig gleich $\sqrt[2]{x^3}$. Es iſt dieſes leicht begreiflich, denn wenn des Exponenten Zähler und Nenner mit einerley Zahl multipliciret, oder dividiret iſt, ſo iſt es ja eben ſo gut, als ob er mit 1 multipliciret oder dividirt wäre, welches weder multipliciret noch dividiret, und alſo eine Größe nicht im geringſten ändert. Auf dieſe Art kann man Poten-

zen, die Bruchexponenten haben, addiren, ſubtrahiren, multipliciren und dividiren. Nur muß man wohl bemerken, daß, wenn man ſie addirt und ſubtrahirt, dieſes nicht geſchiehet wie beym Bruche, da man die Zähler, wenn ſie unter einerley Benennung gebracht ſind, addiret, ſondern man ſetzet zwiſchen die Potenzen das Zeichen + oder −, und man bringet ſie nur unter einerley Benennungen um des bequemen Ausdrucks willen, welchen man zuweilen in der Rechnung nöthig hat. Denn das Addiren und Subtrahiren der Exponenten iſt, wie uns noch bekannt ſeyn wird, ihre Multiplikation und Diviſion mit einander. Einige Exempel werden dieſes erläutern; man ſoll $\sqrt{x^3}$ und den $\sqrt[3]{x^4}$ addiren, das wären $x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{4}{3}}$. Und ſo könnte man es auch in manchen Fällen wol laſſen, allein man kann dieſe beyden Bruchpotenzen auch unter einerley Benennung bringen, und alsdenn behandelt man dieſe beyden Bruchexponenten wie andere.

$x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{4}{3}}$ iſt alſo $= x^{\frac{3.3}{2.3}} + x^{\frac{4.2}{3.2}} = x^{\frac{9}{6}} + x^{\frac{8}{6}} = \sqrt[6]{x^9} + \sqrt[6]{x^8}$. Es würde ſehr unrichtig ſeyn, wenn man ſagen wollte: $x^{\frac{9}{6}} + x^{\frac{8}{6}}$ wäre $= x^{\frac{9+8}{6}} = x^{\frac{17}{6}} = \sqrt[6]{x^{17}}$. Wir werden nachher gleich zeigen, wennehr man ſo verfahren muß. Noch ein Exempel.

$$\sqrt[3]{x^2y^3} + \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{3}}y^{\frac{3}{3}} + x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2.4}{3.4}}y^{\frac{3.4}{3.4}} + x^{\frac{3.3}{4.3}} = x^{\frac{8}{12}}y^{\frac{12}{12}} + x^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{x^8y^{12}} + {}^{12}+ x^9$$

und

und in Buchſtaben $\sqrt[n]{y^r} + \sqrt[m]{y^s} = y^{\frac{r}{n}} + y^{\frac{s}{m}} = y^{\frac{rm}{nm}} + y^{\frac{sn}{mn}} = \sqrt[nm]{y^{rm}} + \sqrt[nm]{y^{sn}}$. Eben ſo, wenn man dieſe Größen von einander ſubtrahiren ſollte, ſo wäre $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{3.3}{2.3}} - x^{\frac{4.2}{3.2}} = x^{\frac{9}{6}} - x^{\frac{8}{6}} = \sqrt[6]{x^9} - \sqrt[6]{x^8}$. Ferner $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1.4}{2.4}} - x^{\frac{1.2}{4.2}} = x^{\frac{4}{8}} - x^{\frac{2}{8}} = \sqrt[8]{x^4} - \sqrt[8]{x^2}$ und in Buchſtaben. $x^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{t}{r}} = x^{\frac{nr}{mr}} - x^{\frac{tm}{rm}} = \sqrt[mr]{x^{nr}} - \sqrt[mr]{x^{tm}}$.

§. 227. Dieſes Mittel, daß man die Potenzen, deren Exponenten Brüche ſind, auf ſolche ſchickliche Art verändern kann, thut öfters in Rechnungen große Dienſte, wenn man oft nöthig hat, Potenzen unter bequemere Ausdrücke zu bringen. Denn es geht allezeit an, daß, wenn auch die Potenz keinen Bruchexponenten hat, man ihr einen geben kann, wenn man es nöthig befindet, indem man doch allezeit denken kann, ſie habe einen Bruchexponenten, deſſen Nenner 1 ſey. Z. E. a^{m-1} kann doch auch alſo gedacht werden, $a^{\frac{m-1}{1}}$ und alsdenn kann man den Bruch anders ſchreiben, wenn man es nöthig befindet, ohne daß die Größe in mindeſten verändert wird. So iſt a^{m-1} völlig gleich $a^{\frac{m-1}{1}}$ dieſe wieder völlig gleich $a^{\frac{(m-1)n}{1 \cdot n}} = a^{\frac{m.n-n}{n}} = \sqrt[n]{a^{mn-n}}$ ſo iſt $a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1.n}{m.n}} = a^{\frac{n}{m.n}} = \sqrt[m.n]{a^n}$, und ſolche Ausdrücke kann man öfters

in den Gleichungen vortreflich gebrauchen. Daher man ſich fleißig darin üben muß.

§. 228. Im 92 §. haben wir gelehrt, daß, wenn man Potenzen von einerley Benennung mit einander zu multipliciren hat, man ihre Exponenten addiren müſſe, und das gilt auch für Bruchexponenten, wie ſchon daraus folget, daß man doch eine Bruchpotenz als eine wirkliche Potenz zu betrachten hat. Allein will man Potenzen, deren Exponenten Brüche ſind, mit einander multipliciren, das heißt, ihre Exponenten addiren, ſo müſſen dieſe Exponenten erſt unter einerley Benennung gebracht ſeyn. Das geſchiehet auf die gewöhnliche Art, und denn addirt man die Zähler zuſammen, und giebt ihnen den allgemeinen Nenner. Z. E.

$x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1.5}{2.5}} x^{\frac{2.2}{5.2}} = x^{\frac{5}{10}} x^{\frac{4}{10}} = x^{\frac{5+4}{10}} = x^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{x^9}$ Ferner $x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{1m}{2m}}.x^{\frac{n.2}{m2}} = x^{\frac{m+2n}{2m}} = \sqrt[2m]{x^{m+2n}}$.

Ferner, da wir §. 143 gelehret haben, wie man ſolche Größen, als $\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{x^2}$ u. ſ. w. ausdrücken müſſe, ſo wollen wir auch davon Exempel der Multiplikation geben. So wäre alſo $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ das wollen wir mit x multipliciren.

Das wäre alſo: $x^{-\frac{1}{2}}.x^1 = x^{-\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{1}} = x^{-\frac{1.1}{2.1}}.x^{\frac{1.2}{1.2}}$ =

$= x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{2}} = x^{\frac{-1+2}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = {}^{2}\sqrt{x}$. Alſo $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x$ wäre $= \sqrt{x}$. Ferner: da $\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{4}}} = x^{-\frac{2}{4}}$ und $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$ ſo wird $\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ gleich ſeyn $x^{-\frac{2}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{2.3}{4.3}} \cdot x^{-\frac{1.4}{3.4}} = x^{-\frac{6}{12}} \cdot x^{-\frac{4}{12}} = x^{\frac{-4-6}{12}} = x^{-\frac{10}{12}} = \sqrt[12]{x^{-10}} = \frac{1}{\sqrt[12]{x^{10}}}$

Ferner $\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{y} = x^{\frac{1}{2}} \cdot 3x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{y} = 3x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{y} = 3x^{-\frac{2}{2}} \frac{1}{y} = \frac{3}{\sqrt{x^2}} \frac{1}{y} = \frac{3}{xy}$. noch $\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^4 \cdot \sqrt{x^3} = x^{-1} \cdot 2x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^4\, x^{\frac{3}{2}} =$

$x^{-\frac{6}{6}} \cdot 2x^{-\frac{4}{6}} \cdot x^{-\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{24}{6}} \cdot x^{\frac{9}{6}} = 2x^{-\frac{6}{6}-\frac{4}{6}-\frac{3}{6}+\frac{24}{6}+\frac{9}{6}}$

$= 2x^{\frac{-13+33}{6}} = 2x^{\frac{20}{6}} = 2x^{\frac{10}{3}} = 2\sqrt[3]{x^{10}}$.

Noch $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{3x^3}\, 3\sqrt{x^{10}} = x^{-2} \cdot \frac{1}{3}x^{-3} \cdot 3x^{\frac{10}{2}} =$

$x^{-\frac{4}{2}}$

$$x^{-\frac{4}{2}} \cdot \tfrac{1}{3}x^{-\frac{6}{2}} \cdot 3x^{-\frac{10}{2}} = \frac{3x^{-\frac{4}{2}-\frac{6}{2}+\frac{10}{2}}}{3} = \frac{3x^{-\frac{10}{2}+\frac{10}{2}}}{3}$$

$$= \frac{3x^0}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Doch von allen dieſen bey den Wurzelgrößen Rechnungen weitläuftiger. Noch ein Exempel in Buchſtaben.

$$x^{\frac{n}{m}} \cdot x^{\frac{1}{r}} = x^{\frac{nr}{rm}} \cdot x^{\frac{1.m}{rm}} = x^{\frac{nr+m}{rm}} = \sqrt[rm]{x^{nr+m}}$$

§. 229. Man kann auch Potenzen, deren Exponenten Brüche ſind, zu höhern Dignitäten erheben, und alsdenn multipliciret man den Zähler der Bruchpotenz mit derjenigen Zahl, welche anzeigt, zu der wie vielten Potenz man ſie erheben ſolle. Z. E. $x^{\frac{3}{2}}$ ſoll zur 2ten Potenz erhoben werden, das iſt $= x^{\frac{3.2}{2}} = x^{\frac{6}{2}} = \sqrt{x^6}$ das läßt ſich noch beſſer ausdrücken, weil 6 ſich durch 2 dividiren läßt x^3, es läßt ſich auch dieſes leicht begreifen, denn weil multipliciren heiſt, eine Größe ſo vielmal zu ſich ſelbſt addiren, als der eine Faktor Einheiten hat. So würde $x^{\frac{3}{2}}$ zur zweyten Potenz erheben heißen, den Exponenten ſo vielmal zu ſich ſelbſt addiren, als die gegebene Zahl Einheiten hat, alſo ſeyn $x^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = x^{\frac{6}{2}} = x^3$ welches aber leichter durch die Multiplikation des Zählers kann verrichtet

tet werden. Exempel: $a^{\frac{1}{3}}$ zur 5ten Potenz $= a^{\frac{1.5}{3}} = a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$ zur 5ten Potenz, da $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ ſo iſt das zur 5ten Potenz erhoben $= x^{-\frac{1.5}{2}} = x^{-\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{x^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[2]{x^5}}$; $y^{\frac{n}{r}}$ zur mten Potenz $= y^{\frac{nm}{r}} = \sqrt[r]{y^{nm}}$.

§. 230. Potenzen, deren Exponenten Brüche ſind, laſſen ſich auch durch andere Potenzen von gleichen Namen dividiren, und hat man das wohl zu merken, was wir §. 139 angezeigt haben, daß Potenzen dividiren heiſt, ihre Exponenten ſubtrahiren. Es gilt dieſes auch für Bruchpotenzen, nur verſteht es ſich von ſelbſt, daß die Bruchexponenten erſt unter einerley Benennung müſſen gebracht ſeyn, alsdenn ſubtrahirt man auf die gewöhnliche Art; Zähler von Zähler. Z. E. $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1.4}{2.4}} : a^{\frac{1.2}{4.2}} = a^{\frac{4}{8}} : a^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{4-2}{8}} = a^{\frac{2}{8}}$ und weil ſich dieſer Exponent noch zur kleinern Benennung bringen läßt $= a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.. Ferner $y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{3.2}{4.2}} : y^{\frac{1.4}{2.4}} = y^{\frac{6}{8}} : y^{\frac{4}{8}} = y^{\frac{6-4}{8}} = y^{\frac{2}{8}} = y^{\frac{1}{4}}$ =

$= \sqrt[4]{y}$. Ferner $y^{\frac{n}{m}} : y^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{ns}{m.s}} : y^{\frac{r.m}{m.s}}$
$y^{\frac{ns-rm}{ms}} = \sqrt[sm]{y^{ns-rm}}$. Ferner $y^{\frac{3}{4}} : y = y^{\frac{3}{4}} :$
$y^{\frac{1}{1}} = y^{\frac{3.1}{4.1}} : y^{\frac{1.4}{1.4}} = y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{4}{4}} = y^{\frac{3-4}{4}} = y^{-\frac{1}{4}}$
$= \frac{1}{y^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$.

§. 251. So wie ſich Bruchpotenzen durch die Multiplikation ihres Zählers zu höhern gegebenen Potenzen erhöhen ließen, ſo laſſen ſie ſich auch wieder erniedrigen: dieſes geſchiehet durch die Diviſion ihrer Exponenten, oder welches einerley iſt, durch die Multiplikation des Nenners des Bruchexponenten, denn alſo wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl dividiret § 215. Dieſes heiſt den Radix aus einem Bruchexponenten auzziehen. Z.E. Aus $a^{\frac{1}{4}}$ ſoll der dreyfache Radix ausgezogeu werden, das wäre $a^{\frac{1}{4}:3} = a^{\frac{1}{4.3}} = a^{\frac{1}{12}}$; daß aber $a^{\frac{1}{12}}$ der dreyfache Radix aus $a^{\frac{1}{4}}$ iſt, oder daß $a^{\frac{1}{4}}$ durch die dreymalige Multiplikation von $a^{\frac{1}{12}}$ entſtanden iſt, läßt ſich leicht begreifen, wenn man überlegt, daß Potenzen multipliciren, ihre Exponenten addiren heiſt, und daß, wenn der Exponent von $a^{\frac{1}{12}}$ dreymal zu ſich ſelbſt addirt wird, $a^{\frac{1}{4}}$ heraus kommen müſſe.

Und

Und das geſchieht auch wirklich. Denn $a^{\frac{1}{12}} . a^{\frac{1}{12}} . a^{\frac{1}{12}}$. iſt $= a^{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}} = a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{1}{4}}$. Exempel: der 4fache Radix aus $x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{4}:4} = x^{\frac{3}{4 . 4}} = x^{\frac{3}{16}} = \sqrt[16]{x^3}$; der 5fache Radix aus $x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{5}{3}:5} = x^{\frac{5}{3 . 5}} = x^{\frac{5}{15}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Der mfache Radix aus $x^{\frac{r}{s}} = \sqrt[m]{x^{\frac{r}{s}}} = x^{\frac{r}{s}:m} = x^{\frac{r}{s . m}} = \sqrt[sm]{x^r}$. Ferner $\sqrt[n+1]{x^{\frac{n}{s}}} = x^{\frac{n}{s.(n+1)}} = x^{\frac{n}{sn+s}} = \sqrt[sn+s]{x^n}$.

Anmerkung. Dieſes alles iſt nur ein kleiner Vorſchmack von den Wurzelgrößen und ihrer Behandlung, welchen wir in einem eignen Kapitel mit aller Deutlichkeit nur abzuhandeln uns bemühen werden. Ihre Kenntniß iſt durchaus nöthig, weil man ſonſt keine mathematiſche Schriften leſen kann, worin dieſes voraus geſetzet wird. Ich ermahne aber ſehr, alles dieſes mit großer Aufmerkſamkeit zu beherzigen und zu üben, wenn man leichte weiter kommen will.

Das

Das achte Kapitel.

Von den Decimalbrüchen.

§. 232. In der Lehre von der Numeration der Zahlen zeigten wir, daß der Werth der 9 Zahlzeichen nach der Stelle beſtimmet würde, welche ſie, von der rechten Hand angezählet, hätten, und daß immer eine Zahl, die um eine Stelle weiter von der rechten Hand abſtünde, zehnmal mehr gelte, als in dem vorigen Platz. So wäre z. E. 5555 in dem erſten Platz die 5 blos fünf, in dem zweyten funfzig, in dem dritten fünfhundert, in dem 4ten fünftauſend u. ſ. w.

Man ſiehet hieraus, daß, wenn man von der linken Hand an die Plätze zu zählen anfängt, die Zahlzeichen immer zehnmal weniger, oder nur den zehnten Theil ſo viel gelten, wenn ſie um einen Platz weiter von der linken Hand abzuſtehen kommen. Dieſes iſt ein willkührliches, nun aber allgemeines Geſetz. Allein wenn man nun, wo die Zahl in ihrem natürlichen Werthe ſtünde, nemlich bey der erſten Stelle an der rechten Hand ein Zeichen machte und doch noch immer fortführe, nach der rechten Hand Zahlen hinzuſetzen? Es iſt leicht, darauf zu antworten; ſie würden, ſo wie ſie eine Stelle nach der rechten Hand hinkämen, immer zehnmal niedriger werden. Nur müſte man doch

doch wiſſen, wo ihre einfache Bedeutung aufhörte; das zeiget man durch ein Comma (,) an. Z. E. wir wollen die obigen Zahlen wieder nehmen, 5555,5555. Wo das Comma iſt, da höret die ſimple Bedeutung der 5 auf, oder da iſt 5 in ſeinem natürlichen Werthe, und nun wird ſie immer bey jedem Platze weiter rechter Hand zehnmal kleiner. Die nächſte 5 wird alſo $\frac{5}{10}$, die darauf folgende zehnmal niedriger oder $\frac{5}{10} : 10 = \frac{5}{100}$, die darauf folgende $\frac{5}{100} : 10 = \frac{5}{1000}$, die darauf folgende $\frac{5}{10000}$ und ſo weiter ſeyn. Und ſo geht es mit allen Zahlzeichen.

§. 233. Wenn man dieſes genau betrachtet, ſo ſieht man, daß, da der Werth der Zahlzeichen immer bey jeder Stelle 10fach fällt, es Brüche werden, deren Nenner immer zehnmal größer werden, oder deren Nenner wirkliche Potenzen der Zehne ſind. Solche Brüche nennet man **Decimalbrüche**, weil ſie gleichfalls nach dem decadiſchen Geſetz eingerichtet ſind. Die Werthe der Stellen der ganzen Zahlen entſtanden, wenn eben das Zahlzeichen, das eine Stelle weiter hin linker Hand kam, mit 10 multipliciret wurde, kam es weiter noch um eine Stelle linker Hands, ſo wurde es wieder mit 10 multipliciret u. ſ. w. Alſo wurden die Werthe dieſer Zahlzeichen auch durch die Potenzen der 10 beſtimmt. Es iſt hier ein gleiches Geſetz; denn, wenn man nun den äußerſten Decimalbruch rechter Hand anſiehet, ſo iſt der, welcher um eine Stelle weiter linker Hand ſteht, zehnmal größer, oder mit 10 multipliciret u. ſ. w.

Und hieraus folget, daß auch bey Decimalbrüchen das allgemeine Geſetz der decadiſchen Ordnung gilt. **Zehn Einheiten einer niedigern Ordnung machen eine Einheit der nächſt höhern aus.**

§. 234. Wenn man Decimalbrüche zu ſchreiben hat, ſo mache man, wo der einfache Werth der Zahlzeichen aufhört, ein Comma, (,) und ſchreibe dahinter die gegebenen Decimalbrüche, die immer zehnfach kleiner werden. Man verfährt nach eben den Geſetzen wie bey ganzen Zahlen, nur daß man Zehntel, Hundertel, Tauſendtel, Zehntauſendtel, Hunderttauſendtel, Milliontel ꝛc. die Werthe der Zahlen nennet. Man ſetzet die Nenner gewöhnlich nicht darunter, weil die Werthe der Zahlen auch hier durch ihre Stelle beſtimmet werden. Z. E. 15, 34502 wäre, 15 Ganze, 3 Zehntel, 4 Hundertel, 5 Tauſendtel, kein Zehntauſendtel, 2 Hunderttauſendtel. Hat man gar keine ganze Zahlen, ſo macht man an deren Stelle eine **Null**, die nichts gilt und nur anzeiget, daß keine Einheit da ſey, dahinter kömmt das Comma, und nun ſchreibt und ſpricht man auf die gelehrte Art aus. Z. E. 0,54002 wäre, **kein Ganzes, fünf Zehntel, vier Hundertel, kein Tauſendtel, kein Zehntauſendtel, zwey Hunderttauſendtel.** Und 0,003 wäre, **kein Ganzes, kein Zehntel, kein Hundertel, drey Tauſendtel**, oder mit einem Worte, drey Tauſendtel. Wer gehörig ganze Zahlen ſchreiben und ausſprechen kann, wird hier gar keine Schwie-

rigkeiten finden. Eben die Geſetze, eben die Bezeichnungen der Ordnungen der Zahlen.

§. 235. Man hätte aber, wie ſchon aus dem vorhergehenden erhellet, den Decimalbruch 0,4321 auch ſo ſchreiben können, $\frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{1}{10000}$. Man könnte auch dieſe Brüche leicht unter einerley Benennung bringen, wenn man des erſten Zähler und Nenner mit 1000, des 2ten mit 100, des 3ten mit 10 multiplicirte, und den 4ten ungeändert ließe; alsdenn ſtünden ſie alſo: $\frac{4000}{10000} + \frac{300}{10000} + \frac{20}{10000} + \frac{1}{10000}$, nun könnte man leicht die Zähler addiren, und man hätte denn $\frac{4321}{10000}$. welches man wie einen gewöhnlichen Bruch ausſpricht. Es wären viertauſend dreyhundert ein und zwanzig Zehntauſendtel, oder die Einheit wäre in zehntauſend Theile getheilet, davon man viertauſend dreyhundert ein und zwanzig genommen hätte. Man mag ſo viel Decimalbrüche haben, als man will, ſo ſieht man, daß das angeht, ſie auf die Art zu ſchreiben.

Man wird dabey merken, daß der Nenner ſo viele Nullen bekömmt, als Decimalbrüche da ſind, welchen Nullen des Nenners man die 1 vorſetzet, und daß man alsdenn den Bruch auf die gewöhnliche Art ausſpricht.

Z. E. 15,234 wäre $= 15 + \frac{234}{1000}$ oder blos $15\frac{234}{1000}$ und 6,0045 $= 6\frac{45}{10000}$ (denn hier ſind vier Stellen der Decimalbrüche, obſchon in einigen Nullen ſtehen,) und 0,4021 $= \frac{4021}{10000}$ u. ſ. w.

Man ſchreibt auch mannigmal auf ſolche Art die Decimalbrüche, wenn man es in der Rechnung zur Bequemlichkeit nöthig hat, ſonſt bleibt man bey der erſten Schreibart.

§. 236. Man kann Decimalbrüche, ſie ſind mit ganzen Zahlen verbunden oder alleine, leicht addiren. Es geſchiehet auf die gewöhnliche Art wie in ganzen Zahlen, weil auch hier zehn Einheiten der niedrigern Ordnung eine Einheit der nächſt höhern ausmachen. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß man gleichartige Brüche unter gleichartige ſchreiben muß, als Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel ꝛc. Wenn man die Addition vollendet hat, ſo zählet man in der Summe, von der rechten Hand an, ſo viel Zahlen ab, bis man unter das Comma in den Decimalbrüchen kömmt, und mache da auch das Commazeichen, daß da die Decimalbrüche anfangen, welches aus der Natur der Sache ſchon hervorleuchtet. Z. E. Man addire 15,543; ferner 0,236; ferner 5,002; noch 0,0003. Dieſes ſtünde alſo:

$$\begin{array}{r} 15,543 \\ 0,236 \\ 5,002 \\ 0,0003 \\ \hline 20,7813 \end{array}$$

Noch addirt 3,0021; ferner 12,999; ferner 0,9; ferner 12,00096; noch 0,000004. Es

Es ſtünde:

3,0021
12,999
0,9
12,00096
0,000004
28,902064

§. 237. Beym **Subtrahiren** verfähret man eben ſo wie bey ganzen Zahlen, nur daß man, wo die Grenze der einfachen Zahl iſt, auch in der Differenz das Comma macht. Das Borgen, das Verfahren, wenn Nullen im **Minuendus** oder **Subtrahens** ſind, iſt einerley mit dem in ganzen Zahlen, weil hier eben die Geſetze ſtatt finden.

Exempel:

Minuendus	16,43.25
Subtrahens	5 02 94
Differenz	11,40 31

Minuendus	15.,0.0.0.4
Subtrahens	14,9987
Differenz	0,0017

Minuendus	0,4.3.0.0.2
Subtrahens	0,09999
Differenz	0,33003.

Die Probe geſchiehet auf die gewöhnliche Art §. 49. Es gelten hier gleichfalls bey der Addition und Subtraktion alle die Geſetze, welche bey der Addition mit entgegengeſetzten Größen §. 29 f. imgleichen bey der Subtraktion mit entgegengeſetzten Größen ſtatt fanden §. 57.

Z. E. + 3.0562	Minuendus − 5,0321
− 2,143	Subtrahens + 2,1432
	−
Summe + 0,9132	Differenz − 7,1753

§. 238. Das Verfahren bey der Multiplikation der Decimalbrüche, es mögen nun in einem, oder einigen, oder allen Faktoren, ganze Zahlen, mit Decimalbrüche verbunden, oder gar keine ganze Zahlen, oder nur in einigen ganze Zahlen, mit oder ohne Decimalbrüchen ſeyn, iſt ſehr leicht. Wir wollen jetzt eine allgemeine Regel dafür geben. **Man multiplicirer erſt die Zahlen auf die gewöhnliche Art, ohne ſich um die Decimalbrüche zu bekümmern, nachher zähler man wie viel Decimalbrüche in allen Faktoren zuſammen ſind, und ſtreicher eben ſo viel Zahlzeichen, von der rechten Hand an gezählet, im Produkte ab; und macher ſie dadurch zu Decimalbrüchen.** Erſt ein Exempel, und denn der Beweiß. Man multiplicire 5,43 mit 0,23. Es ſteht alſo:

```
  5,43
  0,23
 ------
  1629
 1086
 ------
 1,2489
```

Nun ſind in beyden Faktoren vier Decimalbrüche, ſo viel von der rechten Hand Zahlzeichen abgeſtrichen, giebt zum Produkte 1,2489 = $1,1\frac{2489}{10000}$. Wir wollen nun den Beweis davon anführen. Wenn man mit Decimalbrüchen zu multipliciren hat,

hat, ſo ſind dieſe entweder in einem oder in beyden Faktoren. Denn wenn man auch noch ſo viel Faktoren hätte, ſo multipliciret man doch nur immer zwey mit einander. Es ſollen erſt in einem Faktor Decimalbrüche ſeyn, ſo kann man dieſen Faktor als einen Bruch anſehen, deſſen Nenner ſo viel Nullen mit der vorgeſetzten 1 hat, als Decimalbrüche ſich in ſelbigen befinden §. 235. Und ſind auch ganze Zahlen mit dieſem Faktor verbunden, ſo verändert das den Nenner nicht, nur der Bruch wird alsdenn ein unächter Bruch.

Will man nun dieſen Bruch mit dem andern Faktor, welcher eine ganze Zahl iſt, multipliciren, ſo multipliciret man ja mit der ganzen Zahl ſeinen Zähler, der Nenner aber, oder die 1 mit den hinten angeſetzten Nullen bleibt ungeändert. §. 205. Dieſe aber zeigten mir an, wie viel Decimalbrüche da wären, die ich alſo abſtreichen muß. Oder wenn man den Nenner nun als einen Diviſor betrachten wollte, ſo lehret mich ja ſchon die gemeine Diviſion, daß ich ſo viel Zahlen vom Dividendus abſtreichen, und mit dem Diviſor im Bruch ſetzen müſte, als der Diviſor Nullen hinter der 1 hat. §. 112. Wir wollen dieſen Beweiß durch Exempel erläutern:

Exempel: 33,53 multipliciret mit $6 = 33\frac{53}{100}$ mit $6 = \frac{3300}{100} + \frac{53}{100}$ mit $6 = \frac{3353}{100}$ mit $6 = \frac{20118}{100}$ $= 201\frac{18}{100} = 201,18.$

Sind in beyden Faktoren Decimalbrüche, ſo kann man ſie beyde als ächte oder unächte Brüche betrachten, davon jeder Nenner ſo viel Nullen hinter der 1 hat, als Decimalbrüche darinnen ſind.

Sie ſind ächte Brüche, wenn keine ganze Zahlen mit den Decimalbrüchen verbunden wären, und unächte, wenn ſie damit verbunden ſind. Nun multipliciret man ja Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner, alſo im Produkte muß der neue Nenner ſo viel Nullen hinter der 1 bekommen, als in beyden Brüchen Nullen im Nenner waren, alſo muß man, wenn man würklich den Zähler durch den Nenner dividiret, auch im Zähler ſo viel Zahlen, von der rechten Hand an gezählet, abſtreichen, ſo viel Nullen im Nenner waren, oder ſo viel Decimalbrüche jeder Faktor hatte. Man macht alſo nach geſchehener Multiplikation ſo viel Zahlzeichen, von der rechten Hand an gezählt, zu Decimalbrüchen, als in beyden Faktoren Decimalbrüche ſich befinden.

Exempel: 5,12 mit 2,31 = $\frac{512}{100} \cdot \frac{231}{100}$ $= \frac{512.231}{10000} = \frac{118272}{10000} = 11,\frac{8272}{10000} = 11,8272.$

Kommen im Produkte nicht ſo viel Ziffern heraus, als nach der Regel abgeſtrichen werden ſollten, ſo fülle man den übrigen Platz mit Nullen, und an der Stelle der Einheit ſetze man auch eine mit dem Comma dahinter.

Z. E. 0,0000032 mit 6

$$\begin{array}{r} 0,0000032 \\ 6 \\ \hline 0,0000192 \end{array}$$

0,0000032 mit 0,00324 =

$$\begin{array}{r} 0,0000032 \\ 0,00324 \\ \hline 128 \\ 64 \\ 96 \\ \hline 0,000000010368 \end{array}$$

Wir

Wir bemerken noch, daß auch bey der Multiplikation mit Decimalbrüchen die allgemeinen Geſetze gelten, daß einerley Zeichen in beyden Faktoren plus, verſchiedene aber minus zum Produkte geben. Es folget aus den gegebenen allgemeinen Begriffen der Multiplikation, die auch hier gelten müſſen.

§. 239. Bey der Diviſion, worin Decimalbrüche vorkommen, finden ſich verſchiedene Fälle. Entweder, es ſind im Dividendus ganze Zahlen mit Decimalbrüchen verbunden, oder auch wol Decimalbrüche alleine, und im Diviſor blos ganze Zahlen; oder es iſt umgekehrt, der Diviſor beſteht aus Decimalbrüchen mit oder ohne ganze Zahlen verbunden, nur der Dividendus hat blos ganze Zahlen, oder es ſind in beyden Decimalbrüche mit oder ohne ganze Zahlen verbunden, und die Decimalbrüche ſind in beyden entweder gleich viel, oder in einem mehr als in dem andern. Das ſind nun ziemlich viel Fälle, indeſſen läßt ſich doch für alle eine allgemeine Regel geben, ſie iſt dieſe:

Man dividirct auf die gewöhnliche Art. Nachher zählet man, ob im Dividendus oder im Diviſor mehr Decimalbrüche ſind, oder ob in beyden gleich viel ſind. Sind in beyden gleich viel, ſo läßt man den Quotienten, ſo wie man ihn bekommen hat, und er iſt alsdenn in ganzen Zahlen. Sind im Dividendus mehr Decimalbrüche, ſo ſtreichet man, von der

rechten Hand an gerechnet, vom Quotienten ſo viel Zahlen ab, und macht ſie zu Decimalſtellen, als der Dividendus mehr Decimalbrüche hat als der Diviſor. Sind im Diviſor mehr Decimalbrüche, ſo hängt man dem Quotienten ſo viel Nullen noch an, und macht alſo um ſo viel Claſſen jede Zahl des Quotienten größer, als der Diviſor mehr Decimalbrüche hat.

Dieſe Regeln gelten auch, wenn entweder im Diviſor, oder Dividendus gar keine Decimalbrüche wären, ſondern in einem von beyden nur alleine. Wie man zu handeln hat, wenn ein Reſt bleibet, werden wir nachher noch zeigen.

Exempel in beyden gleichviel Decimalbrüche. Man dividire 65,19 durch 1,23 alſo:

```
 65,19 | 53
(1,23).|
 615 .
 ------
  369
 (1,23)
  369
 ------
   0
```

Hier iſt der Qoutient 53, oder 1,23 iſt in 65,19 drey und funfzigmal enthalten.

Im Dividendus mehr Decimalbrüche als im Diviſor.

1) In beyden ganze Zahlen und Decimalbrüche. Man dividire 12,236 durch 2,3.

11..

```
12,236 | 5,32
(2,3). .|
 115. .
 ─────────────
  7,3.
 (2,3).
  69.
 ─────────────
   46
  (2,3)
   46
 ─────────────
    0
```

Hier waren im Dividendus 3 Decimalbrüche, und im Diviſor nur einer, alſo müſſen nach der Regel, weil im Dividendus zwey Decimalbrüche mehr ſind als im Diviſor, im Quotienten zwey Zahlen abgeſtrichen werden.

2) Im Diviſor eine ganze Zahl, im Dividendus ganze Zahlen und Decimalbrüche. Man dividire 31,155 durch 5.

```
31,155 | 6,231
(5). . |
30. .
 ─────────────
 11.
 10.
 ─────────────
  15
  15
 ─────────────
   5
   5
```

Im Diviſor war gar kein Decimalbruch, im Dividendus drey, alſo ſtreicht man auch 3 Ziffern ab.

3) Im Diviſor eine ganze Zahl, im Dividendus blos

blos Decimalbrüche. Man dividire 0,009768 durch 3.

```
0,009768|3256
    (3)...|
     9...
    ------
      7..
      6..
     -----
      16.
      15.
     -----
       18
       18
```

Allein weil im Dividendus 6 Decimalbrüche mehr waren als im Diviſor, (hier waren im Diviſor gar keine) ſo müſſen auch 6 Zahlen abgeſtrichen werden, und an die Stelle der Einheit oder einfachen Zahl auch eine Null, der Quotient würde alſo ſeyn müſſen 0,003256

4) In beyden blos Decimalbrüche, nur im Dividendus mehr. Man dividire 0,006816 durch 0,0213

```
 6816|32
(213).|
 639.
------
  426
 (213)
  426
------
   9
```

Allein im Diviſor waren vier Decimalbrüche, und im Dividendus 6, alſo im Dividendus zwey mehr, folglich müſſen zwey Zahlen des Quotienten abgeſtrichen, und weil hier nur zwey ſind, zum Zeichen der einfachen Zahl die 0 mit dem Comma dahinter geſetzt werden.

Der

Der Quotient würde alſo ſeyn 0,32, das heißt, der Diviſor wäre im Dividendus ſo vielmal enthalten.

Nun im Diviſor mehr Decimalbrüche, als im Dividendus. Wir wollen blos die Exempel hinſetzen. Man dividire 504,3 durch 1,23.

```
  504,3 | 41
  (123).|
   492 .
 ------------
   123
  (123)
   123
```

Daran hängt man die Null, und der Quotient iſt eigentlich 410, weil im Diviſor ein Decimalbruch mehr iſt als im Dividendus.

```
492 durch 1,23     492  | 4
                 (1,23) |
                   492
```

Weil im Diviſor zwey Decimalbrüche mehr ſind als im Dividend, wo hier gar keine ſind, ſo iſt der wahre Quotient 400. Man dividire 3325 durch 0,25.

```
durch 0,25.   3325 | 133
              (25). . |
 ------------------
               82 .
              (25).
               75 .
 ------------------
               75
              (25)
               75
```

im Diviſor zwey Decimalbrüche, im Dividendus gar keine, alſo zwey Nullen an den Quotienten, und er iſt alſo 13300.

So

So vielmal iſt 0,25 in 3325 enthalten. Man dividire 0,3325 durch 0,000025.

```
3.325 | 133
 (25)
 ----
  82
  75
  ----
   75
   75
```

Hier ſind im Dividendus 4 Decimalbrüche, aber im Diviſor 6, alſo im Diviſor zwey mehr, und daher werden dem Quotienten zwey Nullen angehängt, und er iſt 13300.

Wir haben dieſe Diviſion der Decimalbrüche mit gutem Vorbedacht mit vielen Exempeln erläutert, weil ſie nöthig und wichtig iſt; wir müſſen nun unſer Verfahren beweiſen.

§. 240. Auf alle Fälle hat man bey der Diviſion der Decimalbrüche ein Bruchexempel, und hieraus folget auch der Beweiß. Sind im Diviſor und im Dividendus gleich viel Decimalbrüche, ſo haben beyde gleich große Nenner oder gleich viel Nullen hinter der 1 des Nenners ſtehen. Da Brüche mit Brüchen dividiren heißt, den einen Diviſor umkehren, und den Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multipliciren, §. 218. ſo müſſen auf dieſen Fall die alten Nenner ſich gegen einander heben, und der Quotient nothwendig eine ganze Zahl werden.

Z. E. 65,19 durch 1,23 iſt $= \frac{6519}{100} : \frac{123}{100} = \frac{6519}{100} \cdot \frac{100}{123} = \frac{6519}{123} = 53$.

So

Sind im Dividendus mehr Decimalbrüche als im Diviſor, ſo wird nach dieſem Verfahren noch in dem neuen Nenner eine Potenz der Zehne oder eine 1 mit ein oder etlichen Nullen überbleiben, folglich wenn der Diviſor im Dividendus aufgeht, müſſen in dem neuen Zähler ſo viel Zahlen abgeſtrichen werden, oder der Werth des Quotienten muß um ſo viel zehnmal geringer werden, wie das aus der Operation ſelbſt erhellet.

Z. E. 12,236 durch 2,3 $= \frac{12236}{1000} : \frac{23}{10}$
$= \frac{12236}{1000} \cdot \frac{10}{23} = \frac{12236 \cdot \cancel{10}}{100\cancel{0} \cdot 23} = \frac{12236}{2300}$ den Bruch oben unten mit 23 dividiret $= 5\frac{32}{100} = 5{,}32$

Eben ſo: 0,006816 durch 0,0213 $= \frac{6816}{1000000}$
$: \frac{213}{10000} = \frac{6186 \cdot 10000}{1000000 \cdot 213} = \frac{6816 \cdot \cancel{10000}}{100\cancel{0000} \cdot 213}$
$= \frac{6816}{21300} = \frac{32}{100} = 0{,}32.$

Sind im Diviſor mehr Decimalbrüche, ſo wird nach dieſem Verfahren im neuen Zähler noch eine Potenz der Zehne überbleiben, oder die Größe darin multiplicieret ſeyn, alſo müſten, wenn der Diviſor im Dividendus aufgeht, dem Quotienten noch ſo viel Nullen angehangen werden, oder er wird noch um ſo viel zehnfältig größer.

Exem-

Exempel: 504,3 durch 1,23 $= \frac{5043}{10} : \frac{123}{100}$
$= \frac{5043}{10} \cdot \frac{100}{123} = \frac{5043 \cdot 10\not{0}}{1\not{0} \cdot 123} = \frac{50430}{123}$. Oben und unten mit 123 dividirt = 410.

Ich habe zu den Erläuterungsexempeln die gewählet, die wir ſchon vorher gerechnet hatten, welche man nachſehen kann.

§. 241. Bey den Exempeln, die wir bis daher gewählet haben, iſt der Diviſor im Dividendus ganz aufgegangen. Wenn aber ein Reſt bleibet, ſo kann man, wenn man will, alſo verfahren. Sind im Diviſor und Dividendus gleich viel Decimalbrüche geweſen, ſo hänget man den Reſt, als den Zähler eines Bruchs, an den Quotienten, und den Diviſor, als den Nenner aber, als ganze Zahl darunter.

Z. E. 77,92 durch 0,18. Davon wird der Quotient $432\frac{16}{18}$. Denn 77,92:0,18 $= \frac{7792}{100} : \frac{18}{100}$
$= \frac{7792}{18} = 432\frac{16}{18}$.

Sind im Dividendus mehr Decimalbrüche als im Diviſor, ſo beſtimmt man zwar die Decimalbrüche nach der gelehrten Regel §. 239. hänget alsdenn den Reſt an als Zähler, dem man den Diviſor, als ganze Zahl geſchrieben, mit ſo viel angehängten Nullen zum Nenner giebt, als der Quotient ohne den Reſt Decimalbrüche hatte.

Z. E.

Z. E. 2,124 durch 1,6

```
2.124 | 1,32 12/1600
(16)
----
 52
 (16)
 48
----
  44
  (16)
  32
----
  12
```

Denn es bleiben nach dem §. 234. noch ſo viele Potenzen der 10, womit der Zähler des Reſtes noch außer dem Nenner zu dividiren iſt, als der Quotiente Decimalſtellen hatte. Dieſes wird klar ſeyn, wenn man ſich das Exempel ſo vorſtellet:

$$2,124 : 1,6 = \frac{2124}{1000} : \frac{16}{10} = \frac{2124 . 10}{1000 . 16} = \frac{2124}{100 . 16}$$

oder welches einerley, weil es durch beyde Faktoren ſoll dividiret werden, $\frac{2124 : 16}{100}$ würklich erſt durch 16 dividiret $= \frac{132\frac{12}{16}}{100} = \frac{132}{100} + \frac{\frac{12}{16}}{100} =$

$$1,32 + \frac{12}{1600}$$

Sind im Diviſor mehr Decimalbrüche als im Dividendus, ſo wird der Quotient auch nach den gegebenen Regeln erſt geordnet, der Reſt als Zähler ihm angehänget, dem man aber hinten noch ſo viel Nullen giebt, als man dem erſten

Theil des Quotienten gegeben hatte. Alsdenn der Diviſor als ganze Zahl zum Nenner darunter geſchrieben. Denn alsdenn hat auch im Reſte der Zähler oder Dividendus noch immer ſo viel Decimalbrüche weniger als der Nenner oder Diviſor. Folgendes Exempel wird dieſes erläutern:

502,3 : 0,123. würde alſo dividiret werden müſſen nach den Regeln

```
5.0 2 3 | 40
(1 2 3) |
 4 9 2
───────
 1 0 3
(1 2 3)
───────
  1 0 3
```

Weil nun im Diviſor zwey Decimalbrüche mehr ſind als im Dividendus, ſo müſſen dem Quotienten noch zwey Nullen angehänget werden. Er iſt alſo 4000, und dem Reſte auch zwey Nullen $\frac{10300}{123}$ alſo der ganze Quotient $4000\frac{10300}{123}$. Da iſt aber der Reſt noch ein unächter Bruch, welcher $83\frac{91}{123}$ alſo zum Quotienten dieſes zu addirt iſt der ganze Quotient $4083\frac{91}{123}$. Denn man ſehe es nur alſo an: $502,3 : 0,123 = \frac{5023}{10} : \frac{132}{1000} = \frac{5023.1000}{10.\ 123} = \frac{502300}{123} = 4083\frac{91}{123}$.

Indeſſen ſind alle dieſe Methoden, den Reſt anzuhängen, nicht ſehr bequem, man gebrauchet ſie in der That wenig, und wir haben ſie nur beygefüget, wenn man ſie etwa in Schriften fände. Wir werden bald eine andere anzeigen, da man ihn in lauter Decimalbrüchen anhangen, und wenn man ihn nicht allezeit ganz ausdrücken kann, doch der

der wahren Größe ſo nahe kommen kann, daß man die Kleinigkeit, die man wegläßt, nicht achten darf. §. 246.

§. 242. Man kann alle Brüche, ſie ſeyn ächte oder unächte, in Decimalbrüche verwandeln. Eine nöthige Kunſt, die man ſehr oft gebrauchen muß. Wir haben geſehen, daß, wenn man anzeigen will, wo die einfachen Größen, oder die Stelle der Einer aufhöret, man hinter ihr ein Comma machet. Wenn man hinter dieſem Comma auch noch eine ſo groſe Menge Nullen machte, ſo würde dadurch dieſe Größe im geringſten nicht geändert werden. Z. E. 5 oder 5,0000 würde beydes einerley ſeyn, weil die Nullen hier nichts bedeuteten, indem das Comma die Gränze der Einer anzeigte, und in den Stellen der Zehntel, Hundertel, Tauſendtel ꝛc. nichts ſtünde. So wäre 124 und 124,00000 auch einerley, u. ſ. w. Wenn man alſo einen Bruch hat, und in ſeinem Zähler, wo die Einheiten aufhören, das Comma macht, und alsdenn noch ſo viel Nullen anhänget, ſo bleibt der Bruch ungeändert. Z. E. $\frac{3}{5}$ oder $\frac{3,0000}{5}$ iſt einerley, denn in den Plätzen der Decimalſtellen ſtehet nichts.

Man weiß, daß man einen Bruch auch alſo betrachten kann, daß man den Zähler als den Dividendus, und den Nenner als den Diviſor anſiehet. Aechte Brüche kann man nun nicht dividiren, weil ihr Zähler allezeit kleiner iſt als der Nenner. §. 176. Hienge man nun aber die Nullen an den Zähler mit dem Comma hinter die Einerſtelle, und dividirte nicht, ſo bliebe der Bruch ungeändert.

Wollte man aber würklich dividiren, und auch den alten Nenner zum Diviſor gebrauchen, ſo ſiehet man ein, daß das angienge, wenn man nur die Theile des Quotienten zehnmal, hundertmal, tauſendmal u. ſ. w. geringer machte, nachdem man nemlich Nullen an den Zähler angehänget hat, oder weil man da ganz kurz zukommen kann, daß man gleich ſo viel Zahlen von dem Quotienten abſtriche und zu Decimalbrüchen machte, als man dem Zähler Nullen gegeben hätte. Z. E. $\frac{3}{4}$. Der 3 zwey Nullen angehänget $\frac{300}{4}$ nun wirklich dividiret, kommt 75; nun iſt der Quotient hundertmal größer, als er seyn ſollte, weil der Zähler durch die Anhangung der Nullen hundertmal größer gemacht iſt; alſo muß noch der Quotient durch 100 dividiret werden, und wird alsdenn $\frac{75}{100} = 0,75$. Aber man ſieht, daß man noch kürzer zukommen kann; man darf ja nur bey der Diviſion gleich, ſo viel man Nullen an den Zähler anhängt, den Quotienten in ſo viel zehnfach niedrige Stellen ſetzen. Hätte man alſo ſtatt $\frac{3}{4}$ geſetzt $\frac{300}{4}$, ſo könnte man gleich ſo dividiren, daß man gleich im Anfange vor den Quotienten die Null mit dem Comma ſetzte 0,75. Denn der Quotient der 4 in die 30 wäre nun zehnmal niedriger, alſo keine Einheit mehr, ſondern Zehntel, welches man auf dieſe Art anzeigte. Und ſo verfähret man würklich bey der Verwandlung der gemeinen ächten Brüche in Decimalbrüche, alſo dieſes iſt die Regel: **Man hänge dem Zähler ſo viel Nullen an als man will. Man dividire nun durch den Nenner, ſetze aber dem Quotienten gleich die Null mit dem Comma da-**

dahinter, als die Gränze oder den Mangel der Einer vor, und dividire ſo lange fort als man kann, oder als man will, ſo bekömmt man einen Quotienten in Decimalbrüchen, der dem gegebenen Bruch gleich war, oder wenigſtens ſo nahe kömmt als man will.

Z. E. $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$;

$\frac{3}{8} = \frac{3,000}{8} = 0,375$

$\frac{5}{8} = \frac{5,000}{8} = 0,625$

Weil man jeden unächten Bruch in eine ganze Zahl und einen angehängten ächten Bruch verwandeln kann §. 187, ſo läßt ſich der ächte Bruch alsdenn auf eben die Art in Decimaltheile ausdrücken: und alſo gilt auch obige Regel dafür. Z. E. $\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} = 3\frac{4,0}{5} = 3,8$.

§. 243. Bey den Exempeln, die wir bis daher, um gemeine Brüche in Decimalbrüchen auszudrücken, berechnet haben, kam die Diviſion endlich zu Ende, und es gieng allezeit alles auf. Sehr oft kömmt die Diviſion nicht zu Ende, man mag ſo viel Nullen anhängen, als man will, und ſo lange fort dividiren, als man will. Man kann aber doch alsdenn auch der Wahrheit ſo nahe kommen, als man will, ſo, daß endlich der Unterſchied ſo klein wird, daß er für nichts zu achten iſt. So viel Nullen man anhängt, ſo viel Decimalſtellen bekommt man alsdenn, und man kann ſo viel anhängen, daß man, wenn man es für nöthig findete bis in die Milliontel, Billiontel, und noch viel

weiter kommen kann, da denn der Irrthum für nichts zu rechnen. Z. E. $\frac{3}{7}$ in einen Decimalbruch. Wir wollen 6 Nullen anhängen, und denn dividiren $\frac{3000000}{7}$ der Quotient wird 0,428571.... Hier beträgt der Irrthum kein Millionteltheilchen, denn wenn man ſtatt der letzten 1 eine 2 ſetzte, ſo wäre es ſchon etwas zu groß. Bey den mehreſten Decimalbrüchen kann man ſich ſchon mit zehntauſend, ja wo die Einheit ſehr klein iſt, ſchon mit tauſend Theilchen behelfen.

Man könnte, wenn man ihn genau haben wollte, noch den Reſt anhängen, dem man zum Nenner den Diviſor mit ſo viel angehängten Nullen gäbe, als man im Dividendus Nullen angehänget hat. Und $\frac{3}{7}$ ganz genau ausgedrückt wäre alsdenn 0,428571 $\frac{3}{7000000}$ denn dieſes iſt $= \frac{428571}{1000000} + \frac{3}{7000000} = \frac{428571.7}{1000000.7} + \frac{3}{7000000} = \frac{2999997}{7000000} + \frac{3}{7000000} = \frac{3000000}{7000000} = \frac{3}{7}$ man thut dies aber gewöhnlich nicht, ſondern begnügt ſich mit den Decimalbrüchen.

§. 244. Der Methode, alle Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, kann man ſich auch recht gut bedienen, wenn bey gemeinen Diviſionsexempeln Reſte überbleiben. Anſtatt den Reſt mit dem Diviſor in einen Bruch zu ſetzen, verwandelt man ihn lieber in Decimalbrüche, da man denn ſo viel anhängen kann, bis man den Irrthum für nichts zu achten hat. Z. E. 5432 durch 21.

```
5 4 3 2 | 258,6666
(21) . .
 4 2 . .
 1 2 . 3 .
  (2 1).
 1 0 5
  1 8 2
   (21)
  1 6 8
   1 4 0
   (21)
  1 2 6
   1 4.0
   (21)
   1 2 6
    1 4 0
    (21)
    1 2 6
     1 4 0
     (21)
     1 2 6
      14
```

Der Reſt wäre $\frac{14}{21}$ oder $\frac{2}{3}$ aber man hängt an die 14 eine 0, und ſetzet nun den Quotienten in einen Decimalbruch, und macht, wo die ganzen Zahlen im Quotienten aufhören, ein Comma, und nun den erſten Quotienten der Decimalbrüche: an den nächſten Reſt hängt man wieder eine Null,

und den Quotienten zum nächſtfolgenden Decimalbruche, und ſo verfähret man weiter, ſo lange man es nöthig findet. Hier hat es ſich eben gefüget, daß alle Decimalbrüche 6 werden, denn $\frac{14}{21}$ oder $\frac{2}{3}$ in einen Decimalbruch verwandelt, giebt 0,666666... immer ſo fort.

§. 245. Man kann auch zwey oder mehr Brüche mit einander bequem vergleichen, wenn man ſie in Decimalbrüche verwandelt. Man ſieht gleich, welches der gröſte iſt. Z. E. $\frac{5}{13}$ und $\frac{3}{11}$ ſind in Decimalbrüchen 0,384615... und 0,272727... Da ſieht man gleich, daß $\frac{5}{13}$ der gröſte iſt. Seine erſte Zahl war $\frac{3}{10}$ des andern ſeine nur $\frac{2}{10}$. Man könnte auch dadurch ſehen, um wie viel einer gröſſer wäre wie der andere, wenn man die Decimalbrüche von einander abzöge, obſchon bey Decimalbrüchen, deren Zahlen ins Unendliche fortgehen, die hinterſten Zahlen der Differenz nicht völlig richtig ſind.

§. 246. Wir haben §. 241 gezeiget, wie man bey der Diviſion mit Decimalbrüchen die Reſte an den Quotienten anhangen müſſe. Man thut beſſer, wenn man ſie in würkliche Decimalbrüche verwandelt. Es geſchiehet dieſes, wenn man immer den Reſten Nullen anhänget und fort dividiret, und alsdenn die Quotienten als Decimalbrüche an ihre gehörigen Stellen ſetzet. Wo in beyden, ſo wol Diviſor als Dividendus, gleich viel Decimalbrüche

ſind

ſind als der Quotient eine ganze Zahl wird, §. 239. findet ſich die Stelle des erſten Decimalbruchs von ſelbſt, nemlich, wo nun die Quotienten von der fortgeſetzten Diviſion des Reſtes anfangen. Wo im Diviſor mehr Decimalbrüche ſind als im Dividendus, und alſo dem Dividendus ſo viel Nullen angehänget wurden, §. 239 ſetzet man gleich ſtatt der Nullen die ganzen Zahlen hin, die man nun durch die Diviſion der Reſte, denen man Nullen, um ſie dividiren zu können, angehänget hat, bekömmt, und zwar ſo viel ganze Zahlen, als Nullen an den Quotienten hätten müſſen angehänget werden, welches aus dem Bruche der daran gewöhnlich gehänget wird, und ſeiner Behandlung folget.

§. 247. Sind im Dividendus mehr Decimalbrüche als im Diviſor, ſo ſtreichet man erſt im Quotienten die gehörigen Zahlen als Decimalbrüche ab, und fängt nun an, dem Reſte Nullen anzuhängen, und die Quotienten immer an die andern Decimalbrüche anzuſetzen, welche ſchon da ſind, ihre Stelle wird dadurch ſchon von ſelbſt beſtimmt.

Exempel von allen drey Fällen. 5143,2 durch 3,2

```
5.1432 | 1607,25
(32)...|
 194..
 (32)..
 192..
   23.
 (32).
   23.2
   (32)
   224
     8.0
    (32)
     64
    160
    (32)
    160
      0
```

1607 war der ganze Quotient, nun gehn die Decimalbrüche an. Und der ganze Quotient 1607,25 weil hier zum Glück alles aufgehet.

```
368,72 durch 0,034
  368,72 | 10844,7058
 (34)    |
 ----
    28
   (34)
   ----
   287
   (34)
   272
   ----  -
    152
    (34)
    136
   -------
     160
     (34)
     136
     ------
       240
      (34)
       238
      -----
        20
       (34)
      -----
       200
       (34)
       170
      -----
        300
        (34)
        272
       -----
         28
```

10844 waren die ganzen Zahlen des Quotienten, nun waren im Diviſor drey Decimalbrüche, und im Dividendus zwey, alſo ſollte dem Dividendus noch eine Null angehänget werden, und der Reſt; auch dieſer

dieſer wäre $\frac{160}{34}$. Allein man fährt lieber gleich fort zu dividiren, hängt dem Reſte die Null an, und ſezet ſtatt der einen hier anzuhängenden Null in den Quotienten der ganzen Zahlen die Zahl, die nun zum Quotienten kömmt, und alsdenn die Decimalbrüche.

Man dividire 63,2155 durch 3,5

```
632155 | 18,0615714....
(35)
 282
  (35)
 280
  21
 (35)
  215
  (35)
  210
   55
  35)
   200
   (35)
   175
    250
    (35)
    245
     5.0
     (35)
     150
     (35)
     140
      10
```

Der Quotient nach gewöhnlicher Diviſion 18061, und weil im Dividendus drey Decimalbrüche mehr als im Diviſor, ſo müſten drey Zahlen im Quotienten abgeſtrichen werden. Man thue das, und alsdenn hänge man dem Reſte die Nullen an, fahre fort zu dividiren, und ſetze die Quotienten immer neben die andern hin. Es fällt von ſelbſt in die Augen, daß ſie dahin gehören. Der Quotient iſt alſo 18,0615714....

§. 248. Die Probe der richtigen Multiplikation und Diviſion der Decimalbrüche geſchieht, wie es beym gemeinen Multipliciren und Dividiren gelehrt iſt, durch die Diviſion und Multiplikation, nur ſieht man von ſelbſt ein, daß, wenn beym Dividiren die Decimalbrüche ins Unendliche fortgehen, durch die Multiplikation des Quotienten mit dem Diviſor, der Dividendus nicht genau heraus kömmt, ſondern in den letzten Zahlen etwas unrichtig wird. Es gelten auch ſowol bey der Multiplikation als der Diviſion der Decimalbrüche die allgemeinen Geſetze, daß in beyden einerley Zeichen plus, und verſchiedene minus zum Produkte, oder Quotienten geben.

§. 249. Man könnte auch viele Decimalbrüche wieder in gewöhnliche Brüche verwandeln, wenn man es nöthig hat. Bey denen, die nicht ins Unendliche fortgehen, iſt es leicht; man ſetze ihnen zum Nenner die 1 mit ſo viel Nullen, als Decimalſtellen ſind, und dividire Zähler und Nenner mit der Zahl, welche ſie zur kleinſten Benennung

bringt.

bringt. Z. E. 075 iſt $=\frac{75}{100}$ Zähler und Nenner mit 25 dividiret $=\frac{3}{4}$. 0,625 $=\frac{625}{1000}$ dividiret durch 125 $=\frac{5}{8}$.

Der Grund liegt darin, weil man würklich einen ſolchen Decimalbruch als einen Bruch anſehen kann, deſſen Zähler und Nenner mit einer ſolchen Zahl multipliciret iſt, daß dadurch ſein Nenner eine Potenz der Zehne, als 10, 100, 1000 ꝛc. wird. Dividiret man ihn mit eben der Zahl im Zähler und Nenner, ſo muß der alte Bruch wieder herauskommen. Gehen die Zahlen des Decimalbruchs ins Unendliche fort, ſo iſt dieſe Methode nicht gewis, und man nähert ſich nur der Wahrheit; es müßte denn ſeyn, daß einerley Zahlen immer wiederholet würden, davon wir unten im Schluſſe der Lehre von der geometriſchen Progreſſion noch etwas anführen werden.

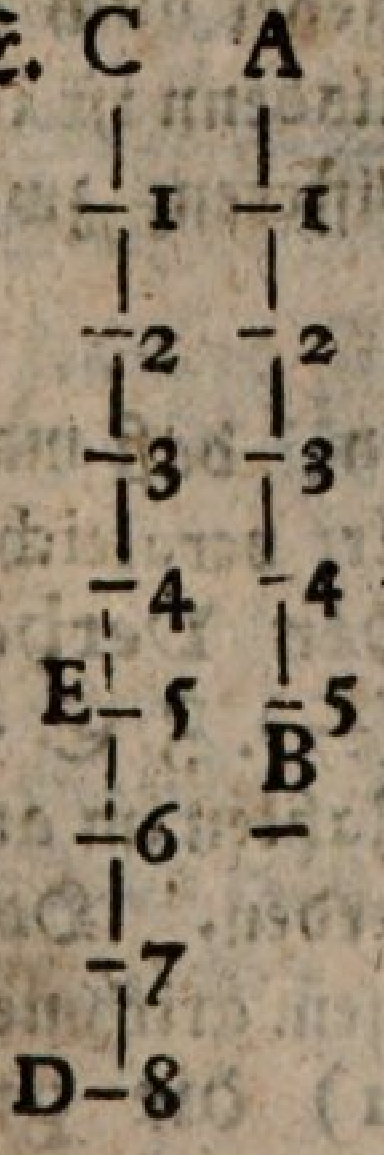
Das neunte Kapitel.

Von den Verhältniſſen.

§. 250. Wir kommen auf ſehr wichtige Lehren, die ihren Nutzen durch alle Geſchäfte des menſchlichen Lebens und die ganze Mathematik verbreiten, und die man daher ſehr wohl bemerken, und ſich fleißig darin üben muß, nemlich auf die Lehren von den Verhältniſſen und Proportionen. Wir reden erſtlich von den Verhältniſſen. Man betrachtet ein Verhältniß zweyer Größen, wenn man zwey Grö-

Größen in Betracht ihrer Größe mit einander vergleichet. Dieſe Vergleichung ſelbſt zweyer Größen heiſt ein **Verhältniß**. Man kann bey dieſer Vergleichung entweder zur Abſicht haben, um **wie viel** eine Größe größer oder kleiner ſey als eine andere, oder um wie **vielmal** ſie größer oder kleiner ſey. Das erſtere nennet man ein **arithmetiſches Verhältniß**, das andere das **geometriſche Verhältniß**, welches willkührlich eingeführte Benennungen ſind. Man nennet auch wol das **geometriſche Verhältniß** blos ein **Verhältniß**, und iſt nicht das Wort Arithmetiſch dabey; ſo verſteht man allezeit das **geometriſche Verhältniß** dadurch. Bey der erſten Art, nemlich beym arithmetiſchen Verhältniß ſieht man auf die **Differenz** oder **Unterſchied** der beyden Größen, bey dem andern auf ihren **Quotienten**, das iſt, **wie vielmal** die eine in der andern enthalten iſt.

Z. E.



Ich

Ich will die beyden Größen AB und CD mit einander vergleichen, ſo, daß ich auf ihren Unterſchied ſehen, oder wiſſen will, um wie viel die Größe CD größer iſt als AB. Ich ſehe, es iſt um das Stück ED, und ED iſt die Differenz zwiſchen beyden Größen. Wären nun dieſe Größen in gleiche Theile getheilet, ſo hätte die Größe AB 5 ſolcher Theile, und CD hätte 8, alſo wäre CD um 3 Theile größer als AB, oder 3 wäre die Differenz zwiſchen beyden. Wenn man 9 mit 16 auf die Art vergliche, ſo wäre 16 um 7 Einheiten größer als 9. Alſo 16 weniger 7 wäre 9. Oder 7 iſt die Differenz zwiſchen beyden. Wenn man zwey Größen auf die Art mit einander vergleichet, ſo heißet das ein **arithmetiſches Verhältniß.** Solche Vergleichung kann mit allen möglichen Zahlen und Größen geſchehen. Kann man doch auf die Differenz ſehen, die ſie mit einer andern haben, oder alle mögliche Zahlen laſſen ſich von einander ſubtrahiren. Das gehet auch an, wenn ſie einander gleich ſind, denn alsdenn iſt ihre Differenz $= 0$ Denn z. E. die Differenz zwiſchen 6 und 6 iſt $= 0$.

§. 251. Das Zeichen, daß man zwey Zahlen oder Größen auf die Art vergleichet, oder das Zeichen des **arithmetiſchen Verhältniſſes** iſt das Subtraktionszeichen (—). Z. E. $5 - 3$, $7 - 5$ iſt das Zeichen, daß dieſe Zahlen im arithmetiſchen Verhältniſſe betrachtet werden. Oder allgemein $a - b$. Wir haben bey dieſem arithmetiſchen Verhältniß zu betrachten, 1) **die große Zahl;**

2) die

2) die kleine Zahl; 3) die Differenz zwiſchen beyden. Wenn die größere Zahl = a, die kleinere = b, und die Differenz = d genennet wird, ſo ſiehet man leicht ein, daß die große Zahl, gleich der kleinern, plus der Differenz ſey, oder a = b + d, die kleinere, oder b = a − d, und die Differenz oder d = a − b ſey. Wenn die größere Zahl a = 10, die kleinere Zahl b = 6, und die Differenz d = 4 iſt, ſo iſt alſo, da die größere Zahl gleich iſt der kleinern plus der Differenz a = b + d hier 10 = 6 + 4 die kleinere Zahl b = a − d hier = 10 − 4 und die Differenz d = a − b hier = 10 − 6. Man ſieht alſo, wenn man zwey von dieſen Dingen eines arithmetiſchen Verhältniſſes hat, daß das dritte ſich daraus beſtimmen läßt.

Es kann alſo gegeben ſeyn, 1) die große Zahl und die kleinere Zahl, oder a und b, ſo wird d geſuchet und d = a − b.

2) Die große Zahl und die Differenz oder a und d, ſo iſt die kleinere Zahl b = a − d.

3) Die kleinere Zahl und die Differenz, oder b und d, ſo iſt die größere Zahl a = b + d.

Daß die Dinge, die mit einander verglichen werden ſollen, gleicher Art ſeyn müſſen, verſteht ſich von ſelbſt; denn man kann ja nicht z. E. 5 ℔ mit 7 Ellen vergleichen, und auf ihre Differenz ſehen.

§. 252. Bey einem geometriſchen Verhältniß ſiehet man darauf, **wie vielmal** eine Zahl oder Größe in der andern enthalten ſey.

Z. E. A —|—|—|B

C —|—|—|—|—|—|—|—|—|—|D

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ich will wiſſen, wie vielmal AB in CD enthalten iſt, ſo wäre natürlich, ich legte AB auf CD und mäße es. Und ſo vielmal ich das Kleine an einander darauf legen könnte, ſo vielmal wäre es darin enthalten. Oder wenn ich AB und CD in gleich große Theile theilte, und fände ſolcher, als in AB 2 ſind, in CD 10, ſo darf ich ja nur 10 durch 2 dividiren, um zu wiſſen, wie vielmal es darin enthalten iſt, nemlich 5mal. Wenn man 18 und 6 mit einander auf die Art vergleichen will, ſo dividiret man 18 durch 6, der Quotient iſt 3, welcher anzeigt, um **wie vielmal** 6 in 18 enthalten iſt. Die natürlichſte Bezeichnung eines **geometriſchen Verhältniſſes** iſt alſo das Zeichen der Diviſion, entweder die gewöhnlichen zwey Punkte (:) oder ein Querſtrich zwiſchen die beyden zu vergleichenden Größen. Z. E. 7 : 21 oder 48 : 12, welches man auch ſchreiben könnte $\frac{7}{21}$ oder $\frac{48}{12}$. Alſo ganz allgemein wird folgende Bezeichnung ein geometriſches Verhältniß anzeigen a : b oder $\frac{a}{b}$.

§. 253. Die Zahl oder Größe, welche anzeigt, um **wie vielmal** eine Größe in der andern enthalten iſt, oder der Quotient, heiſt der **Exponent**

des

des geometriſchen Verhältniſſes. Z. E. bey dem Verhältniſſe 48 : 12 wäre 4 der Exponent, den 12 iſt in 48 viermal enthalten. Dieſer Exponent kann eine ganze, oder auch eine gebrochene Zahl, oder auch ein unächter Bruch ſeyn. Denn es iſt ſehr begreiflich, daß eben ſo gut wie ich unterſuchen konnte, wie vielmal eine kleinere Größe in einer größern enthalten ſey, ich auch unterſuchen kann, wie vielmal die größere in der kleinern enthalten ſey, und da wird der Exponent nie eine ganze Zahl, ſondern kleiner als 1, alſo ein Bruch ſeyn. Ueberdem, wenn man auch eine kleinere Größe mit einer größern auf die Art vergleichet, ſo wird ja die kleinere nicht allezeit ſo genau in der größern enthalten ſeyn, daß mir das, wie vielmal durch eine ganze Zahl angezeiget wird, ſondern es kann eine ganze Zahl, und noch etwas dazu, alſo ein unächter Bruch ſeyn. Es wird allezeit eine gebrochene Zahl, wenn die erſte Zahl des Verhältniſſes, (welche wir das vordere Glied nennen wollen) kleiner iſt als die zweyte Zahl (oder das 2te Glied). Z. E. 12 : 48, da iſt der Exponent $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ oder 48 iſt in 12 nur $\frac{1}{4}$mal enthalten. Bey 24 : 18 iſt der Exponent $= \frac{24}{18} = 1\frac{6}{18} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ oder 18 iſt in 24 mehr wie einmal, nemlich $1\frac{1}{3}$ oder $\frac{4}{3}$mal enthalten.

§. 254. Man wird aus der Bezeichnung eines geometriſchen Verhältniſſes und aus ſeiner Eigenſchaft leicht bemerken, daß man es als einen Bruch betrachten kann, und daß man daher alle die Veränderungen damit vornehmen kann, die

man mit einem Bruch vornimmt, wenn man ihn, ohne ihn ändern zu wollen, auf andere Benennung bringen will.

Daher wenn das vordere und hintere Glied eines geometriſchen Verhältniſſes mit eben der Zahl multipliciret oder dividiret wird, ſo wird dadurch das Verhältniß nicht im mindeſten verändert §. 180.

Z. E. 12 : 48 iſt einerley mit $\frac{12}{12} : \frac{48}{12}$, oder mit 1 : 4. Denn $\frac{12}{48}$ iſt = mit $\frac{12:12}{48:12} = \frac{1}{4}$ §. 180. Ferner 12 : 48 iſt einerley mit 12 . 6 : 48 . 6 oder mit 72 : 288, denn $\frac{12}{48}$ iſt = $\frac{12.6}{48.6} = \frac{72}{288}$ und der Quotient oder der Exponent des Verhältniſſes bleibet dadurch ungeändert. Alſo allgemein a : b iſt = a . c : b . c oder auch $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$ §. 55. Man thut ſehr gut, wenn man etwas große Zahlen in einem Verhältniſſe hat, daß man ſie zu ſolchen kleinern auf die Art reduciret, wenn es ſich will thun laſſen, weil die Seele ſich ſolche kleine Verhältniſſe weit leichter vorſtellen kann. Man hätte z. E. das Verhältniß 137 : 548 = $\frac{137}{548}$, hier läßt ſich das erſte und zweyte Glied beydes durch 137 theilen, alſo $\frac{137}{548} = \frac{137:137}{548:137} = \frac{1}{4}$. Alſo iſt das Verhältniß 137 : 548 gleich mit dem 1 : 4, welches weit leichter zu begreifen iſt, der Exponent davon iſt $\frac{1}{4}$ oder 1 iſt in 4 enthalten $\frac{1}{4}$mal. Wir haben §. 185 gezeiget, wie man den gröſten gemeinſchaftlichen Diviſor zweyer Zahlen finden könne, welches ſich hier gebrauchen läſſet.

Das

Das zehnte Kapitel.

Von der arithmetiſchen Proportion und Progreſſion.

§. 256. In dem 250 und 251 §. zeigten wir, was ein arithmetiſches Verhältniß ſey. Wenn man zwey arithmetiſche Verhältniſſe hat die einander gleich ſind; ſo heiſt das eine arithmetiſche Proportion. Man hat alſo vier Zahlen oder vier Glieder, und zwiſchen je zwey und zwey Gliedern iſt einerley Differenz, nemlich eben die Differenz, die zwiſchen den erſten beyden Gliedern ſich befindet, iſt auch zwiſchen den beyden andern. Z. E. 5 — 7 und 6 — 8 ſind zwey arithmetiſche Verhältniſſe, die beyde einander gleich ſind, bey beyden iſt die Differenz oder d = 2, alſo könnte das eine arithmetiſche Proportion ſeyn. Daß zwey arithmetiſche Verhältniſſe eine Proportion ausmachen, wird durch das Zeichen der Gleichheit (=) angezeiget. Dieſe Proportion müßte daher alſo geſchrieben werden 5 — 7 = 6 — 8. Eben ſo würde das auch eine arithmetiſche Proportion ſeyn 4 — 12 = 10 — 18, denn bey beyden Verhältniſſen iſt d = 8. Wenn man ein arithmetiſches Verhältniß betrachtet, ſo ſiehet man, daß das größeſte Glied beſtehet aus dem kleinern plus der Differenz.

Z. E. 5 — 7. Wir wollen nun vors erſte das kleinſte Glied des Verhältniſſes zum erſten Gliede machen, welches man thun kann, weil doch immer ein arithmetiſches Verhältniß bleibet. Wenn man alſo das erſte a und die Differenz d nennet, ſo ließe ſich ein Verhältniß alſo ausdrücken $a - (a + d)$ und wenn man das 3te Glied b nennet, ſo muß das vierte, wenn anders eine Proportion herauskommen ſoll, gleichfalls aus dem dritten Gliede plus eben der Differenz beſtehen, und man könnte alſo dieſes Verhältniß ausdrücken $b - (b + d)$. Man kann alſo alle mögliche arithmetiſche Proportionen durch den allgemeinen Ausdruck anzeigen, $a - (a + d) = b - (b + d)$. Allein es hindert auch nicht, wenn das zweyte Glied kleiner iſt als das vorhergehende, und alſo auch das vierte kleiner als das dritte, denn alsdenn iſt d eine Minusgröße, und der allgemeine Ausdruck gilt auch. Z. E. $12 - 8 = 15 - 11$ iſt eine arithmetiſche Proportion, wo das zweyte Glied kleiner iſt als das erſtere. Die Differenz oder d zwiſchen jedem Paar Gliedern iſt $= - 4$. Aber nun wird $+ d = - 4$, alſo iſt der Ausdruck $12 - (12 - 4) = 15 - (15 - 4)$. Da die Differenz $= 4$ iſt, ſo kann man auch nur die Glieder umkehren, und auf alle Fälle wird doch die Differenz 4 bleiben. Alſo die Proportion ſey $8 - 12 = 11 - 15$, welches dem Ausdrucke $a - (a + d) = b - (b + d)$ völlig gemäß iſt.

§. 257. Man hat zweyerley Arten arithmetiſcher Proportionen, die discrete (Proportio diſcreta)

diſcreta) und die ſtetige (Proportio continua). Die discrete iſt, wenn das dritte Glied dem zweyten ungleich iſt, wie wir eben jetzt verſchiedene ſolcher betrachtet haben. Z. E. $9 - 13 = 7 - 11$, und wofür der allgemeine Ausdruck $a - (a + d) = b - (b + d)$ eigentlich gehöret. Eine ſtetige Proportion iſt, wenn das dritte Glied dem zweyten gleich iſt. Z. E. $9 - 13 = 13 - 17$ oder $7 - 11 = 11 - 15$. Daß dieſes auch Proportionen ſind, ſiehet man gleich daran, weil beyde Paar Glieder einerley Differenz haben. Allein auch der gehabte allgemeine Ausdruck kann auf die continuirliche oder ſtetige Proportion paſſen, nur iſt alsdenn $b = a + d$, oder das zweyte Glied = dem dritten. Wenn man nun in dieſen allgemeinen Ausdruck anſtatt b die $a + d$ ſetzet, ſo wird er alſo erſcheinen: $a - (a + d) = (a + d) - (a + d + d)$, oder $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$, denn $d + d$ iſt $= 2d$. Denn der allgemeine Ausdruck war $a - (a + d) = b - (b + d)$. Man ſiehet nun gleich, wenn man anſtatt b die $a + d$ ſetzet, daß alsdenn die Proportion in folgende verwandelt wird $a - (a + d) = (a + d) - (a + d + d) = a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$. Dies iſt der Ausdruck für alle ſtetige Proportionen. Exempel in Zahlen. $9 - 16 = 16 - 23$ oder nach unſerm Ausdrucke, da hier die Differenz $= 7$: $9 - (9 + 7) = (9 + 7) - (9 + 2 . 7)$.

§. 258. Wir wollen nun einige Folgerungen aus dieſen allgemeinen Ausdrücken ziehen. In allen

len arithmetiſchen Proportionen, ſie ſeyn discret oder ſtetig, **iſt die Summe der beyden mittlern Gliedern gleich der Summe der beyden äußerſten.**

Z. E. $4 - 9 = 16 - 21$. Da iſt $4 + 21 = 9 + 16 = 25$, oder in einer ſtetigen $7 - 13 = 13 - 19$, da iſt $19 + 7 = 13 + 13 = 26$. Es folget dieſes aus den allgemeinen Formeln. Denn bey dem erſten Ausdruck oder Formel für die discrete Proportion $a - (a + d) = b - (b + d)$ iſt $a + b + d = a + d + b$.

Und bey dem zweyten Ausdruck für die ſtetige $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$ iſt $a + a + 2d = a + d + a + d$, bey beyden $2a + 2d = (a + d)2$.

Es iſt dieſes eine Probe für die arithmetiſche Proportion, denn ſobald die Summe der beyden mittlern Glieder gleich iſt der Summe der beyden äußerſten, ſo iſt die Proportion eine **arithmetiſche Proportion.**

§. 259. Man kann in einer arithmetiſchen Proportion auch einige Glieder mit anander verwechſeln, nemlich das erſte mit dem zweyten, und, aber auch zugleich das dritte mit dem vierten. Z. E. $5 - 7 = 9 - 11$, man könnte auch ſetzen $7 - 5 = 11 - 9$, auf beyde Fälle wäre die Summe der mittlern oder äußern Glieder $= 16$, alſo beydes eine arithmetiſche Proportion.

Ferner läßt ſich auch das zweyte Glied mit dem dritten verwechſeln, $5 - 7 = 9 - 11$, man würde auch ſetzen können, $5 - 9 = 7 - 11$, auf beyde Fälle iſt es eine arithmetiſche Proportion, wie aus der zu machenden Probe leicht erhellet, und gilt dieſes auch bey einer ſtetigen Proportion. Ein jeder wird dieſes auch leicht aus den allgemeinen Ausdrücken oder Formeln hinſetzen und beweiſen können.

§. 260. Wenn die drey erſten Glieder einer arithmetiſchen Proportion gegeben ſind, ſo läßt ſich das vierte leicht finden. Es iſt die Summe der beyden mittlern Gliedern, wovon man das erſtere abzieht. Oder wenn man das erſtere a, das zweyte b und das dritte c nennet, ſo iſt das vierte, welches man ſuchet und welches x heißen ſoll, $x = b + c - a$. Es folget alſo: Es ſey die Proportion $a - b = c - x$. Nun iſt die Summe der beyden äußern gleich der Summe der beyden mittlern. §. 258 alſo; $a + x = b + c$

ſubtrahiret $a = a$ ſubtrahiret

Gleiches vom Gleichen $x = b + c - a$

Exempel: $5 - 12 = 16 - x$, da iſt $x = 16 + 12 - 5 = 28 - 5 = 23$: alſo wird die Proportion ſeyn $5 - 12 = 16 - 23$. Da man nach §. 266 jedes Glied zum letzten Gliede machen kann, ſo iſt es überhaupt wahr, wenn drey Glieder gegeben ſind, ſo läßt ſich das vierte dadurch finden.

Wir wollen es an dieſem Exempel zeigen. Es fehle das erſtere.

Alſo: $23 - 16 = 12 - x$, da iſt $x = 12 + 16 - 23 = 28 - 23 = 5$. Es fehle das zweyte. Alſo: $16 - 23 = 5 - x$, da iſt $x = 5 + 23 - 16 = 12$. Es fehle das dritte. Alſo: $12 - 5 = 23 - x$, da iſt $x = 23 + 5 - 12 = 16$. Man hat dieſes gefunden, weil man durch die Verſetzungen nach §. 259 jedes zu ſuchende Glied nachgerade zum letzten gemacht hat. Oder allgemein: die allgemeine Formel iſt $a - (a + d) = b - (b + d)$. Es fehle das erſte Glied a, ſo würde es doch immer eine Proportion bleiben, wenn a zum letzten Gliede gemacht würde, und alsdenn wäre $(b + d) - b = (a + d) - x$ und $x = (b + a + d) - (b + d)$ abgezogen $= a$. Es fehlte das 2te Glied: alſo alsdenn $b - (b + d) = a - x$ und $x = (a + b + d) - b = a + d$. Das dritte Glied; alsdenn $(a + d) - a = (b + d) - x$ und $x = (b + d + a) - (a + d) = b$. Man ſiehet leicht ein, daß man es bey ſtetigen Proportionen eben ſo machen kann.

§. 261. Bey einer ſtetigen Proportion hat man eigentlich nur drey Glieder, wenn alſo die zwey äußern gegeben ſind, kann man die mittlern gleich finden, wenn man die Summe der beyden äußern durch 2 dividiret. Eine ſolche Proportion wäre $a - x = x - d$,

aber

aber nach $a + d = x + x = 2x$ folglich dividiret
§. 258. $\frac{a + b}{2} = \frac{2x}{2} = x$ durch 2.

Exempel: $3 - x = x - 19$, da iſt $x = \frac{19 + 3}{2} = \frac{22}{2} = 11$ und die Proportion heiſt $3 - 11 = 11 - 19$.

Man bedient ſich gewöhnlich dieſes Verfahrens, wenn von einer Sache zwey verſchiedene Werthe gegeben ſind, da man den mittlern dadurch wählen will, daß man die beyden Werthe addiret und durch 2 dividiret. Z. E. ein Pferd wäre von einem zu 30 Thlr. von dem andern zu 40 Thlr. bey einer Vergleichung taxiret, ſo nimmt man gewöhnlich den Werth $\frac{30 + 40}{2} = \frac{70}{2} = 35$ welches das mittlere Glied in einer arithmetiſchen Proportion iſt. Denn $30 - 35 = 35 - 40$.

§. 262. Wenn man ſtetige arithmetiſche Proportionen alſo zuſammen ſetzet, daß ſich das erſte Glied verhält zum zweyten, wie das zweyte zum dritten, wie das dritte zum vierten u. ſ. w. Oder wenn man bey einer ſtetigen Proportion das dritte Glied wieder zum erſten, und das vierte zum zweyten und dritten in einer neuen ſtetigen Proportion machet, und daraus wieder das vierte Glied ſuchet und immer ſo fortfähret, ſo bekömmt man eine **arithmetiſche Progreſſion.** Z. E. $2 - 4 = 4 - 6$. Ferner $4 - 6 = 6 - 8$. Ferner $6 - 8 = 8 - 10$. Ferner $8 - 10 = 10 - 12$.

Hier

Hier nennet man die beyden erſten, und alle nachher gefundenen Glieder, Glieder der arithmetiſchen Progreſſion. Und dieſe jetzt gefundene Progreſſion beſtünde aus folgenden Zahlen: 2, 4, 6, 8, 10, 12. Hätte man die Sache allgemein betrachtet, ſo würden die Porportionen alſo auf einander folgen.

$a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$. Ferner $(a+d)-(a+2d)=(a+2d)-(a+3d)$. Ferner $(a+2d)-(a+3d)=(a+3d)-(a+4d)$ u. ſ. w.

Die Glieder alſo der Progreſſion wären, wo d die Differenz anzeiget.

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d \text{ u. ſ. w.}$$

Man ſiehet hieraus, das eine Reihe Größen, welche immer um gleich viel wachſen, oder gleich viel abnehmen, die Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion ſind. Daß es auch wahr ſey, wenn ſie nun um gleich viel abnehmen, kann man daraus ſehen, weil man die Reihe Größen auch von rückwärts an gezählet, betrachten kann, oder weil auch d eine verneinende Größe ſeyn kann, da denn jedes Glied um ein d geringer wird. Solche Progreſſion iſt nun entweder ſteigend oder fallend, nachdem ihre Glieder beſchaffen ſind; ſteigend, wenn die Glieder immer zunehmen oder wachſen; fallend, wenn ſie abnehmen. So würde 2, 4, 6, 8 u. ſ. w. eine ſteigende Progreſſion, und 12, 9, 6, 3, 1 eine fallende Progreſ-

ſion

ſion ſeyn, und von dieſer letztern wäre die Differenz der Glieder = 3.

§. 263. Ueber die Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion ſchreibt man wol die natürlichen Zahlzeichen, um zu ſehen, das wie vielſte Glied ein jedes in der Progreſſion ſey, welche Zahlzeichen man den **Zeiger** nennet. Wir wollen nochmals die Reihe hinſetzen, und denn ſehen, was wir daraus folgern können. Zeiger $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a+d}$, $\overset{3}{a+2d}$, $\overset{4}{a+3d}$, $\overset{5}{a+4d}$, $\overset{6}{a+5d}$, u. ſ. w.

Wir ſehen hieraus erſtlich, da in jedem Glied das d oder die Differenz um eins weniger ſey, als die Zahl des Gliedes ſelbſt iſt. So iſt z. E. im fünften Gliede nur 4d, im ſechſten Gliede nur 5d u. ſ. w. Daraus können wir ſchließen, daß, wenn das erſte Glied = a und die Differenz = d bekannt iſt, wie man ein jedes verlangtes Glied leicht finden könne. Es iſt a + dem um eine an der Zahl verminderten d, als die Zahl des Gliedes iſt. So würde das zwanzigſte Glied a + 19d, und das vierzigſte Glied a + 39d ſeyn. Aus dieſer Betrachtung läßt ſich auch ein allgemeiner Ausdruck für das letzte Glied einer arithmetiſchen Progreſſion finden. Denn wenn die Zahl der Glieder ganz allgemein = n genannt wird, ſo muß in dem letzten Gliede das d um 1 geringer an der Zahl ſeyn, als die Zahl des Gliedes war, oder es hat (n − 1)d, das letzte Glied wird alſo auf alle Fälle a + (n − 1)d ſeyn.

Exem-

Exempel: das erſte Glied oder a = 1 und d ſey auch = 1, oder jedes Glied ſey um 1 verſchieden, die Zahl der Glieder oder n ſey 12, ſo wird das nte oder hier das letzte zwölfte Glied ſeyn, wenn man ſtatt der Buchſtaben die gegebenen Zahlen ſetzet, $= 1 + (12 - 1.) 1 = 1 + (11). 1$ und weil 1 nicht multipliciret $= 1 + 11 = 12$. Dieſe arithmetiſche Progreſſion wären die natürlichen Zahlzeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Welche Zahlzeichen alſo in einer würklichen arithmetiſchen Progreſſion, deren Differenz = 1 iſt, ſtehen.

Ein anderes Exempel: Es ſey $a = 3$, $d = 2$. und n oder die Zahl der Glieder = 11, ſo wäre die Reihe $3 + 5 + 7$ ꝛc. und das eilfte hier geſuchte Glied $= a + (n - 1) d$ wäre $= 3 + (11 - 1) 2 = 3 + 10 . 2 = 3 + 20 = 23$.

Es ſey ferner $a = 1$. $d = 6$. $n = 36$. Die Reihe wäre 1 . 6 . 12 ꝛc. und das letzte oder hier 36 Glied $= 1 + (36 - 1) 6 = 1 + (35 . 6) = 211$.

Man kann alſo aus dem erſten Gliede und der Differenz das Glied finden, welches verlanget wird, weil darauf allezeit die Formel paſſet, indem das Verlangte allezeit als das nte oder letzte Glied kann angeſehen werden.

§. 264. Bey einer jeden arithmetiſchen Progreſſion kommen vier Stücke vorzüglich in Betrachtung:

1) das erſte Glied, welches wir a nennen wollen;

2) das

2) das letzte Glied, welches wir $= z$ ſetzen wollen;

3) die Differenz $= d$;

4) die Anzahl der Glieder $= n$.

Wenn drey Dinge von dieſen vieren bekannt ſind, ſo läßt ſich das vierte allezeit finden.

1) Es ſoll a, z und d, oder das erſte und letzte Glied und die Differenz bekannt ſeyn, man ſuchet n oder die Zahl der Glieder. Das letzte Glied war $= a + (n - 1)d$ §. 263. alſo $z = a + (n - 1)d$ oder würklich multipliciret.

$z = a + nd - d$ hier iſt n unbekannt oder wird geſu-
$a = a$ chet Gleiches von Gleichem ſubtra-
$z - a = nd - d$ hiret
$: 1$ beydes durch d dividiret

$\frac{z - a}{d} = n - d$

$+ 1 = + 1$ Gleiches zu Gleichem addirt

$\frac{z - a}{d} + 1 = n$ alſo n oder die Zahl der Glieder iſt das letzte Glied, weniger dem erſten dividiret durch die Differenz und 1 dazu addirt. Exempel: Das erſte Glied einer Progreſſion ſey $= 4$, das letzte 34, die Differenz 3. Man ſuchet die Zahl der Glieder alſo: $a = 4$, $z = 34$, $d = 3$, ſo iſt $n = \frac{34 - 4}{3} + 1 = \frac{30}{3} + 1 = 10 + 1 = 11$ und die Reihe gienge alſo fort, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34. Noch ein Exempel: $a = 216$ $z = 6$, $d = 5$, ſo iſt das letzte Glied oder an der Zahl, oder $n = \frac{6 - 216}{5} + 1 = - \frac{210}{5} + 1 = -4$[illegible]. oder das 43ſte. Es muß einen nicht irren, daß im

im Dividendus eine Minusgröße wird, alſo der Quotient es auch wird. Es iſt hier eine fallende Reihe, indem das erſte Glied größer als das letztere. Man könnte, da das erſte und letzte Glied gegeben iſt, die Reihe rückwärts betrachten, und das letzte als das erſte Glied anſehen, welches die Zahl der Glieder nicht verändert, und denn wäre $n = \frac{216-6}{5} + 1 = 43.$

2) Es ſoll a, z, n, oder das erſte und letzte Glied, und die Zahl der Glieder bekannt ſeyn, man ſuchet die d oder Differenz. Es findet ſich auch durch eben die vorige Rechnung.

beyderſeits a ſubt. $z = a + nd - d$

$z - a = nd - d$

$z - a = (n-1)d$

beyderſeits durch n − 1 dividiret $\frac{z-a}{n-1} = \frac{(n-1)d}{n-1}$ oder = d weil n − 1 ſich gegen den Diviſor n − 1 hebt.

Alſo das letzte Glied weniger dem erſten, dividiret durch die um eins verminderte Zahl der Glieder, iſt die Differenz. Exempel: das erſtere Glied ſey 5, das letztere 97, die Zahl der Glieder 19. alſo a = 5 z = 97 und n = 19. So iſt $d = \frac{97-5}{19-1} = \frac{92}{18} = 5\frac{1}{9}$ und die Progreſſion würde ſeyn 5, $10\frac{1}{9}$, $15\frac{2}{9}$, $20\frac{3}{9}$, $25\frac{4}{9}$, $30\frac{5}{9}$, $35\frac{6}{9}$ u. ſ. w. bis 97. Ein jeder wird ſie machen können, wenn er nur allezeit zu einem Gliede die Differenz oder die $5\frac{1}{9}$ addirt.

3) Es ſoll a, d, n bekannt ſeyn, oder das erſte Glied, die Differenz und die Zahl der Glieder, man

man ſuchet das letztere. Wir haben ſchon geſehen, daß das letztere oder $z = a + (n-1)d$ ſey. §. 263. Exempel: Es ſey $a = 2$, $d = 3$, $n = 12$. ſo iſt $z = 2 + (12-1)3$ oder $2 + 11 \cdot 3 = 2 + 33 = 35$. die Progreſſion gienge alſo fort, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35.

4) Es ſoll z, d, n oder das letzte Glied, die Differenz und die Zahl der Glieder bekannt ſeyn, man ſuchet a oder das erſte Glied. Man kann es auf die ſchon bekannte Art finden.

$z = a + (n-1)d$

$(n-1)d = (n-1)d$ Gleiches von beyden ſubtrahiret,

$z - (n-1)d = a$

oder das letzte Glied weniger der um eins verminderten Zahl der Glieder multipliciret mit der Differenz, iſt das erſte Glied.

Exempel: $z = 72$, $n = 11$, $d = 2\frac{1}{2}$. Man ſuchet das erſte Glied oder a, ſo iſt $a = 72 - (11-1)2\frac{1}{2} = 72 - 10 \cdot \frac{5}{2} = 72 - 25 = 47$, welches das erſte Glied iſt, und die Progreſſion wird ſeyn 47, $49\frac{1}{2}$, 52, $54\frac{1}{2}$, 57, $59\frac{1}{2}$, 62, $64\frac{1}{2}$, 67, $69\frac{1}{2}$, 72. Wir wollen dieſes alles in eine kurze Tabelle faſſen.

Wenn a, z und d bekannt iſt, ſo iſt, $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

wenn a, z und n bekannt iſt, ſo iſt $d = \frac{z-a}{n-1}$;

wenn a, d und n bekannt iſt, ſo iſt $z = a + (n-1)d$;

wenn d, n und z bekannt iſt, ſo iſt $a = z - (n-1)d$.

§. 265. Die allgemeine Reihe der arithmetiſchen Progreſſion war §. 262., §. 263.

1 2 3 4 5 6
a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d....

Wenn man immer zwey der gleich weit von den Enden abſtehenden Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion addirt, ſo wird man immer einerley Summe bekommen. Z. E. Hier, das erſte und ſechſte, das zweyte und fünfte, das dritte und vierte. Man verſuche es, man bekömmt allezeit 2a+5d. Es iſt dieſes auch leicht begreiflich, denn die Glieder von hinten zu gezählet, nehmen immer um ein d ab, und die Glieder von vorne zu gezählet, nehmen immer um ein d zu, alſo müſſen zwey in einer arithmetiſchen Progreſſion gleich weit von einander abſtehende Glieder wol einerley Summe geben. So würde zum Exempel in der Progreſſion 3, 5, 7, 9, 11, 13 allezeit die Summe zwey gleich weit von einander abſtehender Glieder = 16. ſeyn.

Aus dieſem Begriffe läßt ſich auch leicht die ganze Summe aller Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion finden; ſie muß ſo groß ſeyn, als wenn man alle Glieder zuſammen addirte. Aber nun wiſſen wir, daß allezeit die Summe zwey der von den Enden gleich weit abſtehenden Glieder mit andern auch gleich weit abſtehenden Gliedern einerley ſey. Man hat alſo nur nöthig, wenn man die Summe zweyer ſolcher Glieder weiß,

ſie

ſie mit der Hälfte der Anzahl der Glieder zu multipliciren, wenn man die ganze Summe der Progreſſion wiſſen will. Z. E. 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26. Zwey gleich weit von den Enden abſtehende Glieder werden = 31 ſeyn. Man dürfte alſo nur, um die Summe der Progreſſion zu finden, viermal 31 addiren; denn 8 Glieder oder vier Paar ſind da, da allezeit zwey und zwey 31 machen. 4 . 31 = 124. alſo die Summe der ganzen Progreſſion = 124.

Wäre auch die Anzahl der Glieder eine ungleiche Zahl, ſo würde doch die Regel gelten. Denn alsdenn bliebe das mittlere Glied alleine, aber es könnte auch nur halb ſo groß ſeyn, als die Summe zweyer von den Enden gleich weit abſtehender Glieder, weil es doch mitten zwiſchen zwey ſolchen Gliedern ſtehet, und das d immer gleich wächſet. Z. E. a+2d a+3d a+4d, da iſt a+3d halb ſo groß, als die beyden äußerſten zuſammen, 2a+6d. Alſo wenn man auch jezt in dem Fall die Summe zweyer gleich weit von den Enden abſtehenden Glieder mit der halben Zahl der Glieder multiplicirt, ſo iſt das eben ſo viel, als ob man alle Paare der Glieder ganz, und auch ein Paar halb addirte. Z. E. 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27. Die Summe zweyer gleich weit von den Enden abſtehender Glieder iſt = 30. Die Zahl der Glieder 7, alſo die Hälfte Zahl der Glieder = $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$ Paar. Wenn man alſo 30 mit $\frac{7}{2}$ multipliciret, ſo hat man die Summe der Progreſſion $30 \cdot \frac{7}{2} = \frac{210}{2} = 105$. Man hat hier, da die halbe Zahl der Glieder $\frac{7}{2}$ iſt, würklich die 30 dreymal und

ein halbmal genommen. Dreymal 30 iſt 90 und $\frac{1}{2}$mal 30 iſt 15, alſo die Summe 105. Allgemein: Es ſey das erſte Glied $= a$, die Zahl der Glieder $= n$, alſo die Paare der Glieder, ſie mögen gerade oder ungerade ſeyn, $= \frac{n}{2}$, das letzte Glied $= a + (n - 1)d$. §. 263. die Summe zweyer gleich weit von den Enden abſtehender Glieder $= 2a + (n - 1)d$. Folglich die Summe der ganzen Progreſſion $= (2a + (n - 1)d) . \frac{n}{2} = \frac{2an}{2} + \frac{(n - 1)dn}{2} = an + \frac{(n - 1)dn}{2}$ oder auch $an + \frac{(n^2 - n)d}{2}$.

Man kann alſo aus dem erſten Gliede, der Zahl der Glieder und der Differenz die ganze Summe der arithmetiſchen Progreſſion finden, denn mehrere Werthe ſind nicht in der Rechnung.

§. 266. Ehe wir dieſe Lehre verlaſſen, wollen wir ſie noch mit Exempeln erläutern. Der geſunde Verſtand muß es, wie bey allen Rechnungsarten, überhaupt lehren, wohin ein gegebenes Exempel gehöre.

Erſtes Exempel. Wie groß iſt die Summe der natürlichen Zahlzeichen von 1 bis 50?

Hier iſt gegeben das erſte Glied $= a = 1$ die Zahl der Glieder $= n = 50$. Die Differenz $= d = 1$. Alſo die Summe oder $S = an +$ $(n - 1)$

$\frac{(n-1)nd}{2}$ §. 265. Hier $= 1 . 50 + \frac{(50-1)50 . 1}{2}$

$= 50 + \frac{49 . 50}{2} = 50 + 49 . 25 = 50 + 1225$

$= 1275$.

Zweytes Exempel. Wie viel Schläge thut eine Uhr in 24 Stunden, die nur voll ſchlägt?

Hier ſind 2 Progreſſionen, die völlig gleich ſind, nemlich 1 bis 12, und wieder 1 bis 12. Man darf nur eine berechnen, und das gefundene mit 2 multipliciren $S = an + \frac{(n-1)nd}{2}$ §. 265.

Hier iſt $a = 1$, $n = 12$, $d = 1$, alſo $1 . 12 + \frac{(12-1)12 . 1}{2} = 12 + \frac{11 . 12}{2} = 12 + 11.6 = 12 + 66$

$= 78$ Schläge in 12 Stunden, alſo 156 in 24 Stunden. Wollte man auch die Viertelſchläge zählen, das wären in jeder Stunde 10, alſo noch 240 Schläge dazu.

Drittes Exempel. Es läßt jemand einen Brunnen graben. Er hat alſo accordiret, für den erſten Fuß tief 3 mgr., für jeden folgenden Fuß 2 mgr. mehr, der Brunnen, weil er fertig iſt, iſt 48 Fuß tief, was koſtet er zu graben?

Hier iſt gegeben, das erſte Glied $a = 3$ mgr. die Differenz $d = 2$ mgr. die Zahl der Glieder $n = 48$. alſo $S = an + \frac{(n-1)nd}{2} = 3 . 48 + \frac{(48-1)48 . 2}{2}$

$= 144 + 2256 = 2400$ mgr. $= 66$ rthl. 24 mgr.

Viertes Exempel. Man decket den Giebel eines Hauſes mit Dachſteinen, auf die oberſte Latte gehen 2 Steine, auf die folgende fünfe, und auf jede folgende drey mehr. Auf die letzte Latte kommen 59 Steine. Es wird gefragt, wie viel Reihen Steine, und wie groß die Summe aller Steine ſey?

Bekannt iſt hier das erſte Glied $a = 2$. ferner die Differenz $d = 3$. ferner das letzte Glied der Reihe, welches wir z nennen wollen $= 59$. Es wird geſuchet n und S. erſtlich n. das letzte Glied, nun iſt $z = a + (n-1)d$ §. 264. alſo hier in Zahlen,

$$59 = 2 + n.3 - 1.3$$

$$59 - 2 + 3 = n.3$$

oder $60 = n.3$

wenn auf beyden Seiten gleiches addirt und ſubtrahirt wird.

folglich $\frac{60}{3} = n$ würklich dividiret $= 20$. Nun iſt S auch gleich gefunden, es iſt nach der Formel $S = an + \frac{(a-n)nd}{2} = 2.20 + \frac{19.60}{2} = 40 + 570 = 610$. Es ſind der Latten 20, und überhaupt gehen 610 Steine darauf.

Fünftes Exempel. Es ſetzet jemand auf eine Nummer im Lotto 6 mgr., da ſie nicht herauskömmt, läſſet er ſeinen Einſatz bey jedem Zuge um 3 mgr. ſteigen. In der ein und zwanzigſten Ziehung nach ſeinem Einſatz kömmt endlich die Nummer heraus, da er ſeinen damaligen Einſatz funfzehnmal wieder erhält, ſo iſt die Frage jetzt: Wie viel hat ſein letzter Einſatz gekoſtet, wie viel

hat

haben alle Einſätze zuſammen gekoſtet, wie viel hat er wieder bekommen, wie viel hat er alſo gewonnen oder verloren?

Gegeben iſt hier in der Progreſſion das erſte Glied $= a = 6$ mgr., die Differenz $= d = 3$ mgr., die Zahl der Glieder $= n = 21$. Alſo koſtet ſein letzter Einſatz, welches das letzte Glied, es iſt $z = a + (n - 1)d = 6 + 20 . 3 = 66$ mgr. $= 1$ rthl. 30 mgr. Alle Einſätze zuſammen machen die Summe der Progreſſion aus, alſo ſind ſie $= S = an + \frac{(n-1)dn}{2}$

hier $= 6 . 21 + \frac{20 . 3 . 21}{2} = 125 + 630 = 756$ mgr. $= 21$ rthl. Wiederbekommen hat er den letzten Einſatz funfzehnmal alſo: (1 rthl. 30 mgr) $15 = 27$ rthl. 18 mgr., er hat alſo gewonnen 6 rthl. 18 mgr. denn die Summe aller ſeiner Zuſätze $= 21$ rthl. gehet, wie ganz natürlich, von ſeinem Gewinſte ab. Es verlohnet gewiß der Mühe nicht, darauf ſo lange zu warten.

Das eilfte Kapitel.

Von der geometriſchen Proportion.

§. 267. Wir ſagten in den 252, 253 und 254 §. daß man bey einem geometriſchen Verhältniß darauf ſehe, wie vielmal von zwey Größen, die man mit einander vergleiche, die eine in der andern enthalten ſey: und daß die Größe, welche nun zeiget, wie vielmal die eine Größe in der an-

dern enthalten wäre, der **Exponent** des Verhältniſſes hieße. Z. E. 2:8 da iſt 2 in 8 viermal enthalten, und 4 iſt der **Exponent** des Verhältniſſes §. 253.

Wenn man zwey ſolcher Verhältniſſe hat, die einen gleichen Exponenten haben, und alſo gleich ſind, ſo hat man eine geometriſche Proportion. Bey dieſem einen Verhältniſſe 2 : 8 war der Exponent =4. Nun wollen wir 5 : 20 nehmen, da iſt auch der Exponent = 4, denn 5 ſteckt in 20 **viermal**. Alſo ſind dieſe beyden Verhältniſſe gleich, oder können eine geometriſche Proportion ausmachen. Daß ſie eine ſolche Proportion ausmachen, zeiget man durch das Gleichheitszeichen (=) an. Man würde dieſe Proportion alſo ſchreiben müſſen 2 : 8 = 5 : 20. Eben ſo würde 9 : 27 = 5 : 15 eine geometriſche Proportion ſeyn: denn bey beyden Verhältniſſen iſt der Exponent gleich, oder = 3, weil 9 in 27 und 5 in 15 dreymal enthalten iſt. Es könnte aber auch ſeyn, daß der Exponent eines Verhältniſſes nicht eine ganze Zahl wäre, ſondern ein **ächter** oder **unächter** Bruch. Man ſiehet gleich, daß daran nichts gelegen iſt, und es doch eine Proportion bleibet, denn hier iſt die Frage bey zwey Verhältniſſen, die gleich ſind, ob bey beyden Verhältniſſen jede Größe gleich vielmal in der andern enthalten ſey. Das ſey nun **Bruchmal**, oder ein oder mehr ganze Zahlen mal, es iſt doch der Eigenſchaft der Proportion gemäß. So wäre 6 : 5 = 12 : 10 gleichfalls eine Proportion; hier iſt der Exponens $\frac{5}{6}$, denn 6 iſt in 5 nicht ganz, ſondern nur $\frac{5}{6}$ mal enthalten, welches man gleich

finden

finden wird, wenn man 6 mit $\frac{5}{6}$ multipliciret, da denn 5 heraus kömmt, und eben ſo 12 in 10, $\frac{10}{12}$ mal oder auch $\frac{5}{6}$ mal enthalten.

§. 268. Wenn man eine Proportion genau betrachtet, ſo ſiehet man, ſie beſtehet aus vier Gliedern: das erſtere für ſich: das zweyte aus dem erſten Gliede, das mit dem Exponenten multipliciret iſt; das dritte wieder für ſich; das vierte iſt wieder das dritte ebenfalls mit dem Exponenten der erſten beyden Glieder multipliciret. Wenn wir nun das erſte Glied = a nennen, und das dritte (welches das erſte in dem zweyten Verhältniß iſt) = b nennen, ferner den Exponenten der erſten beyden Glieder = m, ſo wäre folgendes eine ganz allgemeine geometriſche Proportion, a : am = b : bm. Denn das erſtere iſt, wie wir eben ſagten, für ſich = a, das zweyte iſt, das erſtere Glied mit dem Exponenten multipliciret, = am, das dritte iſt wieder für ſich = b, und das vierte iſt wieder, das dritte mit dem Exponenten der erſten beyden Glieder multipliciret, = bm. Alle mögliche Proportionen laſſen ſich hiedurch anzeigen, und dieſe wollen wir nun betrachten. m bedeutet hier gleichfalls alle mögliche, auch gebrochene Zahlen.

Wir haben jetzt a und b, oder das erſte und dritte Glied, als zwey verſchiedene Größen betrachtet, und denn heißt die Proportion eine diſcrete Proportion. Z. E. a = 4. b = 6. m = 5. ſo wäre 4 : 4 . 5 = 6 : 6 . 5. oder 4 : 20 = 6 : 30 eine diſcrete Proportion; oder a = 6. b = 12. m = $\frac{1}{3}$. ſo wäre 6 : 6 . $\frac{1}{3}$ = 12 : 12 . $\frac{1}{3}$. oder 6 : 2 = 12 : 4 eine diſcrete Proportion. Allein es kann auch wol

das dritte Glied dem zweyten gleich ſeyn, oder am = b. So wird, wenn man in der allgemeinen Proportion a : am = b : bm anſtatt b, die am ſetzet, folgende Proportion entſtehen: a : am = am : am . m, oder a : am = am : am². Eine ſolche Proportion, wo das dritte Glied dem zweyten gleich iſt, heißt eine continuirliche Proportion. Z. E. a = 5 . m = 3. So wäre 5 : 5 . 3 = 5 . 3 : 5 . 3 . 3 oder 5 : 15 = 15 : 45 auch 12 : 6 = 6 : 3.

§. 269. Wir wollen nun dieſe allgemeinen Ausdrücke für die geometriſche Proportion betrachten, und ſehen, was wir noch für Eigenſchaften darin entdecken.

a : am = b : bm für die diſcrete Proportion

a : am = am : am² für die continuirliche.

Auf beyde Fälle ſieht man, **wenn man die beyden äußerſten und die beyden mittelſten Glieder der Proportion mit einander multipliciret, daß ihr Produkt gleich ſey.** Denn bey dem erſten Falle a . b . m = a . b . m, und bey dem zweyten aam² = amam oder a²m². Das giebt die wichtigſte Bemerkung, die wir oft nützen werden.

Betrachten wir ſie ferner, ſo finden wir, daß der Quotient, wenn man die beyden vorderſten Glieder und die beyden hinterſten mit einander dividiret, auch völlig gleich ſey. Man mache welches Glied von beyden man wolle zum Diviſor. Bey der Diſcreta $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm}$ oder $\frac{am}{a} = \frac{bm}{b}$. Auf

den

den erſten Fall bey beyden $\frac{1}{m}$ und auf den zweyten Fall bey beyden m zum Quotienten.

Es verſteht ſich von ſelbſt, daß man ähnliche Glieder zu Diviſoren macht, das heißt, wenn das erſte Diviſor iſt, bey dem erſten Verhältniſſe, ſo muß es das dritte beym zweyten Verhältniſſe ſeyn, eben ſo mit dem zweyten und vierten. Und iſt überhaupt das erſte und dritte, und zweyte und vierte ähnliche Glieder.

Bey der Continua auch $\frac{a}{am} = \frac{am}{am^2}$ bey beyden $\frac{1}{m}$ zum Quotienten; und $\frac{am}{a} = \frac{am^2}{am}$ bey beyden m zum Quotienten. Dieſes ſind zwey ſehr merkwürdige Eigenſchaften, die aber aus der Natur der Sache folgen. Hieraus folget ſchon die wichtige Bemerkung: daß das eine würkliche geometriſche Proportion ſey, wenn ſie ſo beſchaffen iſt, daß das Produkt der beyden äußerſten Glieder gleich iſt dem Produkt der beyden mittlern, und daß man darnach alle mögliche Proportionen ſo gleich prüfen könne. Ich halte dieſes bequemer, als wenn man erſt den Exponenten der Verhältniſſe ſuchet, welcher manchmal ein großer Bruch ſeyn kann.

So wird z. E. 2 : 9 = 4 : 18 eine geometriſche Proportion ſeyn, denn 4 . 9 = 36 und 2 . 18 auch 36. eben ſo 4 : 12 = 12 : 36, denn 12 mal 12 = 144 und 4 . 36 auch = 144.

Ferner

Ferner, da die Quotienten der gleichartigen Glieder gleich ſind, oder $\frac{a}{am} = \frac{b}{bm}$ und $\frac{am}{a} = \frac{bm}{b}$ ſo folget auch, daß, wenn man zwey Brüche hat, die einander gleich ſind, man ſelbige in Proportion ſetzen könne, und daß man auch die beyden Verhältniſſe in einer Proportion durch Brüche ausdrücken könne. Alſo wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ſo wird auch $a:b = c:d$ ſeyn, und $ad = bc$. In Zahlen, wenn $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ ſo wird auch $3:5 = 9:15$ und $5.9 = 3.15$ ſeyn.

§. 270 Unſere Fundamentalproportion war $a:am = b:bm$. Sie kann auch für eine continuirliche Proportion allgemein genommen werden, denn alsdenn iſt $b = am$. Wir wollen nun ſehen, was wir hiermit anfangen, und wie wir die etwa verändern können.

1) Durch Verſetzung der Glieder.

$ma:a = mb:b$, es kömmt aus den mittelſten und äußerſten Gliedern einerley Produkt, alſo iſt es eine Proportion.

Exempel in Zahlen:

$5:6 = 10:12$, alſo gilt auch $6:5 = 12:10$.

Ferner: Durch Verwechſelung der beyden mittelſten.

$a:b$

$a:b=ma:mb$. In Zahlen $5:10=6:12$

auch die Glieder ließen ſich umkehren.

$b:a=mb:ma$. In Zahlen $10:5=12:6$

auch die ganze Proportion kann umgekehrt werden.

$b:mb=a:ma$. In Zahlen $12:10=6:5$

und hiemit laſſen ſich alle obige Veränderungen machen. Ueberhaupt iſt es eine Proportion, wenn die Produkte der mittlern und äußern Glieder gleich ſind.

2) Veränderungen durch die Addition und Subtraktion, da wir gleichfalls unſere Fundamentalproportion zum Grunde legen.

$a:ma=b:mb$, oder in Zahlen $5:6=10:12$,

Es iſt auch eine Proportion.

$a+ma:ma=b+mb:mb$ $5+6:6=10+12:12$

oder $11:6=22:12$

oder $a-ma:ma=b-mb:mb$ $5-6:6=10-12:12$

oder $-1:6=-2:12$

Auf beyde Fälle gleiche Produkte der äußerſten und mittlern Glieder. Auch zum zweyten und vierten Gliede läßt ſich das erſte und dritte addiren oder ſubtrahiren.

$a:ma+a=b:mb+b$ $5:6+5=10:12+10$

oder $5:11=10:22$

Auch

Auch a : ma - a = b : mb - b   5 : 6 - 5 = 10 : 12 - 10
oder 5 : 1 = 10 : 2

Es laſſen ſich auch hiemit alle Verſetzungen der erſten Art machen. Z. E.

a : b = ma - a : mb - b   5 : 10 = 6 - 5 : 12 - 10.
oder 5 : 10 = 1 : 2

wenn nur immer die mittlern Produkte gleich den äußern ſind.

3) Veränderungen durch die Multiplikation. Es geht an, daß man alle vier Glieder mit einerley Größe multipliciret, oder auch nur zwey, nemlich 1) das erſte und das zweyte, 2) das dritte und vierte, 3) das erſte und das dritte, oder 4) das zweyte und das vierte. Wenn immer die Produkte gleich ſind, iſt es eine wahre Proportion. Die Hauptproportion war a : ma = b : mb. Es gilt alſo auch, wenn man die Glieder mit c multipliciret:

ac : mac = bc : mbc   5.2 : 6.2 = 10.2 : 12.2
oder 10 : 12 = 20 : 24

Ferner: ac : mac = b : mb   5.3 : 6.3 = 10 : 12
oder 15 : 18 = 10 : 12

Auch ac : ma = bc : mb   5.4 : 6 = 10.4 : 12
oder 20 : 6 = 40 : 12

Auch a : mac = b : mbc   5 : 6.4 = 10 : 12.4
oder 5 : 24 = 10 : 48

Mit

Mit allen dieſen laſſen ſich auch nun alle Veränderungen der erſten Arten von 1 bis 2 machen, durch Verſetzungen, Additionen und Subtraktionen. Aus dieſen Veränderungen mit der Multiplikation der Glieder der Proportion folget auch ſchon, wie man hier geſehen hat, der ſehr nutzbare Satz: **Zwey Glieder eines Verhältniſſes in der Proportion, oder auch zwey gleichnamichte Glieder von beyden Verhältniſſen der Proportion, oder auch alle vier Glieder einer Proportion mit einerley Größe multipliciret, ändert die Proportion nicht:** welchen wir unten nochmals bey einigen Eigenſchaften der Proportion anführen und beweiſen werden.

4) Veränderungen durch die Diviſion: man kann entweder alle vier Glieder der Proportion mit einer Größe dividiren, oder auch nur zwey: welche aber ähnliche Glieder ſeyn müſſen, als 1) das erſte und zweyte, 2) das dritte und vierte, 3) das erſte und dritte, und 4) das zweyte und vierte. Es kommen immer gleiche Produkte aus den mittlern und äußern Gliedern, und alſo bleibt es eine geometriſche Proportion.

Die Fundamentalproportion $a : ma = b : mb$
$8 : 16 = 20 : 40$.

Es gilt auch: $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{c}$ $\frac{8}{2} : \frac{16}{2} = \frac{20}{2} : \frac{40}{2}$

oder $4 : 8 = 10 : 20$

Ferner

Ferner $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$ $\frac{8}{2} : \frac{16}{2} = 20 : 40$

oder $4 : 8 = 20 : 40$

Ferner: $a : ma = \frac{b}{c} : \frac{mb}{c}$ $8 : 16 = \frac{20}{2} : \frac{40}{2}$

oder $8 : 16 = 10 : 20$

Ferner: $\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$; $\frac{8}{2} : 16 = \frac{20}{2} : 40$

oder $4 : 16 = 10 : 40$

Ferner: $a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$ $8 : \frac{16}{2} = 20 : \frac{40}{2}$

oder $8 : 8 = 20 : 20$

Mit allen dieſen laſſen ſich auch alle Veränderungen der erſten Arten von 1 bis 3 machen, durch Verſetzungen, Additionen und Subtraktionen.

5) Veränderungen durch die Erhebung der Glieder zu Potenzen und Ausziehung der Wurzel. Wir führen die Ausziehung der Wurzel hier nur durch Zeichen an, weil wir die würkliche Ausziehung noch nicht vorgetragen haben. Hierbey aber haben wir wohl zu merken, daß alle vier Glieder entweder zu Potenzen von einerley Exponenten

ten erhoben werden müſſen, oder auch Wurzeln von gleichen Exponenten daraus gezogen werden müſſen, ſonſt bleibt es keine Proportion, weil nur auf dieſen Fall die Produkte der äußerſten Glieder den Produkten der mittelſten gleich werden.

Die Fundamentalproportion.

$a : ma = b : mb.$ $4 : 16 = 9 : 36$

Es gilt auch $a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2$ $4^2 : 16^2 = 9^2 : 36^2$

oder $a^n : m^na^n = b^n : m^nb^n$ oder $16 : 256 = 81 : 1296$

denn $a^n\, m^n\, b^n$ iſt $m^n\, a^n\, b^n$.

Hier laſſen ſich nun alle vorhergehende Regeln durch Verſeßungen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Diviſion anbringen, in der Proportion Veränderungen zu machen, und es wird doch immer eine Proportion bleiben. Z. E.

$$a^n \pm m^na^n : m^na^n = b^n \pm m^nb^n : m^nb^n$$

Es kämen die Produkte heraus.

$$a^nm^nb^n \pm m^nm^na^nb^n = m^na^nb^n \pm m^nm^na^nb^n$$

welche beyde vollkommen gleich ſind.

Weil man auch Potenzen hat, da der Exponent mit dem Minuszeichen ſtehet, ſo hat man auch ſolche Proportionen.

$a^{-n} : m^{-n}a^{-n} = b^{-n} : m^{-n}b^{-n}$ oder in Zahlen $4^{-2} : 16^{-2} = 9^{-2} : 36^{-2}$

und weil $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ §. 143. So läßt ſich auch dieſe Art der Proportionen alſo ausdrücken.

$\frac{1}{a^n} : \frac{1}{m^n a^n} = \frac{1}{b^n} : \frac{1}{m^n b^n}$ in Zahlen

$\frac{1}{4^2} : \frac{1}{16^2} = \frac{1}{9^2} : \frac{1}{36^2}$

Dieſe Art läßt wieder alle vorige Veränderungen zu.

Eben ſo durch Ausziehung der Wurzel:

$a : am = b : bm$ $4 : 16 = 9 : 36.$

Es gilt auch daher

$\sqrt{a} : \sqrt{am} = \sqrt{b} : \sqrt{bm}$; $\sqrt{4} : \sqrt{16} = \sqrt{9} : \sqrt{36}$
$2 : 4 = 3 : 6$

oder auch $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{am} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{bm}$,

Dieſes ließe ſich auch ausdrücken §. 145:

$a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{n}} m^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} m^{\frac{1}{n}}$.

Es iſt hiebey, welches wir nochmals erinnern, wohl zu merken, daß alle vier Glieder entweder zu Potenzen erhoben, oder der √ aus ihnen ausgezogen werden muß, wenn es eine Proportion bleiben ſoll.

Wir haben alle Hauptſtücke der Veränderungen einer einfachen Proportion vorgeſtellet, indeſſen kann man alles dieſes noch auf unzähliche Art verändern und verſetzen. Wir rathen einem jeden An-

Anfänger, ſich hierinnen ſehr zu üben, und die Proportionen zu verändern. Den allgemeinen Probierſtein einer wahren geometriſchen Proportion haben wir angezeiget, wenn nemlich die Produkte der äußerſten und mittelſten Glieder gleich ſind.

§. 271. Ehe wir weiter gehen, und von zuſammengeſetzten Verhältniſſen, (denn auch dieſe giebt es, und die kommen ſehr häufig vor,) handeln, wollen wir erſt noch ein Paar Eigenſchaften der Proportion hinzufügen, die täglich vorkommen. Von der einen haben wir ſchon etwas vorläufig im vorigen §. 270 geredet. Zwey ähnliche Glieder einer Proportion mit einerley Zahl multipliciret oder dividiret, ändert die Proportion nicht. Es wird dieſes leicht zu beweiſen ſeyn.

$a : am = b : mb$. Wir haben §. 269 gezeiget, daß $\frac{a}{ma} = \frac{b}{mb}$. Man kann nun beyde als Brüche anſehen, aber Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley Zahl multipliciret oder dividiret, ändert den Bruch nicht, alſo $\frac{ac}{mac}$ oder $\frac{a:c}{ma:c}$ iſt gleich $\frac{a}{ma}$. Eben ſo mit $\frac{b}{mb}$, folglich gilt auch $a.c : mac = b : mb$ oder $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$. Und eben das kann man auch von den hinterſten beyden Gliedern, alſo von allen vieren auf eben die Art zeigen.

§. 272. Wenn man drey Glieder einer Proportion, ſie ſey Diſcreta oder Continua hat, ſo läßt ſich auch das vierte finden. Es iſt das Produkt der beyden mittelſten, dividiret durch das erſte Glied, oder wenn $a : ma = b : x$, ſo wäre das vierte oder geſuchte Glied $x = \frac{mab}{a} = mb$.

Der Beweiß wird leicht ſeyn. Wir haben gezeigt §. 296, daß das Produkt der mittlern Glieder gleich ſey dem Produkte der äußern.

Folglich: $ax = mab$ $:a$

$\frac{ax}{a} = \frac{mab}{a}$ Gleiches durch Gleiches würklich dividiret.

$x = mb$

Da man durch Verſetzungen, die nach §. 270 erlaubt ſind, jedes Glied zum vierten Gliede machen kann, ſo kann man allezeit aus drey gegebenen das noch fehlende finden. Z. E. es fehlte das dritte Glied, und man hätte alſo $a . ma = x : mb$, ſo könnte man die Proportion gleich alſo ſetzen. $ma : a = mb : x$ und x wäre $= \frac{amb}{ma} = b$. In Zahlen $6 : 18 = x : 12$ alſo, oder $18 : 6 = 12 : x$, und $x = \frac{6.12}{18} = \frac{72}{18} = 4$. Folglich $6 : 18 = 4 : 12$ u. ſ. w.

Es gilt dieſes auch für continuirliche Proportionen beym erſten und letzten Gliede, für das mittlere Glied muß man einen andern Weg ſuchen, welchen wir aber nicht ausführlich jetzt ſagen können, weil wir die Ausziehung der Wurzel noch nicht

nicht gelehrt haben, wir wollen doch aber etwas davon erklären. Wenn man die Ausziehung der Wurzeln kennet, die wir nicht ohne Urſache hinter die Lehre von den Proportionen geſetzt haben, ſo wird man, was wir jetzt nur anzeigen, leicht in Wirklichkeit bringen können.

Z. E. Es fehlte das mittlere Glied in einer continuirlichen Proportion, alſo hätte man $a : x = x : m^2a$, weil nun $m^2a^2 = xx$ ſo iſt aus beyden der √

$$\sqrt{m^2a^2} = \sqrt{x^2}$$

folglich $ma = x$.

Man ſollte zu 4 und 9 die mittlere Proportionalzahl in einer continuirlichen Proportion finden, ſo wäre $4 : x = x : 9$, alſo $4 . 9$

oder $36 = x^2$

$$\sqrt{36} = \sqrt{x^2}$$

Das könnte man leicht im Kopfe ausziehen, weil $6 . 6 = 36$ iſt, und alſo $6 = x$, und alſo $4 : 6 = 6 : 9$. Dieſes, aus drey gegebenen Gliedern das vierte zu ſuchen, iſt der Grund der berühmten Regula Detri, und aller ihrer verſchiedenen Anwendungen und Veränderungen, welches wir unten weitläuftiger zeigen werden. Dieſes, das vierte Glied zu ſuchen, müſſen wir doch noch mit ein Paar Exempeln erläutern.

Es ſey gegeben $5 : 15 = 9 : x$, oder man ſuchet das vierte Glied, ſo iſt $x = \frac{9 . 15}{5} = 27$, und die Proportion heißt $5 : 15 = 9 : 27$. Dieſe Art, das vierte Glied zu ſuchen, iſt allgemein, es mögen auch mit den dreyen Gliedern alle erlaubte und an-

gezeigte Veränderungen vorgegangen ſeyn, es mögen die drey Glieder Brüche oder ganze Zahlen ſeyn. So würde auch in der Proportion $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 3 : x$. das vierte Glied $x = \frac{3.3}{8} : \frac{1}{4} = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{1}$ §. 218 $= \frac{36}{8} = 4\frac{1}{2}$, und die Proportion wäre $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 3 : 4\frac{1}{2}$. wo die Produkte der äußerſten Glieder dem mittlern Produkte völlig gleich ſind.

§. 273. Es kömmt ſehr oft vor, daß man eine Proportion mit einer andern gegebenen Proportion vergleichen kann und muß, woraus denn abermals eine neue Proportion entſteht. Wir wollen die wichtigſten und nothwendigſten Stücke hieher ſchreiben, der Beweiß davon liegt gleich darin, weil die Produkte gleich ſind.

1) Wenn von zwey verſchiedenen Proportionen die beyden erſten oder die beyden hinterſten Glieder einander gleich ſind, ſo ſtehen die andern auch in Proportion mit einander. Z. E.

	$a : ma = b : mb$	$3 : 6 = 4 : 8$
	$a : ma = c : mc$	$3 : 6 = 5 : 10$
alsd. gilt	$b : mb = c : mc$	$5 : 10 = 4 : 8$
oder auch	$a : ma = b : mb$	$3 : 6 = 4 : 8$
	$c : mc = b : mb$	$8 : 16 = 4 : 8$
ſo gilt	$a : ma = c : mc$	$3 : 6 = 8 : 16$

Es folget auch aus dem Grundſatze ſehr leichte. Wenn zwey Dinge einem dritten gleich ſind, ſo ſind ſie unter einander gleich

gleich. Nun waren beyde Verhältniſſe a : ma und c : mc beyde dem dritten b : mb gleich, alſo auch unter einander gleich; alſo kann man eine Proportion daraus machen §. 267.

Man nennet dieſe Art zu ſchließen in der Kunſtſprache ex aequo ſimpliciter.

2) Es kann das erſte und dritte, oder das zweyte und vierte Glied in zweyen Proportionen einander gleich ſeyn. Z. E.

a : ma = b : mb 3 : 6 = 4 : 8
a : na = b : nb 3 : 12 = 4 : 16
  6 : 12 = 8 : 16

So kann man ſchließen
ma : na : mb : nb

Ferner: a : ma = b : mb 3 : 6 = 4 : 8
na : ma = nb : mb 9 : 6 = 12 : 8
ſo gilt a : na = b : nb 3 : 9 = 4 : 12

Wenn das zweyte in der einen Proportion dem erſten in der andern, und das vierte in der einen dem dritten in der andern gleich iſt. Z. E.

a : ma = b : mb 3 : 6 = 4 : 8
ma : na = mb : nb 6 : 9 = 8 : 12
ſo ſchließt man a : na = b : nb 3 : 9 = 4 : 12

Man nennet dieſes Ordinatim ex aequo.

3) Wenn a) die beyden äußerſten Glieder von zweyen Proportionen einander gleich ſind, oder b) die beyden mittlern, c) wenn in der einen Proportion, das zweyte dem erſten Gliede in der andern Proportion gleich iſt, und das dritte in der erſten und vierten in der andern, oder wenn das zweyte und das dritte dem erſten und vierten gleich ſind.

a) Z. E. $a : ma = b : mb$ ♂ $\qquad 3 : 6 = 8 : 16$ ♂ ♀

$a : mna = \frac{b}{n}$ ♀ $: mb \qquad 3 : 12 = 4 : 16$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 6 : 12 = 4 : 8$

ſo gilt $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

b) ♂ $a : ma = b : mb$ ♀ $\qquad 3 : 6 = 8 : 16$ ♂ ♀

$mna : ma = b : \frac{b}{n} \qquad 4 : 6 = 8 : 12$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3 : 4 = 12 : 16$

ſo gilt $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

c) $a : ma = b : mb$ ♂ ♀ $\qquad 3 : 6 = 8 : 16$ ♂ ♀

$ma : mna = \frac{b}{n} : b \qquad 6 : 4 = 12 : 8$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3 : 4 = 12 : 16$

ſo gilt $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Man

Man nennet dieſe Art zu ſchließen perturbate ex aequo, und es iſt ſehr nothwendig, daß man alles dieſes ſich wohl bekannt mache, und durch häufig wiederholte Exempel einſchärfe, weil man ſonſt gar nicht fortkommen kann.

§. 274. Man bringet neue Proportionen heraus, wenn man die gleichnamichten Glieder ganz verſchiedener gegebener Proportionen mit einander multipliciret oder dividiret. Z. E.

Es ſey die eine Proportion $a : ma = b : mb$

Die andere Proportion $c : nc = d : nd$

So wird, wenn die gleichnamichte mit einander multipliciret werden. $ac : mnac = bd : mnbd$

Daß es eine Proportion ſey, beweiſet, weil die Produkte der mittlern Glieder gleich ſind den Produkten der äußern oder $mnac\,bd = ac\,mn\,bd$. Man könnte auch die Glieder von drey, vier, fünf und mehrern Proportionen auf die Art mit einander multipliciren.

Z. E. in Zahlen:

$$2 : 4 = 6 : 12$$
$$3 : 9 = 5 : 15$$
$$5 : 2 = 10 : 4$$
$$2.3.5 : 4.9.2 = 6.5.10 : 12.15.4$$
oder $30 : 72 = 300 : 720$

Eben ſo, wenn man die Glieder einer gegebenen Proportion durch die Glieder einer andern dividiret, ſo kömmt ebenfalls eine wahre geometriſche Proportion heraus, Nur muß man hier auch

die gleichnamichten Glieder durch einander dividiren.

$$a : am = b : bm$$
$$c : cn = d : dn$$
$$\frac{a}{c} : \frac{am}{cn} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn}$$

In Zahlen $8 : 24 = 7 : 21$
$$3 : 9 = 4 : 12$$
$$\frac{8}{3} : \frac{24}{9} = \frac{7}{4} : \frac{21}{12}$$

Denn $\frac{8}{3} \cdot \frac{21}{12}$ iſt $= \frac{24}{9} \cdot \frac{7}{4}$ weil beydes $= \frac{168}{36} = \frac{14}{3}$ iſt.

Man kann vor und nachher ſowol bey der Multiplikation als Diviſion mit einer oder beyden Proportionen alle mögliche Verſetzungen vornehmen, wenn es nur eine wahre Proportion bleibet, und man alsdenn alſo damit verfähret, wie wir gelehret haben.

§. 275. Man findet oft bey zweyen und mehrern Proportionen, deren Glieder man mit einander multipliciren ſoll, daß zwey nicht gleichnamichte Glieder einander gleich ſind. Wenn dieſes bey zweyen Proportionen iſt, ſo macht dieſes eine ſolche Proportion, da ſich in der neuen durch die Multiplikation erhaltenen Proportion das erſte Glied zum zweyten, wie das dritte Glied der zweyten Proportion zum vierten Glied der erſten verhält. Ein Exempel ſoll es erläutern:

a : am

$$a : am = b : bm$$
$$cn : c = bn : b$$

ſo wåre alsdenn $acn : acm = bn : bm$

Man kann dieſes auch leicht auf andre Art beweiſen, denn wenn man würklich die Glieder nach vorhergegangenen Multiplikationen §. 274 in Proportion ſetzte, ſo wåre: $acn : amc = bbn : bmb$

$$: b$$

$$acn : amc = bn : bm$$

aber nach §. 271 zwey Glieder einer Proportion mit einerley Größe dividiret.

In Zahlen: $4 : 6 = 8 : 12$

$$16 : 4 = 32 : 8$$
$$64 : 24 = 32 : 12$$

wåren die beyden Proportionen alſo:

$$am : a = bm : b \quad \text{oder} \quad a : b = c : d$$
$$c : cn = b : bn \quad \quad r : s = d : e$$

ſo wåre $amc : anc = bm : bn$ $\quad ar : bs = c : e$

In Zahlen: $3 : 6 = 8 : 16$

$$2 : 5 = 16 : 40$$
$$2.3 : 6.5 = 8 : 40$$

oder $6 : 30 = 8 : 40$

Man kann ganz bequem dazu kommen, wenn man die neue Proportion haben will, wenn man nur

nur die Größen gleich gegen einander ausſtreichet, von denen man ſiehet, daß ſie, wenn man ſie auch würklich mit dem Gliede der unter ihr ſtehenden Proportion multiplicirte, doch nachher durch die Diviſion, weil man zwey Glieder einer Proportion durch eine Größe dividiren kann, ohne ſie zu ändern, wegfallen.

Z. E.
$$\begin{array}{l} 3 : 6 = 8 : \cancel{16} \\ \underline{2 : 5 = \cancel{16} : 40} \\ 6 : 30 = 8 : 40 \\ 6 : 30 = 8.\cancel{16} : \cancel{16}.40 \\ \qquad\qquad\quad\; \underline{: 16} \end{array}$$
denn ſonſt wäre es

alſo: $6 : 30 = 8 : 40$

Wenn auf die Art zwey Proportionen im gemeinen Leben zuſammen geſetzet werden, um daraus die dritte zu finden, ſo heißt ſie die Regel Quinque, weil man zu 5 bekannten Größen die 6te ſuchet, als hier aus 3, 6, 8, 2, 5. ſuchet man die 40. Denn wenn die auch nicht hier ausgedrücket wäre, ſo könnte man ſie doch ganz leicht finden,

denn
$$\begin{array}{l} 3 : 6 = 8 : 16 \\ \underline{2 : 5 = 16 : x} \\ 6 : 30 = 8 : x \end{array}$$
und $x = \frac{30.8}{6} = 40.$ §. 272.

§. 276. Es können auch mehrere Proportionen ſo geordnet ſeyn, daß allezeit in der nächſten ſich ein gemeinſchaftliches Glied mit der vorhergehenden Proportion befindet, das aber nicht

gleich

gleichnamicht iſt. Z. E. folgende ſollen alle wahre Proportionen ſeyn:

a : b = c : d
g : h = d : n
r : s = n : f
p : q = f : t
v : w = t : y

So wäre alsdenn a . g . r . p . v : b . h . s . q . w = c : y Denn wenn man würklich auch die hinterſten Glieder mit einander multipliciret, ſo kann man doch in der neuen daraus entſtehenden Propertion die beyden letzten Glieder auf c : y durch die Diviſion nach §. 271. reduciren. Eigentlich wäre alsdenn die Proportion:

a.g.r.p.v : b.h.s.q.w = c.d.n.f.t : d.n.f.t.y.
die beyden letzten Glieder dividiret durch d.n.f.t §. 271.

giebt a . g . r . p . v : b . h . s . q . w = c : y

In Zahlen
2 : 4 = 5 : 10
8 : 12 = 10 : 15
3 : 4 = 15 : 20
5 : 2 = 20 : 8
16 : 18 = 8 : 9

2.8.3.5.16 : 4.12.4.2.18 = 5.9. oder
3840 : 6912 = 5 : 9 und es wird einerley

Produkt aus der Multiplikation der bezeichneten Glieder herauskommen, nemlich 34560. Wir haben ſchon öfters gezeiget, daß zwey gehörige Glieder einer Proportion, mit einer Zahl multipliciret oder dividiret, die Proportion nicht ändern.

Nun

Nun könnten in dieſer Proportion die vorderen Glieder noch eine Veränderung durch die Diviſion leiden. Sie laſſen ſich beyde durch 384 dividiren, und dann wird die Proportion 10 : 18 = 5 : 9. welches gleichfalls eine Proportion iſt.

Anmerkung. Wenn man auf dieſe Art Verhältniſſe zuſammenſetzet, daraus Proportionen entſtehen, ſo giebt dieſes die Vorſchrift, wie man das Verhältniß zweyer Größen aus den Verhältniſſen der Größen, wovon ſie abhangen, zuſammenſetzen muß. Dieſes nun wird in der Arithmetik die **Kettenregel** genennet. Dieſe Verhältniſſe ſind auch hier durch die Multiplikation verbunden, wie man gleich ſehen wird, wenn man ſie betrachtet. Es ſind aber ſehr viele Dinge in der Welt, die nach zuſammengeſetzten Verhältniſſen mit einander verglichen werden.

Das zwölfte Kapitel.

Von der Anwendung der geometriſchen Proportion im gemeinen Leben.

§. 277. Wir würden eine ſehr weitläuftige Sache unternehmen, wenn wir den ganzen Nutzen der

der Proportionen im gemeinen Leben zeigen, und alle die verſchiedenen Rechnungsarten und Regeln weitläuftig erklären und aus einander ſetzen wollten, welche auf der Lehre von der Proportion beruhen. Es iſt auch wider die Abſicht dieſer Schriſt. Wir werden die vornehmſten Rechnungsarten berühren, und den Grund davon zeigen, und es wird alsdenn einem jeden leicht ſeyn, die verſchiedenen Rechnungsarten, die in den praktiſchen Rechnungsbüchern angeführet werden, zu verſtehen, und ſich durch Uebung eine Fertigkeit zu erwerben.

§. 278. Eine der vornehmſten Anwendungen der Proportion iſt die einfache **Regula Detri**, oder **Regula Trium**. Sie heißt daher alſo, weil man aus drey gegebenen Gliedern das vierte ſuchet. Es iſt daher begreiflich, daß dieſe Dinge in einem Verhältniß gegen einander ſtehen müſſen. So ſtehen z. E. die Waare und der Preiß derſelben in einem Verhältniß, das heißt: nach eben dem Verhältniß, als ich mehr Waare nehme, muß ich mehr Geld ausgeben, zweymal mehr Waare erfodert zweymal mehr Geld, drittehalb mehr Waare drittehalb mehr Geld, u. ſ. w. Eben ſo ſind Lohn und Arbeit, Zeit und Zinſen von ausgeliehenem Gelde, ſelbſt den Werth des Geldes unter einander, und tauſend andere Dinge im gemeinen Leben, in der Mathematik, Phyſik, mit einander im gewiſſen Verhältniß, und muß der geſunde Verſtand es beurtheilen, welche Dinge ein Verhältniß unter einander haben, wenn er Aufgaben darüber auflöſen ſoll.

Es iſt z. E. eine Aufgabe, die durch die Regula Detrie aufgelöſet wird. Was koſten 20 Pfund, wenn ein Pfund 2 rthl. koſtet? Es iſt begreiflich, daß die 20 Pfund zwanzigmal ſo viel als ein Pfund koſten müſſen, weil es zwanzigmal mehr ſind, alſo ſtehen ſie auch mit einem zwanzigmal ſo großen Gelde, als 2 rthl. iſt, im Verhältniß. Ich würde alſo ſagen müſſen, 1 Pfund verhält ſich zu 20 Pfund, wie 2 rthl. zu der zu findenden Zahl, oder 1 Pfund: 20 Pfund = 2 rthl. : x rthl.

Man theilet die Regul Detri in die directa und in die inverſa. Die directa iſt, wenn die gleichnamichten Glieder einer Proportion ſich auf einander beziehen, ſo daß z. E. wenn das zweyte Glied größer oder kleiner iſt, als das erſte, das vierte es auch werden muß. Das vorhergehende Exempel war daraus. Die inverſa iſt, wenn das nicht iſt. Z. E. Wenn 10 Menſchen in einem Tage eine Anzahl Klafter Holz ſchlagen, wie lange Zeit werden 20 Menſchen darauf zubringen? Ich kann hier nicht ſchließen, 10 Menſchen: 20 Menſchen = 1 Tag: x Tage; das wäre nach der Regula trium directa, und alsdenn müſte das vierte Glied in dieſem Exempel auch größer werden als das dritte. Sondern weil 20 Menſchen mehr verfertigen in eben der Zeit als 10 Menſchen, ſo muß ich ſchließen: 20 Menſchen: 10 Menſchen = 1 Tag: x Tag. Da ſteht alſo nicht das dritte Glied mit dem erſten in dem vorigen Verhältniß, als bey der Regula Detri directa. Doch wir reden erſt von der Regula Detri directa.

§. 279.

§. 279. Der geſunde Verſtand muß es lehren, ob ein Exempel aus der Regula Detri directa ſey. Man ſetzet alsdenn die gleichnamichten Dinge in die beyden erſten Glieder, das Ungleichnamichte zum dritten, und was man ſuchet, iſt das vierte. Zwar pflegen die Rechenmeiſter bey der Regula Detri directa folgende Regel zu geben, wogegen wir auch nichts einzuwenden haben, weil man ja in einer Proportion die mittlern Glieder verwechſeln kann. **Wovon man etwas fråget, ſetzet man zum dritten Gliede, was mit ihm einerley Art iſt, zum erſten, und das übrige zum zweyten.** Mathematiſch iſt das nicht, allein leicht für Lernende zu behalten. Z. E. Was koſten 19 Pfund, wenn 1 Pfund 1 gr. 4 pf. koſtet? Der Mathematiker ſchließet, 1 Pfund : 19 Pfund = 1 gr. 4 pf. : x. Hingegen der Rechenmeiſter wird nach der gegebenen Regel alſo den Aufſatz machen. Die Frage iſt, was koſten 19 Pfund? das ſetzet er hinten, das iſt alſo, wovon man etwas fråget; ſein Gleichnamichtes vorne, und die noch übrige Zahl in die Mitte, er würde alſo ſchließen, 1 Pfund : 1 gr. 4 pf. = 19 Pfund : x. Es kömmt eben das heraus.

§. 280. Da die Regul Detri eine wahre geometriſche Proportion iſt, davon drey Glieder gegeben ſind, und wozu man das vierte ſuchet, ſo gilt, um das vierte zu finden, die Regel, die wir §. 272 gegeben und bewieſen haben. Nemlich, **man multipliciret die beyden mittlern mit einander, und dividiret das Produkt durch das vordere Glied, der Quotient iſt das**

vierte geſuchte Glied. Dieſe Regel iſt allgemein, die Glieder mögen ganze Zahlen, oder Brüche, ächte oder unächte ſeyn. Nur wenn es Brüche ſind, muß man wiſſen, wie man mit ihrer Multiplikation und Diviſion umgehen ſoll, welches wir in der Lehre von den Brüchen ſattſam gezeiget haben. Wir wollen dieſe Regel noch durch einige Exempel erläutern:

Was koſten 32 Ellen, wenn 5 Ellen 1 rthl. 12 mgr. gelten?

Man müſte es alſo ſetzen: 5 Ellen : 32 Ellen = 1 rthl. 12 mgr. : x. Sie würden koſten, oder x wäre = $\frac{(1 \text{ rthl. } 12 \text{ gr.})\ 32}{5}$ würklich multipliciret und dividiret, = 8 rthl. $19\frac{1}{5}$ gr. welches $\frac{1}{5}$ man, wenn man will, nach §. 224 leicht zu Pfennigen machen kann, ſo wie man ſich auch hier der Multiplikation und Diviſion in benamten Zahlen nach §. 162. erinnern muß, ſo wird man gar keine Schwierigkeiten finden, welches wir aber, um alle Weitläuftigkeiten zu vermeiden, nicht wieder anführen wollen.

Was koſten $6\frac{3}{4}$ Elle Zeug, wenn $\frac{1}{8}$ Elle $1\frac{3}{4}$ rthl. gilt?

Man ſchlöſſe $\frac{1}{8}$ Elle : $6\frac{3}{4}$ Elle = $1\frac{3}{4}$ rthl. : x oder die mit Brüchen vermiſchte Zahlen zu unächten Brüchen, $\frac{1}{8}$ Elle : $\frac{27}{4}$ Elle = $\frac{7}{4}$ rthl. : x rthl. Dieſe $6\frac{3}{4}$ Ellen würden koſten, oder x wäre = $\frac{\frac{27}{4}\cdot\frac{7}{4}}{\frac{1}{8}}$ = $\frac{189}{16}\cdot\frac{8}{1} = \frac{189}{2} = 94\frac{1}{2}$ rthl.

Man

Man wird nach dieſer Anweiſung alle Exempel der Rechenbücher bey einiger angewandten Aufmerkſamkeit rechnen können, wenn man nur manche nothwendige Dinge in acht nimmt, die mannichmal dabey vorkommen, als mannichmal addiren, zu kleinern, oder größern Benennungen bringen, u. ſ. w. indeſſen, es wird nichts unverſtändlich ſeyn.

Die Probe, ob ein Exempel aus Regula De tri directa recht gerechnet iſt, iſt eben wie bey der geometriſchen Proportion. Man multiplicire das gefundene letztere Glied mit dem erſten, und die beyden mittlern Glieder mit einander, wenn bey beyden Operationen einerley Produkt herauskömmt, ſo hat man recht gerechnet. Z. E. Das Facit oder vierte Glied in nächſt vorhergehendem Exempel wäre $94\frac{1}{2}$ rthl. Die ganze Proportion würde alſo ſtehen: $\frac{1}{8}$ Elle : $\frac{27}{4}$ Ellen = $\frac{7}{4}$ rthl. : $\frac{189}{2}$ rthl.

Es kommt aus beyden Operationen $\frac{189}{16}$ oder $11\frac{13}{16}$ endlich heraus, alſo iſt das Exempel recht gerechnet und das vierte Glied richtig gefunden.

§. 281. Es ſind nicht allezeit zwey Größen zweyen andern Größen, auf welche ſie ſonſt eine Beziehung haben, in einerley Ordnung, ſondern öfters in umgekehrter Ordnung proportionell. Iſt das letztere, ſo gehört die Aufgabe zur Regula De tri inverſa. Z. E. Einerley Arbeit wird von mehr Leuten in kürzerer Zeit zu Stande gebracht, als von wenigen, alſo ſteht die Zeit mit der Menge der Arbeiter umgekehrt im Verhältniß, das iſt, je mehr Leute bey gleicher Art, deſto weniger Zeit wird erfordert. Ueberhaupt für die Anfänger

dienet folgende Regel: Wenn man ſagen kann: **Je größer die Fragezahl, deſto größer; und je kleiner die Fragezahl, deſto kleiner muß in eben dem Verhältniß die zu findende Zahl ſeyn**, ſo gehört das Exempel zur Regula Detri **directa**. Man muß aber ſagen: **Je größer die Fragezahl, deſto kleiner; und je kleiner die Fragezahl, deſto größer muß in eben dem Verhältniſſe die zu ſindende Zahl ſeyn**, ſo gehört das Exempel zur Regula Detri **inverſa**. Will man ſolches Exempel aufſetzen, ſo verkehrt man nur die vorderen Glieder, und ſetzet, was das erſtere in der ordentlichen Regel wäre, hier zum zweyten, und das zweyte in der ordentlichen Regel hier zum erſten Gliede. Oder weil man, ohne daß das Produkt geändert wird, die mittlern Glieder verwechſeln kann, ſo ſetzet man die **Fragezahl vorne zum erſten Gliede, und was ihr gleich iſt, zum dritten, und das übrige zum zweyten**, und verfährt alsdenn wie mit einem gewöhnlichen Exempel aus der Regula Detri directa. Z. E. wenn der Himbte Korn 12 gr. koſtet, ſo wieget ein zwey Pfennig Brodt 24 Loth, was wird es wiegen müſſen, wenn der Himbte 16 gr. gilt? Natürlich muß es weniger wiegen, und das Exempel iſt aus der inverſa, weil man ſagen kann, je größer **die Fragezahl, deſto kleiner die Antwort**, und 16 gr. war hier die Fragezahl. Man ſchließet alſo, 16 gr. : 12 gr. = 24 Loth : x und $x = \frac{24.12}{16}$ = 18 Loth, oder nach der Rechenmeiſter Art, da man die Fragzahl zuerſt, und die erſte zuletzt ſetzet:

16

16 gr. : 24 Loth = 12 gr. : x da auch x oder die zu findende Zahl = $\frac{12.24}{16}$ = 18 Loth.

Noch einige Exempel. Wenn man $8\frac{1}{2}$ Elle $\frac{5}{4}$ breit Tuch zum Kleide haben muß, wie viel wird man nöthig haben, wenn das Tuch $\frac{7}{4}$ breit iſt. Natürlich viel weniger, man ſchließet nach der Regula Detri inverſa $\frac{7}{4} : \frac{5}{4} = 8\frac{1}{2} : x$ und $x = \frac{\frac{17}{2} \cdot \frac{5}{4}}{\frac{7}{4}}$

$= \frac{85}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{85}{14} = 6\frac{1}{14}$ Ellen.

Mit einer gewiſſen Summe werden 400 Soldaten 16 Monat unterhalten, wie viel Leute kann man mit eben der Summe 25 Monat unterhalten? Natürlich weit weniger, weil man nicht mehr Geld zur Unterhaltung hat, und ſie doch länger unterhalten ſoll.

Man ſchließet, 25 Monat : 16 Monat = 400 S. : x, oder nach der Rechenmeiſter Art: 25 Monat : 400 Soldaten = 16 Monat : x Sold. und x oder die Antwort iſt = $\frac{400.16}{25}$ = 256 Soldaten.

In einem Schloſſe, das belagert werden ſoll, ſind 650 Soldaten, ihr Proviant iſt auf 12 Monat, ſie ſollen ſich aber wenigſtens 30 Monat halten, wie viel können bleiben, wenn ſie ſich erhalten wollen? Hier ſteht der Proviant mit der Zeit in verkehrter Proportion. Man ſchließet alſo:

30 M. : 12 Monat = 650 Mann : x und
x = $\frac{650.12}{30}$ = 260 Mann, alſo müſſen 390 heraus.

Auf einem Schiffe giebt man jedem Mann täglich 27 Loth Brodt und 3 Quartier Waſſer, man hat noch auf 1 Monat oder 30 Tage Vorrath,

aber das Schiff wird verſchlagen, und man will es ſo eintheilen, daß man auf 90 Tage Vorrath hat, wie viel muß man jedem nun geben?

Hier muß ſowol Brodt als Waſſer jedes beſonders berechnet werden, man ſchließet bey dem Brote, 90 Tage : 30 Tagen = 27 Loth : x Loth und $x = \frac{27.30}{90} = 9$ Loth.

Ferner: 90 Tage : 30 Tagen = 3 Q. : x Q. $x = \frac{3.30}{90} = 1$ Quartier.

Es hat ein Meiſter einem andern 5 Geſellen geliehen, die bey ihm gearbeitet haben, und ſind ſie 24 Tage bey ihm in Arbeit geweſen. Nun gebrauchet dieſer auch Hülfe, und der andre Meiſter ſchickt ihm 8 Geſellen zu, wie lange kann er die behalten, ſo daß keiner von dem andern etwas mehr zu fordern hat? Die Umſtände machen dieſes Exempel nicht weitläuftiger. Es iſt ein ſimples Exempel aus der Regula trium inverſa. 8 Geſellen : 5 Geſellen = 24 Tage : x Tagen, und $x = \frac{24.5}{8} = 3 \cdot 5 = 15$ Tage.

Die Probe der Regula Detri inverſa geſchiehet wie bey der rechten. Denn man kann alle mögliche Exempel der Regula Detri inverſa allgemein doch alſo vorſtellen:

$$am : a = b : \frac{ab}{am}$$

und $ab = \frac{amb}{m}$ auf beyde Multiplikationen der

mit=

mittlern und äußern Glieder einerley Produkt, nemlich ab.

Das vierte Exempel ganz hingeſetzet, war
30 M. : 12 Monat = 650 Sold. : 260 S.

Bey beyden Multiplikationen iſt das Produkt 7800.

§. 282. Wenn ſolche Aufgaben gegeben werden, dabey man die Regel Detri zweymal gebrauchen muß, und wo alsdenn ein Paar nicht homogene Glieder in beyden Proportionen gleich ſind, §. 275. ſo heißt dies die Regel Quinque. Es ſind dabey fünf Stücke bekannt, woraus man das ſechſte findet. Wir haben ſchon von dieſer Art Proportionen §. 275. geredet, das man hier gebrauchen kann. Es kommt bey der Regel Quinque auf den Aufſatz der beyden Proportionen an, um die ſehr leichte Auflöſung zu finden. Ein Exempel wird einen Begriff davon geben, und wenn wir zeigen, wie es aufgelöſet werden muß, auch die Sache erläutern. Man bezahlet für 8 Centner 12 Meilen weit zu fahren 4 rthl., wie viel muß man geben, 36 Centner 18 Meilen weit zu fahren? Es ſind hier offenbar zwey Exempel aus der Regel Detri. Das erſtere: wenn man den Weg als gleich bey beyden verſchiedenen Gewichten betrachtete. Man würde alsdenn ſchließen 8 Centner : 36 Centner = 4 rthl. : x rthl. und $x = \frac{4.36}{8} = 18$ rthl. So viel würde das Fuhrlohn für 36 Centner auf 12 Meilen weit ſeyn. Allein der Weg iſt nicht gleich, ſondern die 36 Centner ſollen 18 Meilen weit gefahren werden; man ſchlie-

ſet alſo ferner: 12 Meilen : 18 Meilen = 18 rthl. : y rthl. und $y = \frac{18.18}{12} = 27$ rthl., welches das Facit iſt.

Man betrachte nun beyde Proportionen, ſo wird man ſehen, daß man ſie alſo hätte aufſetzen müſſen:

8 Cent. : 36 Cent. = 4 rthl. : [x] rthl.
12 Meil : 18 Meil. = [x] rthl. : y rthl.

$8 \cdot \cancel{12} : \cancel{36} \cdot \cancel{18} = \cancel{4} : y$
$\cancel{2} \quad \cancel{3} \quad \cancel{9} \cdot 9 \quad 1$
$1 \quad 3$

(Die durchgeſtrichenen Buchſtaben ſind wieder in [] geſchloſſen.)

Weil man nun die Glieder zweyer Proportionen mit einander multipliciren kann, und weil zwey gleichartige Glieder einer Proportion mit einerley Zahl können dividiret werden, ohne die Proportion zu ändern, ſo kann man hier verſchiedene Vortheile anbringen, darauf man ſich üben muß, um die großen Multiplikationen zu vermeiden, und welche wir hier auch angebracht haben, indem wir immer zwey Glieder der Proportion, die durch die Multiplikation der beyden Proportionen entſtand, mit einerley Zahl dividiret, und ſo wie wir das thaten, die alten Glieder ausgeſtrichen haben. So iſt z. E. gleich zuerſt das erſte und dritte Glied durch 4 dividiret, und unter die 4 die 1 als der Quotient, und unter die 8 im erſten Gliede die 2 geſetzet, nachher iſt dieſe 2 und die 18 im zweyten Gliede wieder mit der 2 dividiret, denn die 12 und 36 beyde durch 4, denn die daraus entſtehende 3 und 9 im erſten Gliede beyde durch 3, und es bleibt endlich die Proportion:

$1 : 3 . 9 = 1 : y$

alſo: $y = \frac{1.3.9}{1} = 27.$

Nach dieſem weitläuftig analyſirten Exempel wollen wir einige kürzer aus einander ſetzen.

Drey Mann mehen in 6 Tagen 15 Morgen, wie viel Morgen werden von 14 Mann in 5 Tagen abgemehet?

Man ſchließet erſtlich, daß die Zeiten gleich ſeyn ſollen, und ſieht, was herauskömmt, hernach nimmt man dieſes, und ſchließet davon auf die verſchiedenen Zeiten.

alſo: 3 Mann : 14 Mann = 15 Morgen : [x] Morg.
6 Tage : 5 Tage = [x] Morgen : y Morg.

$\not{3} . \not{6} : \not{14} . 5 = \not{15} : y$
$\quad 3 \quad 7 \quad\quad 5$

$3 : 7 . 5 = 5 : y$ nach dieſen Abkürzungen

alſo $y = \frac{7.5.5}{3} = \frac{175}{3} = 58\frac{1}{3}$ Morgen.

Einer verdient von 12 Koſtgängern in 18 Wochen 120 rthl., er will gern alle Jahr 1040 rthl. verdienen, wie viel muß er Koſtgänger haben?

120 rthl. : 1040 rthl. = 12 Koſtg. : [x] Koſtg.
52 Woch. : 18 Woch. = [x] Koſtg. : y Koſtg.

$\not{120} . \not{52} : \not{1040} . \not{18} = 12 : y$
$\not{6} \quad \not{2} \quad 3$
1

$1 : 3 = 12 : y$

alſo $y = \frac{3.12}{1} = 36$ Koſtgänger.

Hier iſt die zweyte Proportion aus der Regula trium inverſa, weil man weit weniger Koſtgänger dazu gebraucht, wenn man in Jahresfriſt 1040 rthl. von ihnen verdienen will, als wenn man es in 18 Wochen verdienen wollte. Die Verkürzungen oder Aufhebung der Glieder ſind leicht einzuſehen. Es kommen überhaupt mannichmal Fälle vor, wo man die Regel Detri inverſa bey der Regel Quinque gebrauchen muß, und welche daher die Regel Quinque inverſa genennet wird. Die Aufgaben ſelbſt lehren es nach §. 281. beurtheilen, zu welcher Art eine Aufgabe gehöre.

Folgendes Exempel, das wir noch zur Uebung herſetzen wollen, zeiget, wie in einer Aufgabe mehrere Anwendungen der Regula Quinque ſtatt finden können. Es iſt ſehr leicht zu berechnen, wir wollen es aber wegen des Unterrichts etwas weitläuftig herſetzen.

Zu Aufführung eines Baues werden 32 Maurergeſellen, und 5 Meiſter 216 Tage gebrauchet. Ein Meiſter bekömmt täglich $1\frac{1}{2}$ Mark, 1 Geſelle 18 Schillinge. Noch 40 Zimmerleute durch 165 Tage, jeder bekömmt täglich 20 Schillinge. Noch 125 Tagelöhner durch 177 Tage, jeder bekömmt täglich 13 Schillinge, was hat der ganze Bau gekoſtet? Wir bemerken erſtlich, das 16 Schillinge auf 1 Mark gehen.

Ferner ſiehet man leicht, daß hier 4 Exempel aus der Regula Quinque ſind. 1) Die Mauermeiſter, 2) die Maurergeſellen, 3 die Zimmerleute,

leute, 4) die Tagelöhner. Was jeder Part koſtet, wird, wie natürlich, zuſammen addiret und die Bauſumme kömmt denn heraus.

1) Die Mauermeiſter:

1 Tag : 216 Tagen = $\frac{2}{3}$ Mark : [x] Mark
1 Meiſt. : 5 Meiſt. = [x] Mark : y Mark

---

1 : 216 . 5 = $\frac{2}{3}$: y und y = 216 . 5 . $\frac{3}{2}$
= 1620 Mark bekommen ſämtliche Mauermeiſter.

2) Die Maurergeſellen:

1 Tag : 216 Tagen = 18 Schillinge : [x] Schill.
1 Geſ. : 32 Geſ. = [x] Schillinge : y Schill.

---

1 : 216 . 32 = 18 Schillinge : y Schillinge weil aber 18 Schillinge = $\frac{18}{16}$ Mark, ſo kann man auch das ſtatt 18 Schillinge ſetzen, und nun wäre y = 216 . 32 . $\frac{18}{16}$ Mark = 216 . 2 . 18 Mark = 7776 Mark, das bekommen alle Maurergeſellen.

Ferner die Zimmerleute:

1 Tag : 165 Tagen = $\frac{20}{16}$ Mark : [x] Mark
1 Geſ. : 40 Geſ. = [x] : y Mark

---

1 : 165 . 40 = $\frac{5}{4}$: y
und y = 165 . 40 . $\frac{5}{4}$ = 165 . 10 . 5 = 8250 Mark, das bekommen alle Zimmerleute.

Nun

Nun die Tagelöhner:

1 Tag : 177 Tagen = $\frac{13}{16}$ Mark: [x] Mark

1 Tagel.: 125 Tagen = [x] : y Mark

1 : 177 . 125 = $\frac{13}{16}$: y und y = 177. 125 $\frac{13}{16}$ und y = 17976 Mark 9 Schillinge.

Alſo es haben bekommen:

Die Mauermeiſter	1620 M.
Maurergeſellen	7776
Zimmerleute	8250
Tagelöhner	17976 M. 9 S.
ſämtlicher Bau koſtet	35622 M. 9 S.

§. 283. Wenn die Aufgaben ſo beſchaffen ſind, daß man viele Proportionen nach dem §. 276. anſetzen, oder die Regel Detri auf die da gezeigte Art anwenden muß, daß alſo die Verhältniſſe aus vielen andern zuſammen geſetzet ſind, ſo heißt das die **Kettenrechnung**, oder auch die **Regel Multiplex**. Ein Exempel wird mehr als alle Beſchreibungen erläutern. Man hat hier auch verſchiedene Anwendungen, ſowol die Regula Detri directa als inverſa, nachdem die Umſtände ſind.

20 Arbeiter, die 15 Wochen täglich 6 Stunden arbeiten, bekommen überhaupt 1000 Thlr. Lohn, wie viel wird man an 36 Arbeiter, die 4 Wochen, und des Tages 8 Stunden arbeiten, bezahlen müſſen?

In dieſem Exempel liegen drey Proportionen, die alle nach der Regel Detri berechnet werden können. Wir wollen erſtlich ſetzen, alle Arbeiter arbeiten

beiten gleiche Wochen und Stunden. So würde man ſchließen müſſen:

20 Arbeiter : 36 Arb. = 1000 Thlr. : x Thlr.

nun wüſte man leicht, was x wäre. Ich ſage aber ferner, ſie arbeiten nicht gleiche Wochen, alſo ſchließet man nun:

15 Wochen : 4 Wochen = x Thlr. y Thlr.

Das y weis man nun auch. Allein ſie arbeiten auch nicht gleiche Stunden, man ſchließet drittens:

6 Stunden : 8 Stunden = y Thlr. z Thlr.

Weil man x und y vorher durch die ordentliche Regel Detri geſunden hat, ſo kann man auch z dadurch nun finden. Allein, weil nach §. 274. 275. 276. man die Glieder verſchiedener Proportionen mit einander multipliciren kann, und doch eine wahre Proportion erhält, ſo kann man ſie alle gleich unter einander ſetzen, auch die Verkürzungen anbringen und alſo ſchließen:

20 Arb. : 36 Arb. = 1000 Thlr. : [x] Thlr.
15 Woch. : 4 Woch. = [x] Thlr. : [y] Thlr.
6 Stund. : 8 Stund. = [y] Thlr. : z Thlr.

$\not{2}\not{0} \cdot \not{1}\not{5} \cdot \not{6} : \not{3}\not{6} \cdot 4 \cdot 8 = \not{1}\not{0}\not{0}\not{0} : z$ Thlr.
$\not{1} \cdot \not{3} \cdot \not{1} \quad \not{6} \quad \not{5}\not{0}$
$1 \quad 2. \quad 10$

1 : 2 . 4 . 8 = 10 : z Thlr.

und z Thlr. = 2 . 4 . 8 . 10 = 640 Thlr. welches die Auflöſung iſt.

1000 Luisd'or, die von Hamburg geſendet worden, werden in Leipzig ausgegeben; ein Wechſelbrief dafür wird nach Hamb. geſchickt, da der Cours 135 in Banco iſt, (das iſt da 135 Thlr. Ldor

nur

nur 100 Thlr. Banco ausmachen), nun iſt ein Thlr. Banco 3 Mark Banco. Es iſt die Frage: wie viel Mark Banco man in Hamburg nun bekomme?

Es ſind drey Proportionen.

Erſtlich die Ldor zu Thlr. 1 Ldor: 5 Thlr. = 1000 Ldor.: [x] Thlr.

nun wie viel Thlr. das in Banco bringet. 135 Thlr.: 100 Thlr. = [x] Thlr.: [y] Thlr.

nun wie viel Mark das ausmachet 1 Thlr.: 3 Mark = : [y] Thlr.

z Mark

$$\not 1 . \not 1 . 135 : 5 . 100 . 3 = 1000 : z \text{ Mark}$$

alſo $z = \frac{5 . 100 . 3 . 1000}{135}$ da man denn die Mark erhält, nemlich $11111\frac{1}{9}$ Mark.

Da dieſes eine wahre Proportion iſt, ſo ſind auch die Produkte der mittelſten und äußerſten Glieder einander gleich. Man kann alſo z auch auf folgende Art finden:

$$1 . 1 . 135 . z = 5 . 100 . 3 . 100$$

$$135 . z = 1500000$$

$$z = \frac{1500000}{135}$$

und wenn man würklich multipliciret, und nun beydes oder Gleiches mit Gleichem durch 135 dividiret.

welches gleichfalls $11111\frac{1}{9}$ Mark ausmacht. Betrachtet man dieſes Exempel genauer, ſo wird man finden, daß, wenn man bey dieſem aufgegebenen Exempel alle Faktores, die zu der zu ſuchenden

Größe

Größe gehören, und nachher den Diviſor der andern Größe abgeben, wodurch man z alleine bekömmt, auf eine Seite ſetzte, und alle andern Faktores auf die andere, man alsdenn durch die bloße Diviſion ein Exempel, es beſtehe aus noch ſo vielen Gliedern, auflöſen könne. Dieſer Satz iſt auch ganz allgemein wahr, welches man ſehen kann, wenn man ſtatt der Zahlen Buchſtaben ſetzet. Z. E.

$$\begin{aligned} a : b &= c : [d] \\ e : f &= [d] : [y] \\ n : r &= [y] : z \\ \hline a.e.n.bfr &= c : z \end{aligned}$$

Folglich $aenz = bfrc$ beydes durch aen dividiret,

alſo $z = \frac{bfrc}{aen}$ das iſt Gleiches durch Gleiches.

Nur kommt es darauf an, eine Regel zu geben, auf welche Seiten man die Faktores ſetzen muß. Sie iſt folgende, welches man, wenn man einen Satz in Proportionen zergliedert, ſelbſt finden wird.

Man mache einen verticalen Strich. Setze auf eine Seite die Urſachen, wodurch eine Größe beſtimmet wird, auf die andere die Wirkung. Ferner, auf die Seite, wo die Wirkung des erſten Satzes ſtand, wieder die Urſach, und auf die entgegengeſetzte die Wirkung des zweyten Satzes geſetzet,

geſetzet, und ſo immer fortgefahren, ſo werden auf jeder Seite gleichartige Größen und die unbekannte auch auf einer zu ſtehen kommen. Die alſo geſetzten Zahlen laſſen ſich durch die Diviſion gegen einander aufheben. Endlich werden die Zahlen jeder Seite mit einander multipliciret, und mit dem Produkte, wo die unbekannte Größe ſtehet und welches ſich mit bey der unbekannten Größe findet, die andern dividiret, ſo giebt der Quotient die unbekannte oder geſuchte Größe. Oder weil es mannichmal bey manchen Schwierigkeiten verurſachen könnte, in jedem Falle Urſache und Wirkung gleich zu unterſcheiden, man auch mancheſmal beydes im uneigentlichen Verſtande nehmen müſte, ſo ſind denen vielleicht folgende Ausdrücke deutlicher. Alle Theile einer Größe, wodurch die Größe beſtimmt wird, ſetzet man auf eine Seite, der durch ſie beſtimmten Größe wechſelsweiſe gegen über.

§. 284. Dieſe Art zu verfahren, heißt von dem de Rees, einem Holländer, die reeſiſche Regel, welcher die Art, die Glieder in zwey Columnen zu ſetzen, angegeben hat. Es hindert nichts, wenn auch auf eine oder beyde Seiten Brüche kommen, man verfähret eben ſo. Hiernach laſſen ſich alle Aufgaben der Regel Detri directa und inverſa, Quinque und Multiplex leichtlich auflöſen. Exempel ſollen ſie erläutern, und zwar von Anfang an.

Erſt-

Erſtlich ein ganz leichtes Exempel:

114 Pfund koſten 15 Thlr., wie viel wird man für 280 Pfund bezahlen müſſen?

Hier kann 114 ℔ als eine Urſache, daß man 15 Thlr. bezahlen muß, alſo kann 15 Thlr. als eine Wirkung angeſehen werden; ſie kommen alſo auf zwey verſchiedene Seiten zu ſtehen. Nun ſetze man auf die Seite, wo 15 Thlr. ſtehen, welche man als eine Wirkung betrachtet hat, wieder die neue Urſache, nemlich die 280 ℔ und auf die andere Seite die noch unbekannte Wirkung x Thlr. Man multipliciret was auf jeder Seite ſtehet zuſammen, und bekömmt dadurch zwey gleiche Größen §. 283. in deren einer die unbekannte iſt. Dividiret man beydes durch die Größe, die bey x ſtehet, alſo würklich Gleiches durch Gleiches, ſo bekömmt man alſo ſeinen Werth.

114 ℔	15 Thlr.
x Thlr.	280 ℔
$114 \cdot x$	$= 15 \cdot 280$
folglich $x =$	$\frac{15 \cdot 280}{114}$
oder $x = 36$	$\frac{26}{144}$ Thlr.

Für $26\frac{2}{5}$ Thlr. bekömmt man $49\frac{1}{4}$ ℔, wie viel bekömmt man für 33 Thlr.

$\frac{132}{5}$ Thlr.	$\frac{197}{4}$ ℔
z ℔	33 Thlr.

$$\frac{132 \cdot z}{5} = \frac{197 \cdot 33}{4}$$

$$\frac{4 \cdot 132 z}{4 \cdot 5} = \frac{197 \cdot 33 \cdot 5}{4 \cdot 5}$$

$$z = \frac{197 \cdot 33 \cdot 5}{4 \cdot 132}$$

Die eine Urſache iſt $26\frac{2}{5}$ Thlr. $= \frac{132}{5}$, und die Würkung davon $49\frac{1}{4}$ ℔ $= \frac{197}{4}$, alſo kömmt beydes auf verſchiedene Seiten; die zweyte Urſache iſt 33 Thlr. die kömmt auf die Seite, wo die erſte Würkung ſtand, und deſſen Würkung iſt die unbekannte oder z ℔. Multipliciret man nun beydes, das eine, wo z iſt, Zähler und Nenner mit 4, das andere Zähler und Nenner mit 5, ſo fallen die Brüche weg, weil nun beyde Größen gleiche Nenner bekommen, und man erlanget alsdenn durch die Diviſion das Facit. Allein man hätte kürzer dazu kommen können, wenn man die Nenner der Brüche gleich ausgeſtrichen, und ſie auf die entgegengeſetzte Seite geſetzt hätte, welches eben das, als bey der vorigen Operation zuwege gebracht hätte. Dann würde das Exempel alſo ſtehen.

4 . 132 Thlr.	197 ℔ . 5
~~5~~	~~4~~
z ℔	33 Thlr.
4 . 132 . z =	197 . 5 . 33
oder 528 . z =	32505

und $\frac{32505}{528} = z = 61\frac{9}{16}$ ℔

Exempel aus der Regel Detri inverſa. Eine Schanze wird in 9 Tagen von 16 Mann gegraben, wie lange werden 24 Mann darauf zubringen?

3 ~~9~~ Mann	1 Schanze
2 ~~16~~ Tage	~~24~~ Mann ~~8~~ 1
1 Schanze	x Tage
2 . 3 =	x

Hier iſt 1) die Wirkung die Schanze, die Urſache 9 Mann und 16 Tage, alſo die beyden letztern auf einer Seite, und die Schanze auf der andern. 2) iſt die Wirkung abermal eine Schanze, folglich das auf die Seite, wo vorher die Urſache des erſten Satzes ſtand, die Urſache davon 24 Mann und x Tage, das auf die Seite, wo vorher die Wirkung ſtand. Nun die Sätze gegen einander aufgehoben, weil ſich hier etwas aufheben läſſet; alsdenn was auf jeder Seite iſt, mit einander multiplicirt, ſo kömmt hier gleich ohne die Diviſion das Facit. Sie werden 6 Tage darauf zubringen.

Aus der Regel Quinque. Von 100 Thlr. bekömmt man in zwölf Monaten 5 Thaler

Zins, wie viel wird man von 568 Thaler in acht Monaten bekommen?

5 ~~20~~ ~~100~~ Thaler	~~5~~ Thlr. 1
3 ~~6~~ ~~12~~ Monat	~~568~~ Thlr. ~~142~~ 71
x Thaler	8 Monat 4
5 · 3 · x =	4 · 71
oder 15 x =	284
x =	$\frac{284}{15} = 18\frac{14}{15}$ Thlr.

Die Urſache des erſten Satzes: 100 Thaler und 12 Monat, die **Wirkung** 5 Thaler. Die Urſache des zweyten Satzes: 568 Thlr. und 8 Monat. Die **Wirkung** x Thlr. oder das, was man ſuchet. Nun nach der gegebenen Regel aufgeſetzt und verfahren, kömmt zum Facit: 18 Thlr. 33 gr. $4\frac{4}{5}$ pf.

Aus der Kettenrechnung einige Exempel:

15 Leinwebergeſellen, die täglich 10 Stunden arbeiten, verfertigen in 5 Wochen 3 Tagen 50 Stiege Leinewand, wie viel Geſellen werden erfordert, um 120 Stiege zu verfertigen, wenn die Geſellen täglich 15 Stunden 3 Wochen 4 Tage arbeiten ſollen. Nach der Regel wird es ſo aufgeſetzt.

1 ~~15~~ Geſellen	~~50~~ Stiege ~~10~~ 1
1 ~~10~~ Stunden	x Geſellen
1 ~~5~~ Wochen	~~3~~ Wochen 1
1 ~~3~~ Tage	~~4~~ Tage 1
30 ~~120~~ Stiege	~~15~~ Stunden 1
30 =	x

Es werden 30 Geſellen erfodert.

Wenn

Wenn man Exempel hat, worin verſchiedene Geldmünzen vorkommen, ſo muß man die mit einerley Münzſorte vergleichen; wenn man dieſes nicht weis, ſo iſt es auch unmöglich, das Exempel aufzulöſen. Bey Wechſeln geſchiehet dieſe Art der Vergleichung häufig. Z. E. Ein Mann aus Petersburg will ſeinem Sohn in Berlin 1000 Rubel ſchicken, und ſie durch Wechſel über Amſterdam übermachen, in Berlin ſoll die Summe dem Sohne in Ducaten bezahlt werden. Nun iſt der Cours in Petersburg 47½ Stüver Holländiſch, (das iſt, ſoviel iſt 1 Rubel werth) in Holland machen 20 Stüver 1 Gulden, 2½ Gulden machen 1 Thaler Holländiſch. Der Cours nach Berlin iſt 142 pro Cent, (das iſt 100 Thlr. Holländiſch, ſind in Berlin 142 Thr. werth) ferner, gilt ein Ducat in Berlin 3 Thlr. Nach den Urſachen und Wirkungen, deren hier viele ſind, muß das Exempel, wie folget, aufgeſetzet werden, und kann man bey ſolcher Art Aufgaben zur Hülfe bemerken, daß auf jeder Seite gleiche Münzſorten kommen müſſen, welches den Aufſatz ſehr erleichtert, weil man, wenn man nur den erſten Satz recht geſetzet hat, nicht leicht mehr irret. Man fängt gemeiniglich mit der zu ſuchenden Größe an.

~~10~~ ~~1000~~ Rubel	x Ducaten
19 ~~95~~ Stüber	1 Rubel
~~2~~	~~20~~ Stüber ~~2~~
1 Fl.	~~5~~ Fl.
1 Thlr. Holl.	~~2~~
71 ~~142~~ Thl. Berl.	~~100~~ Thl. Holl.
1 Ducat	3 Thlr.
71 . 19 =	3 . x
oder 1349 =	3 x

alſo $x = \frac{1349}{3} = 449\frac{2}{3}$ Ducaten, welches 1349 Thlr. machet. Wäre man zweifelhaft, wie man ein ſolches Exempel, wenn es etwas weitläuftig iſt, nach der reeſiſchen Regel aufſetzen ſoll, ſo ſetze man es in ordentlichen Proportionen auf, die man bey einigem Nachdenken leicht ordnen wird. Man würde dieſes Exempel alſo aufſetzen müſſen.

1 Rubel : $47\frac{1}{2}$ Stüber = 1000 Rubel : [t] Stüber

20 Stüber : 1 Fl. Holl. = [t] Stüber : [r] Fl. Holl.

$2\frac{1}{2}$ Fl. Holländ. : 1 Thlr. Holl. = [r] Fl. Holl. : [y] Thlr. Holländ.

100 Thlr. Holländ. : 142 Thlr. Berl. = [y] Thlr. Holl. : [z] Thlr. Berl.

3 Thlr. Berl. : 1 Duc. = [z] Thlr. Berl. : x Ducaten

---

alſo

alſo $1.20.2\frac{1}{2}.100.3 : 47\frac{1}{2}.1.1.142.1 = 1000 : x$

oder weil 1 nicht multiplicirt $20.2\frac{1}{2}.100.3 : 47\frac{1}{2}.142 = 1000 : x$

oder würklich multiplicirt $15000 : 6745 = 1000 : x$

oder die Glieder, die ſich dividiren laſſen, $15 : 6745 = 1 : x$ oder durch einerley Zahl dividiret. $3 : 1349 = 1 : x$

alſo die Anzahl der Ducaten oder $x = \frac{1.1349}{3} = 449\frac{2}{3}$ Ducaten.

Es läßt jemand von Amſterdam 1000 Stück Ducaten kommen, ſie werden ihm angerechnet das Stück zu 5 Fl. 4 Stüber Holländiſch Courant. Er will von Braunſchweig aus durch Wechſelbriefe bezahlen, kann aber nur Wechſelbriefe in Holländiſchen Banco bekommen. Nun iſt Banco 5 pro Cent beſſer als Courant. Der Cours in Braunſchweig gegen Banco iſt $133\frac{1}{4}$ pro Cent, das iſt 100 Thlr. Holländiſch Banco iſt $133\frac{1}{4}$ Thlr. Braunſchweigiſche Münze. Nun iſt die Frage, 1) wie viel Geld muß er in Braunſchweig ausgeben, um einen ſo hohen Wechſelbrief zu kaufen, als er für die 1000 Stück Ducaten bezahlen muß. 2) Wie viel koſtet ihm der Ducate im Braunſchweigiſchen Gelde? 3) Es folget gleich daraus, da man den Ducaten in Braunſchweig für 2 rthl. 20 ggr. bekommen kann, ob er an ſei-

 ner

ner Einwechslung gewonnen oder verloren habe. Wir haben hier zu bemerken, $2\frac{1}{2}$ Fl. ſind 1 Thlr. Banco, oder 5 Fl. ſind 2 Thlr. Banco. Ferner 1 Fl. hat 20 Stüber, alſo 5mal ſo viel als 5 Fl. 4 Stüber oder 26 Fl. Courant ſind 5 Ducaten. Nun der Aufſatz nach der reeſiſchen Regel:

x Thlr. Braunſchw.	~~1000~~ Ducaten ~~10~~ ~~2~~
~~5~~ Ducaten	20 Fl. Courant
21 ~~105~~ Fl. Cour.	~~100~~ Fl. Banco ~~20~~ 4
~~2~~ ~~4~~ ~~5~~ Fl. Banco	~~2~~ Thlr. Banco
~~100~~ Thlr. Banco	$133\frac{1}{4}$ oder $\frac{533}{~~4~~}$ Thl. Braun.
21 . x =	26 . 4 . 533
21 . x =	55432
x =	$\frac{55432}{21} = 2639\frac{13}{21} =$

2639 Thlr. 14 ggr. $10\frac{6}{7}$ pf.

So viel muß er in Braunſchweigiſcher Münze anwenden. Wir wollen nun, um die folgenden Fragen zu erleichtern, die $10\frac{6}{7}$ Pfennig für 1 ggr. annehmen. Alſo zu 2) 1000 Duc.: $2639\frac{5}{8}$ Thlr. = 1 Duc.: x Thlr. oder 1000: $\frac{21117}{8}$ = 1 D.: x und x = $\frac{21117}{8000}$ = 2 Thlr. 15 ggr. 4 pf. und ein kleiner Bruch.

Er hat alſo an jedem Ducaten 4 ggr. 8. pf. gewonnen.

Man kann auch, wenn man nur die verſchiedenen Proportionen aufmerkſam betrachtet, gleich ſehen, daß man bey der reeſiſchen Regel die beyden mittlern Rechenglieder auf eine Seite, und die äußerſten auf die andere Seite geſetzt hat.

§. 258.

§. 285. Man hat noch vielerley Rechnungsarten, die von den Dingen, worauf ſie angewendet werden, ihren Namen erhalten haben, wie z. E. Interesrechnung, Zeitrechnung, Gewinn- und Verluſtrechnung, Geſellſchaftsrechnung, Vermiſchungs- und Alligationsrechnung u. ſ. w. welche in der That in einigen Anwendungen der Proportion beſtehen. Es würde uns zu weit führen, wenn wir von dieſen Dingen auch nur die erſten Anwendungen machen wollten, da wir kein Rechenbuch ſchreiben, ſondern nur die Gründe der Arithmetik lehren wollen.

Wenn man das bisher gelehrte wohl behalten hat, ſo wird man, wenn man in Herrn Profeſſor Karſten **Lehrbegriff der Mathematik** im erſten und Anfange des zweyten Theils, die Erklärung und Anwendung dieſer verſchiedenen Regeln durchſieht, nachher ganz leicht alle Aufgaben, die in praktiſchen Rechenbüchern über dieſe Regeln gegeben ſind, auflöſen können. Noch eine Anmerkung muß ich machen, ehe ich dieſes Kapitel beſchließe.

Man hat manichmal beſondere Arten von Rechnungen über gewiſſe Dinge, und will man Fragen von ſolchen Dingen auflöſen, ſo muß man dieſe Arten der Verhältniſſe wiſſen, ſonſt kann man bey aller Wiſſenſchaft in der Arithmetik doch ſolche Aufgaben nicht auflöſen, wir wollen nur zum Beyſpiele eine anführen.

Der Preis der Diamanten richtet ſich nicht alſo nach dem Gewichte, ſo, daß ein Diamant, der

nochmal ſo viel wieget, als ein anderer, auch noch- mal ſo viel werth ſey, ſondern nach einem weit grö- ßern Verhältniß. Bey Diamanten verhalten ſich die Preiſe, wie die Quadrate des Gewichts. Man wieget ſie nach Karaht und Gran, und ein Ka- raht hat vier Gran. Wenn man alſo einen Dia- mant hat, der zwey Gran wieget, und das Gran Diamanten koſtete 5 Thl., ſo würde man nicht ſchlie- ßen müſſen, um den Werth des Diamants zu wiſſen, 1 Gran : 2 Gran = 5 Thlr. : x Thlr. ſon- dern $1^2 : 2^2 = 5 : x$ das iſt $1 : 4 = 5 : x$ und alſo würde der Diamant 20 Thlr. werth ſeyn. Man hätte zwey Diamanten, die man mit einander ver- gleichen wollte, und wovon man beyder Gewichte, und den Preis des einen wüſte. Einer ſoll z. E. 3 Gran wiegen und 45 Thlr. koſten, der andere ſoll 5 Gran wiegen, ſo müſte man ſo ſchließen $3^2 : 5^2 = 45 x$ oder $9 : 25 = 45 : x$ und x oder der Preis wäre alsdenn = 125 Thlr. Man ſieht zugleich beym Preis der Diamanten noch auf andere Ei- genſchaften, z. E. Dicke, Höhe, Reinigkeit ꝛc. die hieher nicht gehören.

Das

Das dreyzehnte Kapitel.

Von der geometriſchen Progreſſion.

§. 286. Man nennet eine Reihe Größen oder Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, eine geometriſche Progreſſion. So ſind zum Exempel die Reihen Zahlen: 1, 2, 4, 8, 16 ꝛc. 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ ꝛc. in einer geometriſchen Progreſſion. Bey der erſten Reihe werden die Zahlen immer gleich vielmal, hier zweymal größer, bey der andern auch gleich vielmal, hier dreymal kleiner. Die geometriſche Progreſſion entſtehet aus der continuirlichen geometriſchen Proportion. Wir haben im 268 §. eine allgemeine Formel für alle mögliche continuirliche geometriſche Proportionen gegeben: ſie war $a : am = am : am^2$. Wenn man nun immer die beyden letzten Glieder der Proportion wieder zu den erſten Gliedern einer neuen continuirlichen Proportion machet, und ſo immer fortfähret, ſo werden ſich die Glieder der Proportion alſo verhalten: das 1ſte zum 2ten, wie das 2te zum 3ten, das 2te zum 3ten, wie das 3te zum 4ten u. ſ. w. Die Proportionen würden denn folgende ſeyn.

a:

$a : am = am : am^2$, ferner $am : am^2 = am^2 : am^3$, ferner $am^2 : am^3 = am^3 : am^4$ u ſ. w. Weil man immer die beyden letzten Glieder wiederholet, ſo könnte man das auch alſo ausdrücken.

$a : am = am : am^2 = am^2 : am^3 = am^3 : am^4$ u. ſ. w Nimmt man hier die erſten beyden gegebenen Glieder, und die Glieder, die denn immerfort dadurch gefunden werden, und ſetzet die in eine Reihe, ſo bekömmt man folgende Reihe:

$a, am, am^2, am^3, am^4, am^5, am^6, am^7$ u. ſ. w. da die m immer um eine Potenz ſteigen, und da jedes Glied, laut der Definition, um **gleich vielmal größer** oder **kleiner** iſt. Denn man nehme m an wie man will, ſo ſiehet man, daß das nächſte Glied immer mit einem m mehr als das vorhergehende multipliciret iſt. In der Proportion hieß dieſes m der **Exponens** des Verhältniſſes, und bey der Progreſſion heißt er es auch. Es iſt die Größe, die angezeigt, um **wie vielmal** jedes Glied größer oder kleiner wird. Wenn wir mal dieſe Reihe in Zahlen verwandeln wollen, ſo werden wir deſto ſinnlichere Begriffe davon bekommen.

Es ſey alſo $a = 1$ und $m = 2$, ſo wäre die Reihe:

1, 1.2, 1.2.2, 1.2.2.2. 1, 2.2.2.2, 1, 2.2.2.2.2, u. ſ. w. wo man deutlich ſiehet, wie hier die Glieder immer **gleich vielmal** größer werden, weil jedes Gliede mit einer 2 mehr multipliciret wird. Würklich multipliciret wäre, die Reihe:

1, 2, 4, 8, 16, 32 u. ſ. w.

Wäre aber a wieder = 1 und m oder der Exponens = $\frac{1}{2}$, ſo wäre die Reihe:

$1,\ 1 \cdot \frac{1}{2},\ 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},\ 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ u. ſ. w.

oder $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}$ u. ſ. w.

Wenn in einer geometriſchen Progreſſion die Glieder immer größer werden, ſo heißt ſie eine ſteigende Reihe; wenn ſie immer kleiner werden, ſo heißt ſie eine fallende Reihe. Sie wird ſteigend, wenn der Exponent oder das m größer als 1 iſt, es ſey nun eine ganze Zahl oder ein unächter Bruch. Sie wird fallend, wenn der Exponens kleiner als 1, alſo ein ächter Bruch iſt. Wäre aber der Exponens = 1, ſo würde ſie ſich gar nicht verändern, ſondern die Glieder würden immer gleich groß bleiben. Wir haben hievon ſchon hin und wieder etwas erwähnet.

§. 287. Wir wollen nochmals die Progreſſion allgemein betrachten, um verſchiedene wichtige Eigenſchaften in ihr zu entdecken.

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{am},\ \overset{3}{am^2},\ \overset{4}{am^3},\ \overset{5}{am^4},\ \overset{6}{am^5},\ \overset{7}{am^6} \ldots$$

Wir haben die Glieder mit Zahlen bezeichnet. Wenn man nun die Reihe betrachtet, findet man, daß die Potenz des Exponenten allezeit um 1 kleiner iſt, als die Zahl des Gliedes. Z. E. im 6ten Gliede iſt die Potenz der m nur 5, im 4ten Gliede

Gliede 3, und ſo auf alle Fälle. Wenn wir alſo die Zahl der Glieder n nennen, ſo muß die Potenz des Exponens des letzten Gliedes oder des $n$ten Gliedes ſeyn, $n - 1$. Wäre z. E. die Zahl der Glieder 6, alſo $n = 6$, ſo müſte die Potenz des 6ten Gliedes ſeyn, $6 - 1$ oder 5. Alſo iſt auf alle Fälle das letzte Glied einer geometriſchen Progreſſion $= am^{n-1}$, wenn ganz allgemein die Zahl der Glieder n heißet. Weil nun in jedem nächſt vorhergehenden Gliede die Potenz des Exponenten immer um 1 kleiner iſt, ſo würde eine ſolche Reihe, allgemein betrachtet, alſo ausgedrückt werden.

$$a \; am \; am^2 \ldots\ldots \; am^{n-3} \; am^{n-2} \; am^{n-1},$$

oder wenn man die Reihe umkehrte, und das letzte Glied zuerſt ſetzte, ſo würde ein höchſt allgemeiner Ausdruck für alle geometriſche Proportionen folgender ſeyn.

$$am^{n-1},\; am^{n-2},\; am^{n-3},\; am^{n-4},\; am^{n-5} \text{ u. ſ. w.}$$

bis die Zahl ſo groß als n wäre, da wäre alsdenn am^{n-n} oder am^0, aber m^0 iſt $= 1$. §. 143. Alſo wäre denn das Glied $= a \cdot 1$ oder a, welches wir als das erſte Glied angenommen haben.

Wenn wir ferner die geometriſche Progreſſion nochmals betrachten:

$$a \; am \; am^2 \; am^3 \; am^4 \; am^5 \; am^6 \ldots$$

ſo werden wir auch finden, daß die beyden äußerſten, und immer zwey gleich weit

von

von beyden Enden abſtehende Glieder einerley Produkte geben. So iſt $a . am^6 = a^2m^6$, aber $am . am^5$ iſt auch $= a^2m^6$; ferner $am^2 . am^4 = a^2m^6$. Man kann dieſes in Zahlen leicht nachmachen. Es ſey $a = 3$, $m = 4$, ſo wäre die Progreſſion:

$$3,\ 3 \cdot 4,\ 3 \cdot 4^2,\ 3 \cdot 4^3,\ 3 \cdot 4^4,\ 3 \cdot 4^5$$
$$3,\ 12,\ 48,\ 192,\ 768,\ 3072 \text{ u.ſ.w.}$$

Nun die Produkte der durch die Striche hier zuſammengeſetzten Glieder ſind alle gleich, nemlich $= 9216$. Wenn man, wie wir gezeigt haben, ganz allgemein das erſte Glied a, und das letzte Glied am^{n-1} nennet, ſo wird allezeit das Produkt zweyer gleich weit von den Enden abſtehenden Glieder ſeyn, $a . am^{n-1} = a^2m^{n-1}$.

§. 288. Es folgen ſchon hieraus verſchiedene Auflöſungen von Aufgaben, die einem können gegeben werden.

Wenn das erſte Glied nebſt dem Exponens der Progreſſion und der Zahl der Glieder gegeben iſt, das letzte Glied zu finden. Es iſt, wie bekannt, das letzte Glied allezeit am^{n-1}. Es ſey $a = 3$, der Exponens $m = 2$ und der Glieder Anzahl oder $n = 17$, was wird das letzte Glied ſeyn? Es iſt $3 . 2^{17-1} = 3 . 2^{16}$, alſo muß 2 zur 16 Potenz erhoben, und dann mit 3 multipliciret werden. Es iſt dieſes auch durch die bloße Multiplikation nicht ſchwer, wenn

wenn man betrachtet, daß Potenzen multipliciren, ihre Exponenten addiren heißt, und alſo kann man folgender Geſtalt verfahren.

$2^1 . 2^1 = 2^2 = 4$, aber $2^2 . 2^2 = 2^4 = 4 . 4 = 16$. Ferner $2^4 . 2^4 = 2^8 = 16 . 16 = 256$. Und $2^8 . 2^8 = 2^{16} = 256 . 256 = 65536$, das noch mit 3 multiplicirt, giebt das letzte Glied = 196608. Wäre das erſtere Glied oder a = 1, ſo dürfte man nur den Exponens und die Zahl der Glieder wiſſen, um das letzte Glied zu finden, weil 1 nicht multipliciret. Wir wollen doch auch ein Exempel geben, wenn die Reihe fällt, und alſo der Exponens ein Bruch iſt. Es ſey a = 2, m = $\frac{1}{3}$, und der Glieder 7 oder n = 7, ſo iſt das letzte Glied = am^{n-1}, ſtatt deſſen die Zahlen geſetzt, hier = 2.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = 2 . \frac{1}{3^6}$ aber $= 2 . \frac{1}{3^6}$, iſt $= \frac{2 . 1}{729}$, alſo wäre das letzte Glied $= \frac{2}{729}$ welcher Bruch ſich nicht kleiner machen läßt.

Die Reihe ſelbſt, wäre

$2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{243}, \frac{2}{729}$.

Wäre das letzte Glied die Zahl der Glieder und der Exponens gegeben, ſo läßt ſich auch das erſtere finden. Es ſey das letztere Glied mit einem ganz allgemeinen Namen benennet = b, ſo wäre $am^{n-1} = b$. Hier iſt nun alles bekannt außer a,

alſo

alſo: $am^{n-1} = b$

$$\frac{am^{n-1}}{m^{n-1}} = \frac{b}{m^{n-1}}$$ Gleiches mit Gleichem dividiret, bleibt Gleiches.

oder $a = \frac{b}{m^{n-1}}$

Wenn man alſo das letzte Glied mit dem Exponenten, der in eine Potenz weniger erhoben iſt, als die Zahl der Glieder iſt, dividiret, ſo hat man das erſte Glied. Es ſey das letzte Glied einer Progreſſion 18, alſo $b = 18$. Der Glieder ſollen 5 ſeyn, alſo $n = 5$, und der Exponens 2, alſo $m = 2$, ſo iſt das erſte Glied $a = \frac{18}{2^{5-1}} = \frac{18}{2^4} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$, alſo die Reihe würde alſo fortgehen, $\frac{9}{8}$, $\frac{18}{8}$, $\frac{36}{8}$, $\frac{72}{8}$, $\frac{144}{8}$ oder was ſich dividiren läßt, dividiret.

$\frac{9}{8}$, $2\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, 9, 18....

Ferner, wenn man das erſte und zweyte Glied einer geometriſchen Progreſſion weis, ſo kann man die folgenden ſehr leicht finden. Denn, wenn man das zweyte Glied durch das erſtere dividiret, ſo bekömmt man den Exponenten der Progreſſion, und mit dem multipliciret man jedes Glied, ſo bekömmt man das folgende, und ſo bekömmt man ſie alle. Das erſtere Glied ſey allgemein $= a$, das zweyte allgemein am, ſo

giebt $\frac{am}{a}$ zum Quotienten m, als den Exponens.

Hiernach kann man nun leicht alle folgende Glieder der Progreſſion, ſie ſey ſteigend oder fallend, finden. Exempel. Das erſte Glied ſey = 4, das zweyte = 9, ſo wäre der Exponens = $\frac{9}{4}$ oder Neunviertel, damit jedes Glied multipliciret, nemlich nun erſt 9 mit $\frac{9}{4}$ multipliciret, das giebt das dritte Glied $20\frac{1}{4}$, dieſes wieder mit $\frac{9}{4}$ multipliciret, giebt das vierte Glied, u. ſ. w. ſo wäre die Progreſſion 4, 9, $20\frac{1}{4}$, $45\frac{9}{16}$, $102\frac{33}{64}$ u. ſ. w. Das erſte Glied ſey 5, das andere 1, ſo wäre der Exponens $\frac{1}{5}$, und die Progreſſion 5, 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$ u. ſ. w.

Wenn das erſte Glied einer Progreſſion nicht = 1 iſt, ſo kann man es leicht dazu machen, wenn man nur alle Glieder durch das erſte Glied dividiret. Man erhält alsdenn eine Reihe, die eben den Exponenten hat, und die mit der vorigen von einerley Verhältniß iſt. Es ſey die Reihe allgemein:

$$a, am, am^2, am^3, am^4, am^5 \text{ u. ſ. w.}$$

dividiret durch a wird ſie: 1, m, m^2, m^3, m^4, m^5, u. ſ. w. und man bekömmt alsdenn blos Potenzen der m, und man kann alſo, was das Verhältniß der Reihen anbetrift, alle Reihen auf ſolche reduciren, deren erſtes Glied = 1 iſt. Exempel. Es ſey die Reihe:

2, 6, 18, 54, 162, 486, u. ſ. w.

Hier iſt der Exponens = 3. Alle Glieder mit 2

divi-

dividiret, giebt das erſte Glied = 1, und folgende Reihe:

1, 3, 9, 27, 81, 243, u. ſ. w. welches Potenzen der 3 ſind.

§. 289. Wir fügen noch einige Aufgaben hinzu, die ſich jetzt leicht auflöſen laſſen. Man kann bey einer geometriſchen Progreſſion auch die mittlern Glieder finden, wenn die äußerſten bekannt ſind, das heißt, zwiſchen zwey gegebenen Zahlen eine oder mehrere continuirliche Porportionalzahlen finden. Ehe man aber dieſes durchlieſet, erinnere man ſich, was §. 145. von den Größen, wo ein Radixzeichen √ vorkommt, nur vors erſte beyläufig geſagt iſt.

Sind zwey Zahlen gegeben, wozwiſchen man ein oder mehrere continuirliche Proportionalzahlen finden ſoll, ſo ſind die das erſte und letzte Glied einer geometriſchen Progreſſ ion. Wir wollen, weil ſie bekannt ſind, die erſtere Zahl = a und die letztere = b nennen. Nun wollen wir erſtlich eine mittlere Proportionzahl dazwiſchen ſuchen, ſie ſey = x; die Progreſſion wäre alſo a, x, b. Nun iſt bekannt, daß die Produkte der äußerſten, und zweyer gleich weit von den Enden abſtehenden Glieder einander gleich ſind, §. 287. weil aber x eben in der Mitte ſteht, ſo ſteht es von beyden Enden gleich weit ab, und muß alſo nach der Regel mit ſich ſelbſt multipliciret werden, denn es würde gelten $a : x = x : b$

und $ab = x^2$

also: $a.b = x.x$ oder $ab = x^2$

Wenn man aus zwey gleichen Größen den √ auszieht, müſſen die √ gleich ſeyn. $\sqrt{ab} = \sqrt{x^2}$ oder $= x$ Aber da wir das noch nicht gelernet haben, den √ auszuziehen, ſo müſſen wir uns mit dem Zeichen begnügen. Wir wollen aber doch einmal ein Exempel in Zahlen geben. Das erſte Glied oder a ſey $= 4$, das letzte $b = 9$, ſo wird das mittlere Glied $= \sqrt{4.9}$ oder $x = \sqrt{36}$, welches 6 iſt, und die Progreſſion wäre 4, 6, 9, davon der Exponens $= \frac{3}{2}$ iſt. Es kann aber ſeyn, und kömmt ſehr ofte vor, daß man zwiſchen zwey Zahlen mehr als eine continuirliche Proportionalzahl haben will; z. E. man wollte drey continuirliche Proportionalzahlen dazwiſchen haben. Die beyden gegebenen Zahlen, die erſte ſoll $= a$, die letzte $= b$ ſeyn. Nun wollen wir erſt Ausdrücke für die andern Glieder finden, die wir noch ſuchen ſollen, welches wir nach der Proportionsregel finden können. Das erſtere von den zu findenden Gliedern ſey $= x$, ſo iſt nach §. 286. wie eine Progreſſion entſteht:

$$a : x = x : \frac{x^2}{a}$$

Ferner: $x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2}$.

alſo die Progreſſion wäre $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, b.$

Nun ſind nach §. 287. die Produkte der äußerſten

und

und gleich weit von den Enden abſtehenden Glieder gleich,

alſo: $ab = x \cdot \frac{x^3}{a^2}$ oder $ab = \frac{x^4}{a^2}$.

$\cdot a^2$

Gleiches mit Gleichem multipliciret $a^3b = x^4$

nach §. 145. das √zeichen geſetzet $\sqrt[4]{a^3b} = \sqrt[4]{x^4} = x^{\frac{4}{4}} = x$. Man müſte alſo aus a^3b den vierfachen Radix ziehen, um x zu haben. Man ſiehet bald, daß man dann alle folgende Glieder durch die bloße Multiplikation haben kann. Wir wollen doch ein Exempel geben, und weil wir, den √ auszuziehen, noch nicht gelernet haben, es ſo einrichten, daß man es gleich ſehen kann.

Das erſte Glied oder a ſey = 1, und das letzte b = 81, ſo iſt, wenn man drey mittlere Glieder ſuchet, das erſtere davon oder $x = \sqrt[4]{1^3 . 81}$, und weil 1 immer 1 bleibet, $x = \sqrt[4]{81}$, welches 3 iſt; denn, wenn man 3 zur vierten Potenz erhebet, ſo wird es = 81 ſeyn, alſo muß auch der vierfache √ des 81 = 3 ſeyn. Die Reihe iſt alſo 1, 3, 9, 27, 81. Auf eine ähnliche Art, nemlich durch Ausziehen der Wurzel kann man auch das erſte und letzte Glied finden, wenn das Produkt der beyden äußerſten Glieder, die Zahl der Glieder und der Exponens gegeben iſt. Es ſey das Produkt der beyden äußerſten Glieder bekannt, und = f; der Exponens bekannt = m: die Zahl der Glieder bekannt = n; das erſte Glied unbekannt = x; das letztere unbe-

bekannt $=y$; ſo muß das Produkt der beyden äußerſten Glieder

$f = xy$ ſeyn

$:x$ Gleiches mit Gleichem dividiret

$\frac{f}{x} = y.$

aber da das erſte Glied $= x$, ſo iſt nach §. 287. auch das letzte Glied, oder nun kann man Gleiches für Gleiches ſetzen, alſo

$xm^{n-1} = y$

$\frac{f}{x} = xm^{n-1}$

$.x$ Gleiches mit Gleichem multipliciret.

$f = x^2 m^{n-1}$

$:m^{n-1}$ Gleiches mit Gleichem dividiret.

$\frac{f}{m^{n-1}} = x^2$

den $\surd$ nach §. 210 ausgezogen aus beyden Größen.

$\frac{\surd f}{\surd m^{n-1}} = \surd x^2 = x$

Hat man x oder das erſte Glied, ſo läßt ſich y oder das letzte leicht finden, es iſt nach §. 287 $= xm^{n-1}$ oder auch noch hier $= \frac{f}{x}$, weil, wie wir geſehen haben, $\frac{f}{x} = xmn^{-1}$ und x wiſſen wir nun.

Exempel, es ſey das Produkt der beyden äußerſten Glieder oder $f = 49$, der Exponens oder $m = 2$, die Zahl der Glieder oder $n = 5$; ſo wäre

wäre x oder das erſte Glied $= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^{5-1}}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}$. Hieraus können wir leicht die Wurzel ausziehen, ob wir ſchon dieſes Kapitel noch nicht erkläret haben, weil beyde Größen ſich noch im Einmal eins befinden, alſo $= \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$, und das letzte Glied wäre $= \frac{f}{x} = \frac{49}{\frac{7}{4}} = 49 \cdot \frac{4}{7} = \frac{196}{7} = 28$.

Da $m = 2$, ſo gienge die Reihe alſo fort, $\frac{7}{4}, \frac{14}{4}, \frac{28}{4}, \frac{56}{4}, \frac{112}{4}$ oder $1\frac{3}{4}, 3\frac{1}{2}, 7, 14, 28$.

Man wird gut thun, ſich in ſolchen Exempeln zu üben, wenn wir erſt die Lehre von würklicher Ausziehung der Wurzeln weitläuftiger vorgetragen haben.

§. 290. Alle Glieder einer geometriſchen Progreſſion zuſammen machen eine Summe aus; wären nun die Glieder gegeben, oder man könnte ſie aus obigen Datis finden, ſo würde man die Summe der Glieder finden können, wenn man ſie alle zuſammen addirte. Das wäre aber bey Progreſſionen, die viel Glieder hätten, herzlich weitläuftig. Wir wollen daher eine kürzere Methode lehren. Um die Summe einer geometriſchen Progreſſion zu finden, muß man das erſte und das letzte Glied, imgleichen den Exponenten kennen. Es kann dieſes alles gegeben ſeyn, oder man kann es auch nach den Aufgaben der vorhergehenden Paragraphen ſuchen müſſen. Genug, dieſe Stücke, als bekannt, werden zu der Formel,

welche wir für die Summe angeben wollen, erfordert. Wir wollen nun die Summe der Progreſſion ganz allgemein ſuchen.

Es ſey nun das erſte Glied = a, ſo iſt das letzte am^{n-1}, wenn die Anzahl der Glieder = n iſt. Es wird alſo S oder die Summe aller Glieder ſeyn

$$S = a + am + am^2 + am^3 \ldots + am^{n-2} + am^{n-1} \text{ §. 287.}$$

——————————————————————. m

oder die Reihe, das iſt, alle Glieder derſelben mit m multipliciret, ſo wird daraus folgende:

$$mS = am + am^2 + am^3 + am^4 \ldots + am^{n-1} + am^n \text{ §. 92.}$$

Alſo wird jedes Glied um eine Potenz der m größer, und daher das letzte am^{n-1}, wenn es mit m multipliciret wird, $am^{n-1+1} = am^n$ §. 92.

Nun ſubtrahire man beyde Reihen von einander, und weil man nur Gleiches von Gleichem ſubtrahiren kann, ſo muß man die Glieder von dem Werthe, was S iſt, unter diejenigen von mS ſetzen, die ihnen gleich ſind, alſo:

$$\begin{array}{l} mS = am + am^2 + am^3 + am^4 \ldots + am^{n-1} + am^n \\ \quad S = a + am + am^2 + am^3 + am^4 \quad + am_n^{-1} \\ \hline mS - S = -a \qquad\qquad\qquad + am^n \end{array}$$

Und wenn es alſo würklich ſubtrahiret iſt, ſo wird $mS - S = -a + am^n$ oder $am^n - a$, denn am^n war noch das einzige von den obern Gliedern, das nicht Null ward, weil die untere Reihe von der obern abgezogen wurde, imgleichen konnte das ein-

einzige darin befindliche a nur abgezogen werden. Alſo $mS - S = am^n - a$, oder beſſer ausgedrückt, welches man finden wird, wenn man würklich multipliciret.

$$(m-1)S = am^n - a$$

$$\frac{(m-1)S}{m-1} = \frac{am^n - a}{m-1}$$

Gleiches durch Gleiches dividirt, nemlich durch $m-1$ oder weil $m-1$ ſich gegen $m-1$ bey S hebet.

$$S = \frac{am^n - a}{m-1}$$

Dieſes S oder die Summe ſuchten wir aber, und man ſiehet, wie leicht und natürlich ſie gefunden iſt. Die Summe einer geometriſchen Progreſſion wird alſo gefunden, wenn man das erſte Glied mit dem Exponenten, der in die ſo vielſte Potenz, als die Zahl der Glieder iſt, erhoben iſt, multipliciret, von dieſem Produkte das erſte Glied abziehet, und alsdenn den Reſt durch den Exponenten, von dem man vorher 1 abziehet, dividiret.

Exempel. Man wollte die Summe folgender geometriſchen Progreſſion wiſſen, da die Glieder

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

Den Exponens haben wir gelehret §. 288. zu finden, er iſt hier $= 2$. Der Glieder ſind 9, alſo iſt hier $a = 1$, $m = 2$, $n = 9$, und daher die Summe aller Glieder oder $S = \frac{1 \cdot 2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{1} = 2^9 - 1$, aber 2 in die neunte Potenz zu erheben, kann man alſo leicht machen:

2
2

4 2 Potenz
4 2 Potenz

16 4 Potenz
16 4 Potenz

96
16

256 8te Potenz
2 1ſte Potenz

512 9te Potenz, weil Potenzen multipliciren, ihre Exponenten addiren heiſt.

alſo $2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$. Welches die Summe aller Glieder iſt.

Es ſey gegeben das erſte Glied 3, die Zahl der Glieder 10, der Exponens $\frac{3}{2}$, ſo wäre die Summe der ganzen Progreſſion $S = \frac{3 \cdot (\frac{3}{2})^{10} - 3}{\frac{3}{2} - 1}$ wenn $\frac{3}{2}$ in die zehnte Potenz erhoben iſt, alſo $\frac{3}{2}$ zehnmal, Zähler und Nenner mit ſich ſelbſt multipliciret, ſo iſt $(\frac{3}{2})^{10} = \frac{59049}{1024}$.

alſo: $S = \frac{3 \cdot \frac{59049}{1024} - 3}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{177147}{1024} - 3}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\frac{177147 - 3072}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{174075}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{174075}{1024} \cdot \frac{2}{1} = \frac{348150}{1024}$

$= 339\frac{1014}{1024} = 339\frac{507}{512}$, welches die Summe der Progreſſicn iſt.

Die

Die Reihe würde folgende ſeyn.

$$3,\ \tfrac{9}{2},\ \tfrac{27}{4}\ \ldots\ldots\ 115\tfrac{169}{512},$$

$$\text{oder}\ 3,\ 4\tfrac{1}{2},\ 6\tfrac{3}{4}\ \ldots\ldots\ 115\tfrac{169}{512}.$$

Exempel bey einer fallenden Reihe. Das erſte Glied ſey 8, der Exponens $\frac{2}{3}$, die Zahl der Glieder 7, alſo: $S = \frac{am^n - a}{m - 1}$ hier $= \frac{8(\frac{2}{3})^7 - 8}{\frac{2}{3} - 1}$ wenn man nun $\frac{2}{3}$ würklich zur ſiebenten Potenz erhebet, das iſt $\frac{2^7}{3^7}$ und mit 8 multipliciret, ſo iſt

$$= \frac{8 \cdot \frac{128}{2187} - 8}{\frac{2}{3} - \frac{3}{3}} = \frac{\frac{1024 - 17496}{2187}}{-\frac{1}{3}}$$

$= -\frac{16472}{2187} \cdot -\frac{3}{1}$ würklich bey Minusgrößen multipliciret $= + \frac{49416}{2187} = 22\frac{1302}{2187}$, welches die Summe der ganzen Reihe iſt, die Reihe ſelbſt wäre:

$$8,\ 5\tfrac{1}{3},\ 3\tfrac{5}{9}\ \ldots\ldots\ \tfrac{512}{729}.$$

Wenn man 1) die Summe = S, 2) das erſte Glied a, 3) das letzte b, 4) den Exponenten m, 5) und die Zahl der Glieder n kennet, und von dieſen fünfen drey Stücke gegeben ſind, ſo laſſen ſich die übrigen zwey allezeit daraus finden. Einige davon haben wir oben ſchon gehabt, einige werden logarithmiſch aufgelöſet, weil wir aber das noch nicht wiſſen, müſſen wir es verſparen, bis wir die Logarithmen und Gleichungen erklärt haben, da es denn jeder ſelbſt leicht auflöſen wird.

§. 291. Man kann ſich auch Progreſſionen vorſtellen, die bis ins Unendliche fortgehen

und

und die Frage aufwerfen, ob deren Summe gefunden werden könnte. Sie kann gefunden werden, wenn die Reihe fällt, welches geſchiehet, wenn der Exponente kleiner als 1, alſo ein würklicher Bruch iſt, denn alsdenn werden endlich die Glieder ſo klein, daß ſie für nichts zu achten ſind. Iſt der Exponens aber größer als 1, ſo werden die Glieder immer größer, und endlich bey unendlichen Reihen unendlich groß. Solcher Reihe Summe iſt nicht zu finden, wie die Natur der Sache ſchon lehret. Wenn die Reihen fallen, alſo der Exponens ein Bruch iſt, ſo hat man unendliche Reihen, da die Glieder alle plus ſind, und andere, da die Zeichen abwechſeln. Für beyde wollen wir allgemein die Formeln und die Beweiſe davon geben.

Erſtlich, wo alle Zeichen plus ſind. Es ſey das erſte Glied $=a$, der Exponens der Progreſſion ein ächter Bruch $=\frac{b}{c}$; mehr darf ich nicht wiſſen, und mehr kann ich auch nicht wiſſen;

So wird die Reihe ſeyn:

$$a+\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}\ldots\ldots$$ bis ins Unendliche.

alſo ihre Summe, oder

$$S=a+\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}+\frac{ab^5}{c^5}\ldots\ldots$$ bis ins Unendliche.

Wir wollen nun beydes, ſowol S als die Glieder der

der Reihe mit $\frac{b}{c}$ multipliciren, ſo bleibt es doch gleich, alſo:

$$S.\frac{b}{c} = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5} + \frac{ab^6}{c^6} \ldots$$ bis ins Unendliche.

Hier wird bey jedem Gliede, wenn man ſie auch bis ins Unendliche gedenket, die Potenz von b und c immer um 1 größer.

Wollen wir nun $S.\frac{b}{c}$, das kleiner iſt, weil es mit einem Bruch multipliciret iſt, abziehen, und gleiche Glieder unter einander ſetzen, das läßt ſich wenigſtens bis ins Unendliche gedenken, alſo:

$$S = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5} + \frac{ab^6}{c^6} \ldots$$

$$S.\frac{b}{c} = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5} + \frac{ab^6}{c^6} \ldots$$

folglich

$S - S\frac{b}{c} = a$, das andere geht gegen einander auf:

Folglich

Folglich dieſes ſchicklicher ausgedrückt:

$$\left(1-\frac{b}{c}\right)S=a$$

Gleiches mit Gleichem dividiret, beydes mit $\left(1-\frac{b}{c}\right)$

$$S=\frac{a}{1-\frac{b}{c}}$$

oder wenn 1 auch zum Bruche gemacht wird.

$$S=\frac{a}{\frac{c-b}{c}}$$

welches auch alſo kann ausgedrückt werden.

$$S=a:\frac{c-b}{c}$$

den Bruch umgekehrt §. 218.

$$S=a.\frac{c}{c-b}$$

oder

$$S=\frac{ac}{c-b}$$

Man findet alſo die Summe einer unendlichen Progreſſion, wo die Zeichen plus ſind, wenn man das erſte Glied mit dem Nenner des Exponenten mulpliciret, und dieſes Produkt durch den Nenner, wovon der Zähler abgezogen, dividiret. Exempel. Man ſuche die Summe der unendlichen Reihe, die alſo fortgehet:

$3, 2, 1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}\ldots$ und ſo ins Unendliche.

Hier

Hier iſt das erſte Glied oder $a = 3$, der Exponens oder der Bruch $\frac{2}{3} = \frac{b}{c}$, denn wenn man mit $\frac{2}{3}$ multipliciret, ſo iſt das Produkt 2, welches das zweyte Glied iſt, alſo $b = 2$, und $c = 3$, alſo $= \frac{ac}{c - b}$.

Hier $= \frac{3}{3} - \frac{3}{2} = \frac{9}{1} = 9$.

Dieſes iſt die Summe dieſer unendlichen Reihe. Ferner die Summe von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, 1, $\frac{1}{64}$, und ſo ins Unendliche fort.

Hier iſt $a = \frac{1}{2}$, der Exponens oder $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$ alſo $b = 1$ und $c = 2$.

Daher $S = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2 - 1} = \frac{\frac{2}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$ die Summe davon iſt $= 1$.

Die Summe von $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{25} + \frac{12}{125}$ ... und ſo ins Unendliche.

Da iſt $a = \frac{3}{5}$; $\frac{b}{c} = \frac{2}{5}$ folglich $b = 2$, und $c = 5$

und die Summe $= \frac{\frac{3}{5} \cdot 5}{5 - 2} = \frac{\frac{15}{5}}{3} = \frac{3}{3} = 1$, alſo die Summe der unendlichen Reihe $= 1$.

Wenn die Zeichen abwechſeln, ſo kann man bey fallenden Reihen gleichfalls eine Formel für die Summe derſelben finden. Es ſey abermals das erſte Glied $= a$, und der Exponens ein ächter Bruch

Bruch $= \frac{b}{c}$, ſo wird die ganze Summe der unendlichen Reihe oder

$$S = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots\ \text{bis ins Unendliche.}$$

Man multiplicire die ganze Reihe mit $\frac{b}{c}$, dadurch wird jedes Glied bis ins Unendliche eine Potenz von $\frac{b}{c}$ höher, alſo:

$$S.\frac{b}{c} = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5} \ldots\ \text{bis ins Unendliche.}$$

Man addire zu der Reihe, die zu S gehöret, die Reihe, die zu $S.\frac{b}{c}$ gehöret, und ſetze gleiche Glieder unter einander. Alſo:

$$S = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots$$

$$S.\frac{b}{c} = + \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \ldots$$

$S + S.\frac{b}{c} = a$ denn ſonſt bleibt nichts übrig.

Das ſchicklicher ausgedrückt $\left(1 + \frac{b}{c}\right) S = a$ oder $\left(\frac{c+b}{c}\right) . S = a.$

Man

Man dividire beydes durch $\frac{c+b}{c}$, ſo bekömmt man $S = \frac{a}{\frac{c+b}{c}} = \frac{a \,.\, c}{c+b}$ §. 218. welcher letztere Ausdruck die Summe ſolcher Reihe bequem anzeiget.

Exempel. Die Reihe ſey:

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} \ldots$ u. ſ. w.

Hier iſt $a = \frac{3}{4}$ der Exponens, oder $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$, alſo $b = 2$, $c = 3$; alſo $S = \frac{\frac{3}{4} \,.\, 3}{3+2} = \frac{\frac{9}{4}}{5} = \frac{9}{4} \,.\, \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$. welches letztere die Summe anzeiget.

Es ſey die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ u. ſ. w. Hier iſt $a = 1$; $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, alſo $b = 1$ und $c = 2$. folglich $S = \frac{1 \,.\, 2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

§. 292. Ehe wir dieſes Kapitel von der geometriſchen Progreſſion beſchließen, wollen wir dieſe Lehre noch durch ein Exempel, das aus dem gemeinen Leben hergenommen iſt, erläutern.

Ein Mann vermachet in ſeinem Teſtamente ſein Vermögen an 5 Erben, und zwar alſo, daß der erſte Erbe 1500 rthlr., und jeder der folgenden $1\frac{1}{2}$mal ſo viel, als der vorhergehende bekommen ſoll. Es wird gefraget, wie groß das ſämmtliche

Vermögen geweſen, und wie viel jeder bekommen?

Dieſes iſt eine geometriſche Progreſſion, deren Glieder = 5; denn ſo viel ſind Erben; deren Exponens = $1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ iſt; denn der folgende ſoll allezeit $1\frac{1}{2}$ ſo viel haben, als der vorhergehende. Das erſte Glied iſt 1500, daraus läßt ſich nun die Summe derſelben finden, welches die Auflöſung der erſten Frage iſt. Sie iſt nach §. 290. nach der dortigen Formel $S = \frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{1500(\frac{2}{3})^5 - 1500}{\frac{3}{2} - 1}$ wenn man $\frac{3}{2}$ zur fünften Potenz erhebet, welches alsdenn $\frac{243}{32}$ iſt, ſo iſt es $= \frac{1500 \cdot \frac{243}{32} - 1500}{\frac{3}{2} - 1}$

$$= \frac{9890\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}} = 9890\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{1} = 19781\frac{1}{4} \text{ rthl.}$$

Dieſes iſt das ganze Vermögen. Die Progreſſion ſelbſt geht alſo fort: $1500 + 1500 \cdot \frac{3}{2} + 1500(\frac{3}{2})^2 + 1500(\frac{3}{2})^3 + 1500(\frac{3}{2})^4 = 1500 + 2250 + 3375 + 5062\frac{1}{2} + 7593\frac{3}{4}$, welches auch die Theile der Erbſchaft ſind.

§. 293. Nach dieſem Kapitel wäre nun die Stelle, wo wir von ſolchen unendlichen Decimalbrüchen reden könnten, deren Summe man leicht finden, und ſie alſo in gewöhnliche Brüche verwandeln kann. Es ſind ſolche, deren Zahlen gleich ſind, alſo z. E. 0,33333.... oder immer wiederkommen, als z. E. 0,296296296, welcher erſtere = $\frac{1}{3}$ und der letztere = $\frac{8}{27}$ iſt, allein wir würden

würden für ſolche Leſer und Lernende, denen dies Buch beſtimmt iſt, zu weitläuftig werden, und ſie zu ſehr überhäufen. Aus eben dem Grunde unterlaſſen wir auch, von verſchiedenen andern Arten der Proportion und Progreſſion, als der **harmoniſchen, contraharmoniſchen** ꝛc. zu reden; ſie kommen ſo ofte nicht vor, und wer dieſe Gründe gefaſſet hat, wird ſie bey fernerm Studiren leicht lernen. Wir könnten hier auch noch von verſchiedenen Arten der Rechnung, als der Interesrechnung, Rabatrechnung, dem Leibnitziſchen Interuſurium, Leibrentenrechnung reden; aber das würde uns nach unſerer Abſicht viel zu weit führen, und unſere Leſer zu ſehr überhäufen. Wenn ſie dieſe Gründe erſt recht gelernet haben, werden ſie die Theorie dieſer Rechnungen aus andern Schriftſtellern leicht begreifen können.

Von der Summirung der unendlichen Decimalbrüche und Interesrechnung werden ſie in des großen Herrn Eulers teutſchen Algebra einen ſehr deutlichen Begriff erlangen. Wir wenden jetzt noch, ehe wir weiter gehen, ein kurzes Kapitel zu der Erklärung der Ausdrücke des unendlichen an, weil es doch hier würklich auf Verhältniſſe ankömmt, und dieſe Art der Ausdrücke öfters vorkommen, und wir hier am bequemſten etwas von ihrer Theorie vorzutragen glauben. Wir werden nur ſo viel davon anführen, damit man einen kleinen Begrif davon bekömmt, und damit unſere Leſer, wenn ſie ſelbige zuweilen in mathematiſchen oder phyſicaliſch-mathematiſchen Schriften antreffen, ſelbige verſtehen können.

Das vierzehnte Kapitel.

Von den Ausdrücken des Unendlichen.

§. 294. Eigentlich und im ſtrengen Verſtande giebt es keine Zahl oder Größe, die würklich unendlich groß, oder auch würklich unendlich klein ſey, denn man mag ſich eine Zahl ſo groß vorſtellen, als man will, ſo kann man ſich doch auch zugleich vorſtellen, daß ſie noch kann dreyfach, vierfach u. ſ. w. genommen werden, oder auch durch die Addition könne vermehret werden. Eben ſo mag man ſich eine Zahl gedenken, ſo klein als man will, ſo geht es doch noch immer an, daß man ſie in Gedanken theilen, oder noch etwas davon abnehmen könnte. **Unendlich groß** oder **unendlich klein** ſind daher uneigentliche Ausdrücke, welche anzeigen, daß eine Sache ſo zugenommen habe und gewachſen ſey, oder daß man ſie ſo groß gedenke, daß ſie mit keiner andern Größe könnte verglichen werden, ſondern alle Größen, die man nur gedenken kann, gegen ſie als nichts zu achten ſind und verſchwinden; ſo, daß ſie in der Rechnung ausgeſtrichen werden können. Man kann ſich doch alſo in Gedanken vorſtellen, daß eine Zahl oder Größe alſo zunehme, daß ſie ſich endlich einer Größe immer mehr näherte, über welche nichts größer werden könnte, und es hieße eine ſolche Zahl, eine **unendlich** große Zahl oder Größe. Man kann

ſich eine Linie gedenken, die von einen Orte, von A durch B

A———B——— immer bis ohne Ende fortgehen würde, und das heißt eine **unendlich große Linie.** Und wenn man zwey Linien ſich gedenket, die immer in gleicher Entfernung neben einander fortlaufen, ſo, daß ſie nie einander näher kommen, ſo heißt das, ſie erreichen einander in einer **unendlichen** Entfernung, das heißt niemals. Das Zeichen, wodurch man gewöhnlich eine unendliche Größe anzeigt, iſt (∞).

§. 295. Man kann ſich gleichfalls vorſtellen, daß eine Größe immer abnehme, ſo daß ſie endlich ſo klein wird, kleiner als ſich etwas gedenken läßt, und das heißt eine **unendlich kleine Größe**, die ſo klein wird, daß ſie gegen alle andere Größen verſchwindet, und in der Rechnung als nichts angeſehen werden kann. Eine ſolche Größe nähert ſich dem **Nichts** oder der 0 beſtändig, und wenn man ſie ſich ſo vorſtellet, daß ſie nun ſo klein iſt, als je eine Größe, die ſich gedenken läßt, ſo heißt ſie unendlich klein, und wird als 0 betrachtet, indem ſie nun der 0 unendlich nahe iſt. Die Bezeichnung dieſer unendlich kleinen Größe, kann wie die einer unendlich großen Größe auf mancherley Art vorgeſtellet werden, indeſſen zeiget dieſer Ausdruck $\frac{1}{\infty}$ allezeit eine **unendlich kleine** Größe an.

§. 296. Ein Bruch, er ſey ächt oder unächt, wird eine **unendlich große** Größe, wenn ſein Zähler endlich, ſein Nenner aber unendlich klein oder gar = 0 iſt. Man ſtelle ſich einen Bruch vor, welchen man wolle, ſein Zähler ſoll allgemein a, und ſein Nenner z heißen, alſo der Bruch wäre $\frac{a}{z}$ und a wäre der Dividendus und z der Diviſor, das gäbe einen Quotienten, den wollen wir = q nennen. Es iſt offenbar, wenn z oder der Diviſor halb ſo klein wird, ſo wird der Quotient oder q nochmal ſo groß; iſt z oder der Diviſor viermal, zehnmal, hundertmal ſo klein, ſo wird der Quotient oder q, viermal, zehnmal, hundertmal ſo groß. Z. E. es wäre a = 8, z = 4, ſo wäre $\frac{8}{4} = 2$ oder q = 2. Es ſey z nun halb ſo groß, ſo iſt alsdenn $\frac{8}{2} = 4$, alſo der Quotient nochmal ſo groß. Es ſey z zehnmal ſo klein, alsdenn iſt das z, das ſonſt = 4 war = $\frac{4}{10}$, und $\frac{8}{0,4} = 20$. alſo q zehnmal ſo groß u. ſ. w. Nun kann man ſich ja z als unendlich klein gedenken, ſo muß ja q unendlich groß ſeyn. Je kleiner z wird, je mehr kann man ſich vorſtellen, daß es ſich der 0 nähert, und würde es ſelber 0, ſo muß man ſich q allerdings als unendlich groß vorſtellen, weil ja, ſo lange z noch als eine unendlich kleine Größe betrachtet wurde, der Quotient ſchon unendlich war, aber 0 iſt ja, wenn man ſo reden darf, unter allen unendlich kleinen Größen die kleinſte. Alſo die Ausdrücke $\frac{a}{\frac{1}{\infty}}$ oder auch $\frac{a}{0}$ zeigen eine unendli-

che

che Größe an, oder $\frac{a}{\frac{1}{\infty}} = \frac{a}{0} = \infty$. Wir haben §. 254 gezeiget, daß man jeden Bruch als ein Verhältniß zweyer Zahlen betrachten könnte. Man kann alſo den Ausdruck $\frac{a}{\frac{1}{\infty}}$ ſo betrachten, als die Verhältniß $a : \frac{1}{\infty}$. Nun mag ja a ſeyn was es will, ſo wird es immer unendlich groß ſeyn, gegen das unendlich Kleine. Eben ſo $\frac{a}{0}$ iſt das Verhältniß $a : 0$, und a mag ſeyn was es will, ſo iſt es immer unendlich groß gegen Null. Man kann alſo für a jede Zahl oder Größe ſetzen, es bleibt immer der Ausdruck des unendlich Großen, alſo $\frac{12}{0}$ oder $\frac{12}{\frac{1}{\infty}} = \infty$ oder auch $\frac{1}{\frac{1}{\infty}}$ oder $\frac{1}{0} = \infty$ Dieſen letzten Ausdruck findet man oft, das Unendliche auszudrücken. In der Lehre von Vergleichungen hat dieſes ſeinen wichtigen Nutzen, wo man für jede Größe, ſie ſey welche ſie wolle, wenn ſie endlich 0 zum Diviſor bekömmt, das ∞ ſetzet.

§. 297. Hingegen wird ein Bruch eine unendlich kleine Größe, welches ſo viel als Null iſt, und auch $= 0$ geſetzet wird, wenn ſein Zähler endlich, aber ſein Nenner unendlich groß wird. Es iſt dieſes eben ſo gut zu begreifen. Man nehme

eine Größe $= a$, die durch eine andere $= z$ dividiret wird. Alſo der Bruch ſey $\frac{a}{z}$, nun ſoll a immer bleiben, was es iſt, z aber immer größer werden. Wenn es nochmal ſo groß iſt, ſo iſt der Quotient ſchon nur halb ſo groß, iſt es 10mal ſo groß, ſo iſt der Quotient zehnmal kleiner u. ſ. w. Aber man kann ſich dieſes z doch ſo groß gedenken, daß man ſich vorſtellen kann, es könne nun nicht größer werden, und alsdenn muß der Quotient von $\frac{a}{z}$ unendlich klein ſeyn, und als 0 angeſehen werden. Z. E. es ſey $a = 8$, $z = 2$, ſo iſt q oder der Quotient von $\frac{a}{z} = \frac{8}{2} = 4$. Es wachſe die z und werde zur 4, ſo wird $q = 2$. Es wachſe die z bis auf 10000, ſo wird $q = \frac{1}{1250}$, und wenn nun z bis Millionen, Billionen, Trillionen, ja ſo groß wächſt, als man gedenken kann, ſo muß q nothwendig als nichts angeſehen, und ſo behandelt werden, daher iſt der Ausdruck $\frac{a}{\infty} = 0$. Es iſt hier wieder das Verhältniß $a : \infty$, da a, es mag ſeyn was es will, nothwendig gegen ∞ verſchwinden muß.

§. 298. Wenn Größen in Rechnungen vorkommen, die mit unendlich großen Größen multipliciret ſind, oder auch unendlich große Größen allein, ſo verſchwinden daher alle andere dagegen, und werden aus obigen Gründen $= 0$. Z. E.

es

es wäre $3abn + 2ab\infty = p\infty$, ſo verſchwinden $3abn$, und es bleibet nur $2ab\infty = p\infty$; oder $\frac{rR\infty}{3r\infty + r^2 - 2R} = f$, ſo verſchwinden, r^2 und $-2R$ gegen $3r\infty$, und es bleibet nur $\frac{rR\infty}{3r\infty} = f$

Man findet auch, daß in den Rechnungen vorkömmt, daß unendliche Größen zu Potenzen erhoben werden, man hat ∞^2, ∞^3 u. ſ. w.

Wenn eine höhere Potenz in der Rechnung vorkömmt, ſo verſchwinden dagegen alle niedrigere Potenzen auch von ∞. Z. E. es wäre, $\frac{rR\infty + r\infty^2}{3n\infty - 2p\infty^2} = t$, ſo fiele im Zähler ∞ gegen ∞^2 weg, und (es verſtünde ſich von ſelbſt, wenn auch noch andere Größen da wären) im Nenner fiele ∞ gegen unendlich ∞^2 und alle andere Größen auch weg. Es bliebe $\frac{r\infty^2}{-2p\infty^2} = t$. Es iſt hier der Ort nicht, dieſes weitläuftig auszuführen, ſondern wir erzählen es mehr hiſtoriſch. Eben ſo geht es, aber umgekehrt mit unendlichen kleinen Größen. $\frac{1}{\infty}$ oder das unendlich Kleine fällt in allen Rechnungen gegen endliche Größen weg, und wird $= 0$. Z. E. $a + \frac{b}{\infty} = n$, da fällt $\frac{b}{\infty}$ weg, es iſt ſo gut als

0, und a = n, und alles, was mit $\frac{1}{\infty}$ multipliciret wird, iſt = 0. Z. E. a. $\frac{1}{\infty}$ iſt = 0.

Wenn in Rechnungen Potenzen von $\frac{1}{\infty}$ vorkommen, ſo verſchwinden die alle gegen $\frac{1}{\infty}$ und größere Potenzen verſchwinden gegen die kleinern. Z. E. gegen $\frac{1}{\infty^2}$ verſchwindet $\frac{1}{\infty^3}$, gegen $\frac{1}{\infty}$ verſchwindet $\frac{1}{\infty^2}$ u. ſ. w.

Man möchte ſagen, da ∞ eine Größe anzeigte, die nicht größer gedacht werden könnte, und $\frac{1}{\infty}$ = 0 ſey, ob es denn mehrere Unendlichkeiten gebe, oder ein Unendliches größer als das andere, und eine 0 kleiner, als die andere ſeyn könnte? Nein, aber es dienet dieſes nur, um die Verhältniſſe der Größen gegen einander einzuſehen und zu beſtimmen. Doch iſt hier auch lange der Ort nicht, hievon zu reden, weil dieſes in die höhere Rechenkunſt gehöret, und wir hier nur die erſten Begriffe geben, und die Ausdrücke, die mannichmal in den Rechnungen vorkommen, anzeigen und etwas erklären wollen.

§. 299. Wir haben gezeiget im Kapitel von Brüchen, daß jeder Bruch, wenn ſein Zähler und Nenner mit einerley Größe multipliciret,

oder dividiret würde, nicht im geringſten geändert würde, weil es ſo gut wäre, als ob man ihn mit 1 multiplicirte und dividirte, welches weder multipliciret noch dividiret. Dieſes gilt auch, wenn die Größe, wodurch es geſchieht, unendlich groß, oder unendlich klein $\frac{\infty}{\infty}$ iſt $= 1$ und $\frac{0}{0}$ iſt auch $= 1$

weil ein in dem andern einmal ſtecket. Eine Größe, alſo als $\frac{a.\infty}{b.\infty}$ iſt $= \frac{a}{b}$ und $\frac{a.\frac{1}{\infty}}{b.\frac{1}{\infty}}$ iſt $= \frac{a}{b}$

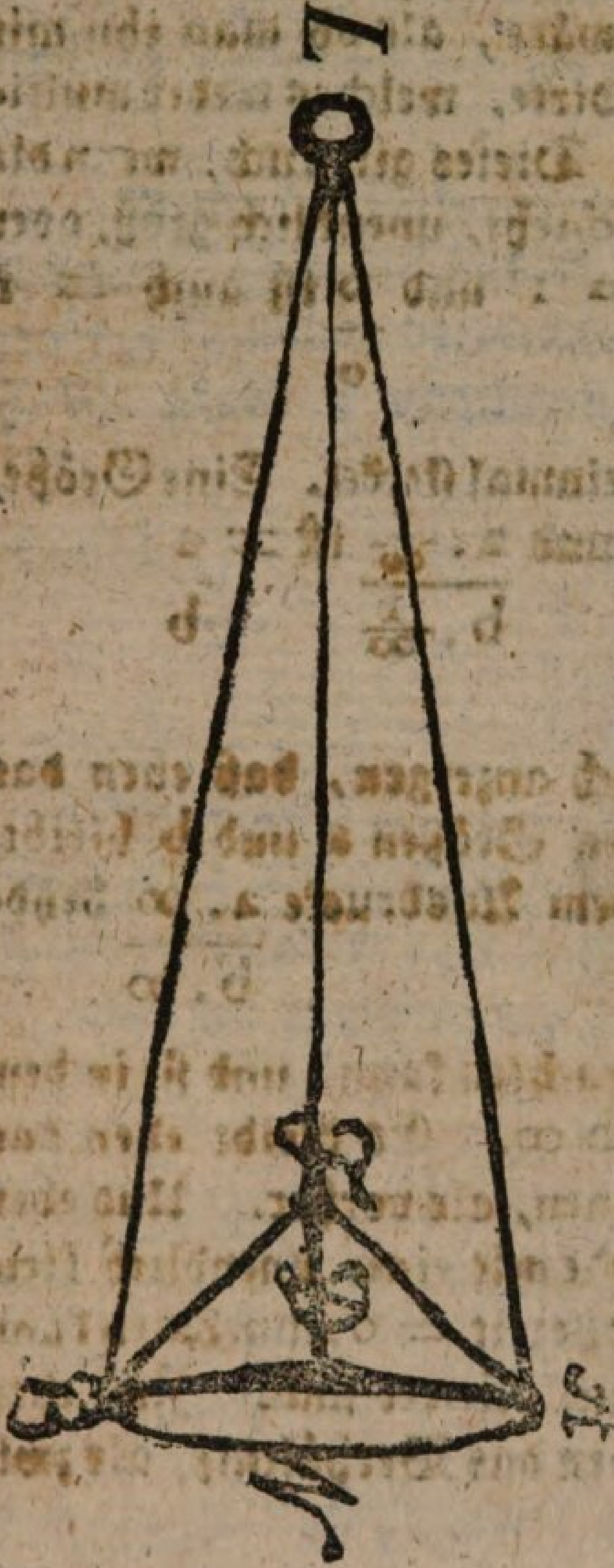
Man will hiedurch anzeigen, daß eben das Verhältniß zwiſchen den Größen a und b bleibt, ob man ſie ſchon bey dem Ausdrucke $\frac{a.\infty}{b.\infty}$ beyde

als unendlich groß betrachten kann, und ſie in dem Verhältniß ſind $a\,\infty : b\,\infty$. Es bleibt eben das Verhältniß zwiſchen ihnen, als vorher. Und eben ſo iſt es auch, wenn beyde mit einer unendlich kleinen Größe, die man allezeit $= 0$ annehmen kann und annehmen muß, multipliciret ſind. Zwiſchen $a\frac{1}{\infty} : b.\frac{1}{\infty}$ iſt noch eben das Verhältniß, als zwiſchen $a : b$

Anmerkung. Auf Verlangen wollen wir doch ein Exempel über dieſes alles aus der würklichen Welt beyfügen, ob es ſchon freylich hier viel zu früh iſt. Ich habe in einer eignen Diſſertation

von

von ſphäriſchen gläſernen Spiegeln bewieſen, daß



wenn das Glas AB auf jeder Seite aus einem andern Radius geſchliffen iſt, und der Radius der nackten Seite ADB =R heißt, der Radius der foltirten Seite ABN=r heißt; die Entfernung des Lucidi L von dieſem Spiegel oder LD = d heißt, und die Entfernung vom Spiegel, wo die Strahlen wieder ſich in F vereinigen, nachdem ſie vom Spiegel zurückgeworfen ſind, oder die DF = f genennet wird, daß alsdenn $f = \frac{dRr}{3dR + dr - rR}$ ſey.

Hier waren die ſphäriſchen Krümmungen des Glaſes auf beyden Seiten verſchieden. Sie ſollen nun mal aber gleich ſeyn, nemlich der Radius der foltirten ANB oder R ſo groß als der Radius der nackten ADB; ſo iſt

R = r

R=r oder anſtatt R die r in die Formel, ſo wird aus der Formel $f = \frac{dRr}{3dR+dr-rR}$ folgende

$$\frac{dr^2}{3dr+dr-r^2} = \frac{dr^2}{4dr-r^2} = \frac{dr}{4d-r} = f = FD.$$

Hier war eine gegebene Diſtanz des Lucidi L noch vorhanden. Aber wir wollen nun ſtatt des Lichts Sonnenſtrahlen ſetzen, da die über 20 Millionen Meilen weit herkommen, ſo kann man ſie in Anſehung des kleinen Punkts der Erde als unendlich weit her annehmen, aus d wird alſo ∞, und nun das in die Formel für f geſetzet, ſo wird $f = \frac{\infty r}{4\infty - r}$ hier verſchwindet die r im Nenner gegen das Unendliche, und f wird $= \frac{\infty r}{4\infty} = \frac{r}{4}$

Es war die Fromel, wenn noch eine endliche Diſtanz des Lucidi angenommen wurde, alſo d noch galt $f = \frac{dr}{4d-r}$ nun aber wollen wir das Lucidum an den Ort ſetzen, wo f war, nemlich wenn Sonnenſtrahlen den Brennpunkt machten, welche, wie wir oben geſehen, $\frac{r}{4}$ waren, ſo wird aus d die $\frac{r}{4}$ alſo $f = \frac{rr}{4} : \frac{4r}{4} - r = \frac{r^2}{4} : r - r = \frac{r^2}{4o}$ aber 4 multipliciret mit Null iſt $= o$, alſo $\frac{r^2}{o} = \infty$ oder die zurückgeworfnen Strahlen kommen erſt

in

in einer unendlichen Entfernung das iſt niemals zuſammen, und bleiben unter einander parallel.

Die allgemeine Formel war $f = \frac{dRr}{3dR + dr - rR}$ des Spiegels vordere Seite die ADB ſey Plan, ſo wird der Radius als ∞ angenommen, denn was keine ſpähriſche Krümmung hat, kann auch keinen Radius haben, als wenn man ihn unendlich ſich gedenket. Nun war der Radius der nackten Seite $= R$, alſo ſtatt R das Unendliche, und aus f wird $f = \frac{d \infty r}{3d\infty + dr - r\infty}$ ein Nenner verſchwindet, alſo dr und f bleibet $\frac{d \infty r}{3d\infty - r\infty} = \frac{dr}{3d - r}$ nun werde d oder die Diſtanz des Lichts unendlich oder man gedenke ſich Sonnenſtrahlen, ſo wird aus dieſer letzten Formel $\frac{\infty r}{3\infty - r}$ und r im Nenner verſchwindet, alſo $= \frac{r}{3}$ Es ſtehe ein Lucidum dichte am Spiegel, alſo wird d unendlich klein, und aus der Formel $\frac{dr}{3d - r}$ wird $\frac{\frac{1}{\infty} r}{\frac{3}{\infty} - r}$ hier verſchwindet im Nenner $\frac{3}{\infty}$ gegen r und bleibt nur $\frac{\frac{1}{\infty} r}{-r}$ $= \frac{\frac{r}{\infty}}{-r} = \frac{o.}{-r}$ Es iſt aber $- r$ unendlich groß

ge-

gegen Null, alſo ein unendlich groſser Diviſor, folglich die Gröſse unendlich klein $= \frac{1}{\infty} = 0$.

§. 297.

Eigentlich ſollte ich dieſes nicht avanciret haben. Weil es noch zu ſchwer iſt, ſchlage es über; ich habe es nur gethan, um einiger Verlangen zu befriedigen.

Das funfzehnte Kapitel.

Von der Ausziehung der Wurzel.

§. 300. Wir haben ſchon in den vorhergehenden Kapiteln etwas von den Wurzeln und Wurzelzeichen beyläufig geſaget, und unſern Leſern einen Vorſchmack davon gegeben, welches wir nun weitläuftiger auszuführen gedenken. Es iſt uns ſchon aus §. 89. 90 bekannt, daſs eine Zahl mit ſich ſelbſt multipliciret, eine Quadratzahl giebt, und die Zahl, woraus dieſe Quadratzahl durch die Multiplikation entſpringet, ihre Wurzel heiſse. 4 . 4 giebt 16, da iſt 16 das Quadrat und 4 die Wurzel. Multipliciret man ſolche Quadratzahl nochmal mit der Wurzel, ſo wird es eine Cubikzahl; multipliciret man die Cubikzahl abermals mit der Wurzel, ſo wird es biquadrat, oder die 4te Potenz

tenz und ſo entſtehen alle Potenzen. Die Zahl, aus deren Multiplikation eine Potenz entſpringet, heißt alſo, nachdem ſie verſchiedene mal mit einander multiplicirt iſt, die quadratiſche, cubiſche, vierfache, fünffache Wurzel. Nun kann man ja jede Größe ſich vorſtellen, als ob ſie aus der Multiplikation einer andern Größe mit ſich ſelbſt entſprungen ſey, und daher von jeder Größe, die quadratiſche, cubiſche, vier⸗fünffache Wurzel gedenken und anzeigen. Wir wiſſen auch ſchon aus §. 90 daß durch das $\sqrt{a}$ oder $\sqrt[3]{a}$ $\sqrt[4]{a}$ $\sqrt[5]{a}$ ꝛc. oder auch durch $a^{\frac{1}{3}}$ $a^{\frac{1}{4}}$ $a^{\frac{1}{5}}$ ꝛc. angezeiget werde. §. 145. 226.

Wir haben gezeiget, daß eine ganze Zahl wieder eine ganze Zahl zum Quadrate gebe, ein Bruch aber einen Bruch, und daß $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ſey $\frac{a^2}{b^2}$ oder $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Jetzt zeigen wir, wie man aus gegebenen Größen die verlangten Wurzeln ausziehen kann, denn da es ſich gedenken läßt, als ob die Größen durch die ſo vielmalige Multiplikation einer Größe, als die verlangte Wurzel iſt, entſtanden ſeyn, ſo iſt es auch einem jeden höchſt muthmaßlich, daß ſich dieſe Wurzel werde durch Rechnungen finden laſſen. Indeſſen werden wir doch ſehen, daß ſie ſich alle nicht ſo genau finden laſſen, ob man ſchon den Fehler ſo klein machen kann als man will. Diejenigen Wurzeln, welche ſich nicht ſo genau finden laſſen, heißen **Irrationalwurzeln**,

zeln, welches ſo viel heißt, als Wurzeln, die ſich nicht genau finden laſſen, ſo wie denn auch alle Größen, die ſich genau angeben laſſen, Rationalgrößen heißen. So ſind z. E. √2, der √3, der √5 Irrationalwurzeln, weil man ſie ſo genau nicht findet. Die Urſachen genau anzuzeigen, warum es ſolche Irrationalwurzeln giebet, iſt für dieſe Schrift nicht. Sie entſtehen zum Theil aus dem decadiſchen Geſetze, wornach wir zählen. Andere Geſetze würden andere und mehrere Unbequemlichkeiten, und andere und mehrere Irrationalwurzeln und Größen haben. Ob man auch ſchon ſolche Irrationalwurz. nicht völlig ausziehen kann, ſo kann man ſich doch einen Begrif davon machen. Der √12 iſt eine Irrationalgröße, indeſſen läßt ſich doch eine Größe in Gedanken ſich vorſtellen, welche, mit ſich ſelbſt multipliciret, 12 zum Produkte giebet. Rationalwurzeln ſind Wurzeln, welche ſich genau finden laſſen, z. E. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{144} = 12$ u. ſ. w. Wir werden hievon noch weitläuftiger reden.

§. 301. Wir reden zuerſt von der Ausziehung der Quadratwurzel. Um ſich hievon einen rechten Begrif zu machen, ſchicken wir erſtlich die Bemerkung voraus, daß man alle Zahlen betrachten kann, als ob ſie aus mehrern zuſammengeſetzt wären, ſie mögen ſo groß oder ſo klein ſeyn als ſie wollen. Wir wollen ſie jetzt einmal betrachten, als ob ſie aus zwey Größen durch die Addition entſtanden wären, welche wir $a + b$ nennen wollen. Unter $a + b$ kann man alle mögliche Zahlen verſtehen. Z. E. 5 könnte man ja in die zwey

Theile theilen, $2 + 3$. 1360 in die zwey Theile $1000 + 360$, und ſo mit allen Größen auf vielerley Art. Dieſes $a + b$ kann alſo als ein allgemeiner Ausdruck aller möglichen Rationalwurzeln betrachtet werden, und es beſtehet alſo die Wurzel aus 2 Theilen, welches man **Binomium** nennet. Wir wollen dieſes $a + b$ in die quadratiſche Potenz erheben, und bemerken, aus welchen Theilen es beſtehet. $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$ iſt wirklich multipliciret $= a^2 + 2ab + b^2$. Wir finden hier im erſten Gliede das Quadrat des einen Theils der Wurzel, nemlich aa; im zweyten Gliede finden wir das Produkt aus beyden Theilen der Wurzeln zweymal genommen, welches $2 . ab$ iſt, und im dritten Gliede finden wir das Quadrat des andern Theils der Wurzel, bb. Da wir wiſſen, wie das Quadrat von $a + b$ entſtanden iſt, ſo dürfen wir nur den umgekehrten Weg nehmen, um das $a^2 + 2ab + b^2$, die $a + b$ oder die Wurzel wieder zu finden, nemlich durch eine Art der Diviſion. Man ſoll alſo hieraus die Wurzel ziehen. Wir wollen erſt anfangen, dieſe Größe durch a zu dividiren:

$$\begin{array}{rlll|l}
:a) & a^2 & + 2ab & + b^2 & a + b \\
 & a^2 & & & \\
\hline
:2a + (b) & & + 2ab & + b^2 & \\
 & & + 2ab & + b^2 &
\end{array}$$

Den erſten Theil der Wurzel ſieht man alsdenn gleich, es iſt a, alſo hingeſetzet, man theilet alſo dieſe ganze zuſammengeſetzte Größe erſtlich durch a. Wenn man dieſen Quotienten mit dem Diviſor a multipliciret, ſo iſt das Produkt a^2, dieſe

von

von dem Dividendus abgezogen, bleibt noch $2ab + b^2$. Nun fehlet noch der andere Theil der Wurzel. Wenn man den Ausdruck $2ab + b^2$ bequemer ausdrücken will, ſo iſt er $(2a + b).b$. Ich ſehe alſo, daß ich in die übrigen Großen mit $2a + b$ dividiren muß, um b zu finden. Denn $\frac{(2a + b) b}{(2a + b)} = b$. Allein hier muß ich nun doch würklich erſt b wiſſen, weil es im Diviſor vorkömmt. Wenn ich mein erſtes gefundenes Glied duplire, nemlich das a, und damit in das zwente Glied dividire, ſo finde ich $+ b$. Dieſes ſetze ich in den Quotienten, nun nehme ich den Diviſor 2a, und ſetze da noch das gefundene $+ b$ zu, dividire würklich, und multiplicire das zuſammen mit dem gefundenen b, ſo bekomme ich das Produkt $2ab + b^2$ und alles geht auf. Wenn man die auf ſolche Art dividirte Größe betrachtet, ſo bemerket man, daß man das zwente Glied der Wurzel findet, wenn man, nachdem man das Quadrat des erſten Gliedes ſubtrahiret hat, das unmittelbar darauf folgende Produkt mit dem doppelt genommenen erſten Gliede dividiret, den neuen Quotienten zu dieſem doppelten Produkt alsdenn hinzuſetzet, und alles mit dem gefundenen neuen Quotienten multipliciret, und alsdenn von dem Reſte abziehet. Wir wollen hiernach mal gleich ein Exempel in Zahlen machen. Wir wollen das Quadrat von 14 dazu nehmen, wenn wir es nach dem Binomio in zwey theilen, ſo ſollen die $8 + 6$ ſeyn $= a + b$.

Wir hätten alſo nach den Chifret $a^2 + 2ab + b^2 = 8.8 + 2.8.6. + 6.6.$ Hieraus wollen wir die Wurzel ziehen.

$$
\begin{array}{r|l}
:8)\ 8.8 + 2.8.6 + 6.6 & 8 + 6 \\
8.8\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
2.8.6 + 6.6 & \\
:2.8 + 6)\ 2.8.6 + 6.6 &
\end{array}
$$

Aus 8.8 wäre die Wurzel 8, hingeſetzt. Und 8. 8 = 8.8, wenn man das abzieht, bliebe 2.8.6 + 6.6, den erſten Theil der Wurzel oder die 8 dupliret, giebt a.8. Damit das zweyte Glied dividirt, giebt zum Quotienten + 6. Dieſes zum neuen Diviſor 2a zugeſetzet, giebt durch die Multiplikation mit dem zweyten Theil der Wurzel 2.8.6 + 6.6, welches von dem Reſte abgezogen, nichts läßt. Und ſo wäre die Wurzel gefunden. Allein auf ſolche Art werden die Zahlen nicht gegeben, woraus man Quadratwurzel ziehen ſoll, ſondern man würde ſie einem alſo geben, $(14)^2 = 196$, und daraus müſte man ſie ziehen; wie muß man nun verfahren?

§. 302. Hier hat man erſtlich die Quadrate der einzelnen Zahlzeichen bis 9 zu bemerken, die man durch die Multiplikation im Einmaleins leicht finden kann, ſie ſtehen im folgenden Täflein, dazu wir die Cubi und Biquadrate oder von der vierten Potenz mit beyfügen wollen, um ſie nachher nicht beſonders anführen zu dürfen.

Wurzel.

Wurzeltäfelein.

Wurzel 1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate 1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi 1	8	27	64	125	216	343	512	729
Biquadrate 1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

Man bemerket hier: **Kein Quadrat der einzelnen Zahlzeichen** enthält mehr als zwey Zahlen, und zwey davon nur eine: kein Cubus mehr als drey, und einige nur zwey und eine; kein Biquadrat enthält mehr als vier Zahlen, einige nur drey und zwey. Aus dem Grunde, daß kein einfaches Zahlzeichen mehr als zwey Zahlen zum Quadrate hat, folget: ob wir dieſes hier ſchon

 wegen

wegen unſer Abſicht nicht ſo weitläuftig ausführen können, daß man bey Ausziehung der Quadratwurzel die gegebenen Zahlen in Klaſſen je zwey und zwey von der rechten zur linken Hand eintheilen muß, um die Anzahl der Theile der Wurzel zu wiſſen, da denn nach der linken Hand hin vorne auch eine Zahl bleiben kann, wenn es alſo durch die Abtheilung kömmt. Man darf beym Multipliciren das Einmaleins nur von eins bis neune wiſſen, eben ſo mit dem Wurzeltäflein, wenn man die Wurzeln ausziehen will. Es iſt hier nicht der Ort, dieſes ganz weitläuftig zu erklären, allein man bedenke nur, daß man eine jede Wurzelgröße als eine aus zwey Theilen zuſammengeſetzte betrachten kann, da man denn, ſie mag ſo groß oder klein ſeyn als ſie will, zu einem Theile allezeit ein einfaches Zahlzeichen annehmen kann, und habe ich davon die Wurzel gefunden, und habe nur überhaupt aus 3 oder 4 Zahlen die Wurzel zu ziehen, alsdenn der andere Theil der Wurzel auch nur zwey Zahlzeichen zum Quadrate haben kann. Wären der Zahlen mehr und ich habe erſt zwey Theile der Wurzel, ſo ſehe ich die alsdenn wieder als einen Theil an, und ſuche denn wieder den zweyten Theil. Weil der wieder ein einfaches Zahlzeichen iſt, ſo kann ſein Quadrat abermals nur aus zwey Zahlen beſtehen. Habe ich den wieder gefunden, ſo ſehe ich die drey gefundenen Theile als den erſten Theil der Wurzel an, und ſuche den vierten, der gleichfalls, da er eine einfache Zahl iſt, nur zwey Zahlen zum Quadrat haben kann, und ſo weiter, bis ich alle Wurzeln habe. Man leſe hierüber Herrn Käſtners Anfangs-

fangsgründe und Herrn Carſtens Lehrbegrif der geſammten Mathematik, wenn man dieſes erſt begriffen und gelernet hat, da man von allem ausführlichere Nachricht findet, die wir nicht ſo weitläuftig geben dürfen.

§. 303. Alle dieſe Betrachtungen geben folgende Regeln zur Ausziehung der Quadratwurzeln.

1) **Man theile die gegebene Zahl, woraus die Wurzel ſoll gezogen werden, in Klaſſen, jede von zwey Zahlen, von der rechten zur linken Hand.** Es hindert nichts, wenn zu äußerſt nach der linken Hand in der letzten Klaſſe nur eine Zahl kömmt.

2) **Man ſuche in dem Wurzeltäflein für die erſte Klaſſe linker Hand die Wurzel auf, oder die am nächſten kleiner iſt als ſie, wenn man die Zahl nicht genau unter den Quadraten findet** Es iſt ein Beweiß, daß in der vorderſten Klaſſe noch etwas mit von dem doppelten Produkte der Wurzeln, allgemein von 2ab befindlich iſt.

3) **Die gefundene Wurzel, oder die nächſt kleinere, wenn man die Wurzel nicht angetroffen hat, ſetze man in den Quotienten als den erſten Theil der Wurzel, oder das a, multiplicire ſie mit ſich ſelbſt, und ziehe dieſes Produkt von der erſten Klaſſe ab.**

4) **Nun duplire man dieſen erſten Theil der Wurzel, und ſetze die hinterſte Zahl davon unter die vordere der zweyten**

Klaſſe, deren Zahlen man nebſt dem Reſte von der erſten Klaſſe herunter geſetzet hat. Es muß darum unter dieſes Zahlzeichen geſetzet werden, weil auch noch etwas von dem Quadrate des andern Theils mit in dieſer Klaſſe enthalten ſeyn kann. Giebt das doppelte Produkt des erſten Theils mehr Zahlen als eine, ſo werden die immer weiter linker Hand geſetzet.

5) Nun dividire man mit dem doppelten Produkte, als dem neuen Diviſor, man nehme aber den Quotienten nicht zu groß, das iſt der zweyte Theil der Wurzel oder das b. Setze dieſen Quotienten mit unter der zweyten Klaſſe zweyte Zahl, da noch ein Platz iſt. Multiplicire dieſe hingeſetzte Zahl nebſt dem doppelten Produkte mit dem Quotienten und ziehe das Produkt von der zweyten Klaſſe ab. Man hat den Quotienten zu groß genommen, wenn dieſes Produkt größer als die Zahl wird, wovon man es abziehen ſoll, und man muß ihn ſo lange um 1 vermindern, und das obige Verfahren damit machen, bis man das Prpdukt abziehen kann. Nun hat man den zweyten Theil der Wurzel; den Reſt, wenn welcher da iſt, ſetzet man herunter, und auch wieder eine neue Klaſſe.

6) Hat man nun mehr als zwey Klaſſen, ſo ſieht man die gefundenen Theile von der Wurzel wieder als den erſten Theil an, dupliret ihn, ſetzet ſeine niedrigſte Ziffer wieder unter die erſte der herunter geſetzten

ſetzten Klaſſe, und die übrigen neben ihm linker Hand: dividiret wieder, ſetzet den Quotienten in die Wurzel ſowol als neben dem Diviſor; multipliciret dieſes wieder mit dem gefundenen Quotienten ſubtrahiret, und ſetzt den Reſt herunter nebſt einer neuen Klaſſe; dann ſieht man die gefundenen drey Theile der Wurzel wieder als einen an, und verfähret auf den alten Weg.

Man wird auf die Art die Wurzel genau finden, wenn die gegebene Zahl ein würkliches Quadrat iſt.

§. 304. Wir wollen nun dieſe Regeln durch Exempel zeigen. Man thut gut, wenn man ſich das allgemeine Chifret $a^2 + 2ab + b^2$ dabey im Anfang hinſchreibt, wir wollen dabey zeigen, wie dieſes im Quadrate ſtecket.

Man ziehe die Quadratwurzel aus 1764.

	17	64	$a + b$
$(a^2) =$	16		4 2
$(2ab + b^2) =$	1	64	
$2a + b =$	(82)		
$2ab + b^2 =$	164		

Erſtlich von der rechten Hand in Klaſſen getheilet, giebt zwey Klaſſen, (erſte Regel), alſo ſind auch zwey ganze Zahlen zur Wurzel.

Nun ſuche man in dem Täflein die 17 auf unter den Quadraten (zweyte Regel), die iſt nicht da, wohl aber 16, das iſt das nächſt kleinere Quadrat, deſſen Wurzel findet ſich in dem Täflein,

und iſt 4, in den Quotienten geſetzt als den erſten Theil der Wurzel, das iſt a. Mit ſich ſelbſt multipliciret und unter die erſte Klaſſe geſetzet, 4mal 4 iſt 16, das iſt a^2, abgezogen von 17 bleibt 1. (Die dritte Regel) Dieſen Reſt herunter geſetzt, das iſt nun $2ab + b^2$, duplire den erſten Theil der Wurzel hier 4, giebt 8, das iſt 2a, unter die 6 der zweyten Klaſſe geſetzet. (Vierte Regel) Dividire 8 in 16, geht hier zweymal. Die 2 in den Quotienten, als den 2ten Theil der Wurzel geſetzet, das iſt b, und auch neben der 8, nun mit der 2, welches die b iſt, dieſe 82 multipliciret, giebt 164, dieſes iſt nun $(2a + b)b$ oder $2ab + b^2$. Das abgezogen von den heruntergeſetzten Klaſſen (Fünfte Regel) geht hier auf, alſo iſt, weil nichts mehr da iſt, die Wurzel hier 42.

Man macht die Probe, wenn man die Wurzel mit ſich ſelbſt multipliciret, da muß das Quadrat wieder heraus kommen, und 42.42 iſt auch = 1764.

Noch einige Exempel vor einer größern Zahl, da wir aber nur immer das Chifret neben hin ſchreiben wollen, weil, wer dieſes aufmerkſam durchgeleſen hat, es leicht nachmachen wird.

Die

Die Wurzel aus 15625 | $a + b$

| $a + b$.

1 | 56 | 25 | 125

2te Regel $a^2 = 1$ | — | —

und dritte $2ab + b^2 =$ | 56

$2ab + b =$ | (22)

$(2a + b).b =$ | 44

12 | 25

$2a + b = (2$ | 45)

$(2a + b).b$ 12 | 25

0000

Alſo die Wurzel iſt 125.

Die Wurzel aus 817216 | $a + b$

| $a + b$

81 | 72 | 16 | 904

$a^2 = 81$ | — | —

$2ab + b^2 =$ | 72

$2ab + b = (1$ | 80)

$(2a + b).b = 0$ | 00

| 72 | 16

$2a + b$ (1804)

$(2a + b)b$. 7216

0000

Man bemerke hier, weil bey der zweyten heruntergeſetzten Klaſſe 7 ſich durch 18 nicht dividi-

ren

ren lies, ſondern der Quotient = o ſeyn muſte, ſo muſte auch die mit ihm multiplicirte 2a + b zur o werden, folglich von der 72 nichts abgezogen, ſondern ſie ganz herunter geſetzt werden. Wir haben dieſes Exempel gegeben, um zu zeigen, wie man verfahren müſſe, wenn etwa ein ſolcher Fall kömmt, und in der Wurzel ſich Nullen befinden. Wir wollen jetzt eins hinſetzen, wo hinten an die Wurzel Nullen kommen.

Die Wurzel aus 1440000 | $a + b$

$a + b :$

1 | 44 | 00 | 00 | $a + b ::$

$a^2 = 1$ | 1200

$2ab + b^2 = 44$

$2a + b = 22$

$(2a + b).b = 44$

000000

Hier ſieht man ſchon, daß für die letzten beyden Klaſſen die Wurzel = o ſeyn muß, denn aus o iſt der Radix = o.

Aus

```
Aus 75255625 die Wurzel.        |  a + b
                                |  a + b:
                                |  a + b::
      75 |25) |56) |25 | 8 6 7 5
      64 | :: | :: | ::
     ----|----|----|----
     11. |2.5 | :: | ::
     (1  |66) | :: | ::
       9 |96  | :: | ::
     ----|----|----|----
       1 |29   5.6 | ::
         |(17 |27) | ::
       1 |20  |89  | ::
     ----|----|----|----
           8  |67  |25
          (1  |73  |45)
           8  |67   25
         ------------------
             00000
```

Die Wurzel iſt 8675.

§. 305. Die Größen, aus welchen wir jetzt die Quadratwurzeln gezogen haben, waren würklich Quadrate, daher ließen ſich auch die Wurzeln genau ausziehen, ſo, daß alles endlich gegen einander aufgieng. Aber das iſt nicht allezeit; ſehr oft finden ſich Zahlen, wovon, wenn von der letzten Klaſſe das letzte Produkt abgezogen, noch ein Reſt übrig bleibet. Es iſt nun freylich wahr, daß das allezeit ein ächter Bruch, folglich kleiner als 1 iſt, folglich die Quadratwurzel nicht völlig um 1 irrig iſt, wenn auch ein Reſt übrig bleibet, weil, wenn 1 oder mehr der Irrthum betrüge, man 1 oder mehrmal den letzten Wurzelquotienten hätte größer neh-

nehmen können. Allein man will die Quadratwurzel genau haben. Allezeit gehet das nun nicht an. Man hat alſo eine Art, da man ſie durch Näherung, und zwar außer den ganzen Zahlen, die man gefunden hat, das übrige in Decimalbrüchen ſuchet, da man denn der wahren Größe ſo nahe kommen kann, als man will, ob man ſie ſchon nicht allezeit erreichen kann. Solche Wurzeln ſind Irrationalwurzeln oder Größen. Wir wollen erſt ein Exempel hinſetzen, daraus man die Wurzel nicht ganz genau finden kann, und darüber unſere Betrachtungen anſtellen.

Die Wurzel aus 1321.

13 | 21 | 36
9 |
4 | 21
| (66)
396
25

Hier iſt die Wurzel 36, allein ſie iſt es nicht ganz, ſondern es bleiben 25 übrig. Es iſt nun freylich gewiß, daß dieſe Quadratwurzel nicht um 1 größer, alſo 37 ſeyn kann, ſondern zwiſchen 36 und 37 ſtecken muß. Man hätte es während der Rechnung gefunden, wenn ſie 37 wäre. Man verſuche es, und nehme bey dem zweyten Theile der Wurzel anſtatt der 6 die 7, ſo wird man finden, das Produkt iſt zu groß. Es muß alſo ſich noch ein Bruch finden, der an 36 gehänget wird, und mit zu der Wurzel gehöret. Wenn man an die 36 noch

$\frac{1}{4}$ an=

$\frac{1}{4}$ anhänget, und dann $36\frac{1}{4}$ mit ſich ſelbſt multipliciret, ſo bekömmt man $1314\frac{1}{16}$, alſo der Bruch $\frac{1}{4}$ iſt zu klein, hänget man $\frac{3}{8}$ an, und multipliciret $36\frac{3}{8}$ mit ſich ſelbſt, ſo bekömmt man $1323\frac{9}{64}$, alſo $\frac{3}{4}$ iſt zu groß.

Zwiſchen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{8}$ ſtecket nun der Bruch, der angehänget werden muß, allein man würde vielleicht ſehr lange ſuchen müſſen, und ſehr oft ihn gar nicht finden. Man hat darum einen andern Weg gewählet. Man erinnere ſich, was §. 242 von Decimalbrüchen geſagt iſt. Wenn man einer Zahl noch ſo viel Nullen anhänget, aber ſie auch durch 1 mit eben ſo viel angehängten Nullen dividiret, ſo wird ſie nicht größer und nicht kleiner. 3 oder $\frac{300}{100}$ iſt einerley. Dies gebraucht man, wenn Reſte bey den Wurzeln bleiben. Man macht gleich ſo viel neue Klaſſen von bloßen Nullen, als man noch Theile der Wurzel in Decimalbrüchen haben will; bey quadratiſchen Ausziehungen immer zwey Nullen in jede Klaſſe, und fähret fort, immer auf die alte Manier die Theile der Wurzel zu ſuchen. Allein, wo der Theil der Wurzel, die noch aus den ganzen gegebenen Zahlen gezogen war, aufhöret, macht man ein Comma, zum Zeichen, daß nun die Theile der Wurzel in Decimalbrüchen angehen. Daß man zwey Nullen macht, geſchiehet daher, weil aus jeder Klaſſe ein neuer Decimalbruch kömmt; und daß man auf die Art verfahren kann, und recht verfähret, folget daraus, weil ja durch die Stelle, die die Decimalbrüche bekommen, es ſchon angezeigt wird, daß ſie durch 1 mit ſo viel angehängten Nullen dividiret ſind,

als Paare von Nullen an den Reſt angehänget wären.

Wir wollen dieſes durch ein Exempel erläutern, und das vorige dazu erwählen.

```
   1 3|21  |36,345
     9|    |
 -----|--- |
     4|2  1|
      |(66)|
   3 9 6
  -------
      25|00'00|00
     (7|23)| ::|::
      21|69| ::|::
  ------|--|---|--
       3|3 1|00|::
        |(72 64)|::
       2|9 0|5 6|::
  ------|---|---|--
         40 4.4. 00
         (7  2 6 85)
          36|3 4|25
  ----------|---|--
           4|0 9|75
```

Wir haben drey Paar Nullen angehänget, und alſo drey Decimalbrüche bekommen, die man eigentlich alſo ausdrücken müſte: $\frac{345}{1000}$, aber die Stelle, wo ſie ſtehen, ſagt eben das. Jetzt iſt die Wurzel zwar noch nicht genau gefunden, allein es fehlet doch kein Tauſendtheil mehr daran, ſie ſtehet zwiſchen 36, 345 . . und 36, 346. Man hätte ſie können weit genauer finden, wenn man noch mehr Klaſſen von Nullen angehänget hätte, ſo genau, daß der Unterſchied kleiner als Trillionen

nentheilchen, und noch kleiner wäre, wenn man Nullen genug angehänget hätte. Wenn man nun 36,345 mit ſich ſelbſt multipliciret, und die Decimalbrüche gehörig abſtreichet, ſo muß 1321 faſt herauskommen. Vollkommen erhält man es nie, weil dieſe Wurzel nie genau geſunden wird, wenn man auch noch ſo viel Nullen anhänget, indem es eine Irrationalwurzel iſt. §. 300.

§. 306. Es iſt dieſer Gebrauch, die Wurzeln durch die Approximation zu finden, auch alsdenn ſehr gut, wenn man ganz einzelne Zahlgrößen hat, woraus man ſie ſuchen will. da man gleich ſo viel Klaſſen der Nullen anhänget, als man Zahlen für Decimalſtellen haben will. Wir wollen den √3 mit 3 Decimalzahlen ſuchen. Alſo hängen wir drey Klaſſen Nullen an.

3	00	00	00	1,732...
1	: :	: :	: :	
2.	0.0	: :	: :	
	(27)	: :	: :	
1	89	: :	: :	
	11.	0.0	: :	
	(3	43)	: :	
	10	29	: :	
		7.1	0.0	
		(34	62)	
		69	24	

176

Wenn man 1,732 mit einander multipliciret, ſo kömmt faſt 3 heraus. Wir wollen es zur Probe zeigen.

```
      1,732
      1,732
     ------
       3464
      5196
    12124
    1732
   --------
   2,999824
```

Alſo fehlet noch an 3 ehe es voll wird $\frac{176}{1000000}$, welches noch kein $\frac{1}{5000}$ der Einheit iſt.

§. 307. Man kann auch durch Zahlen, woran ſchon Decimalbrüche ſich befinden, die Quadratwurzel ziehen, und man gebrauchet die bisher gezeigte Methode, außer, daß man in Abtheilung der Klaſſen die ganzen Zahlen alleine abtheilen muß, und alsdenn die Decimalbrüche von der linken zur rechten Hand, wenn ſie nemlich an den ganzen Zahlen ſich befinden. Fehlet hinten eine Zahl, daß die Klaſſe nicht voll wird, ſo hängt man noch eine Null daran. Sie ſtellen das vor, was die angehängten Nullen vorſtellten, nur daß dieſes würkliche Größen ſind. Im Quotienten, welcher die Theile der Wurzel enthält, macht man nur ein Zeichen, wo die Einheit aufhöret, welches iſt, wenn man die Theile der Wurzel aus den Klaſſen hat, die ganze Zahlen enthalten.

Exem-

Exempel. Die Wurzel aus 135,543.

```
1 | 35, | 5 4 | 30    11,64....
1 | : : | : : | : :
--
    35  | : : | : :
   (21) | : : | : :
    21  | : : | : :
   ---
    14. | 5.4 | : :
     (2 | 26) | : :
     13 | 56  | : :
   ---
          9 8 | 3.0
         (23  | 24)
          92  | 96
          --
           5  | 34
```

Auch hier kann man noch Klaſſen mit Nullen anhängen, und die Wurzel noch genauer finden, die immer auf die gewöhnliche Art in den ſchon angefangenen Decimalbrüchen fortgeſetzet wird.

Wenn man aus einem Bruche die Wurzel ziehen ſoll, ſo ziehet man ſie ſowol aus dem Zähler als aus dem Nenner. Z. E. der $\sqrt{\frac{9}{25}}$ iſt $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$ denn $\frac{9}{25}$ war $(\frac{3}{5})^2 = \frac{3.3}{5.5} = \frac{9}{25}$, alſo muß auch der Radix ſo ausgezogen werden. Alſo, wenn man allgemein einen Bruch $\frac{a}{b}$ nennet, ſo iſt der $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Z. E. $\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{2,236\ldots.}{2,828\ldots.}$

Man muß dabey bemerken, daß man, wenn aus dem ganzen Bruche der Radix ſoll gezogen wer-

werden, das Zeichen mitten davor machen muß, wie hier geſchehen iſt. Stehet es über oder unter den Queerſtrich, ſo bedeutet es nur, daß entweder aus dem Nenner, oder dem Zähler die Radix ſoll ausgezogen werden.

Mit den Decimalbrüchen geht es nun eben ſo. Der $\sqrt{}$ aus 0,0043 wäre $= \sqrt{\frac{43}{10000}} = \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{10000}}$ $= \frac{6,557}{100} = 0,06557 \ldots$

Wenn man dieſes recht betrachtet, ſo ſiehet man leicht, daß man kürzer dazu kommen könnte.

Man machet bey der Null, w lche das Zeichen der Einheit iſt, eine Klaſſe; nun theilet man von der linken Hand nach der rechten Hand die Decimalzahlen in ihre Klaſſen, und bleibt hinten an der rechtrn Hand noch eine Zahl übrig, ſo hängt man da noch eine Null an, weil das die Größe der Decimalbrüche doch nicht ändert. So hätte man auch von der rechten nach der linken Hand die Eintheilung machen können, wenn man die Decimalzahlen, wenn es nicht eine gerade Anzahl geweſen wäre, durch die Anhängung einer 0 dazu gemacht hätte. Nun ſetze man in den Quotienten, welcher die Theile der Wurzel enthält, erſtlich für die Abweſenheit der ganzen Zahl die Null mit dem gewöhnlichen Comma dahinter, und finden ſich noch Klaſſen vorne an, die auch blos Nullen enthalten, für jede Klaſſe eine Null, alsdenn ziehe man auf die gewöhnliche Art die Quadratwurzel aus,

da

da man, wenn man will, auch ſelbſt den Decimalbrüchen hinten an der rechten Hand ſo viel Nullen anhängen kann, als man will, um noch mehrere Theile der Wurzeln in Decimalbrüchen zu haben. Von jedem ein Exempel:

Der √ 0, 1444

```
 0,|14|44|0, 38
   | 9|  |
 ---------
     5|44
     (68)

     5 44
   -------
     0 00
```

Der √ aus 0, 1444 iſt alſo = 0, 38.

Der √ aus 0, 545

```
     0,|54| 50 |0,7382....
       |49| :: |
     ----------
         5| 5.0
        (1| 43)
         4  29
     ------------------------------
         1| 2.1.|0.0|00
          |(14  |68)|::
          1 17  44   ::
     ------------------------------
              3.|56.|0.0
             (1 |47 |62)
              2  95  24
     ------------------------------
                 60 |76
```

Hier wollen wir noch Nullen anhängen

Der √ aus 0,000004851

```
alſo:  0,|00|00|04 85|10|0,00220
         |  |  | 4|: |  |
           ———— —— ————
                 85 |
                (42)|
                 84 |
           ———————  ————
                  1 |10
                 (4 |4)
```

Hier hätte man an die letzten Zahlen, welches die 110 waren, auch noch Klaſſen der Nullen anhängen können, wenn man die Wurzel noch genauer hätte haben wollen.

§. 308. Aus Buchſtabengrößen oder allgemeinen Größen laſſen ſich gleichfalls die Wurzeln ausziehen, und man bekömmt ſie völlig, wenn die Größen völlige Quadrate ſind. Man verfähret auf eben die Art, wie wir bey der Ausziehung der Quadratwurzel aus Zahlen gelehret haben, nur muß man die Größen nach den Potenzen gehörig ordnen, das heißt, ſie ſo zu ſetzen, daß die größte Potenz im erſten Gliede ſtehe, und die darauf folgenden immer nach der Ordnung abfallen. Man ziehet die Wurzel nach dem gelehrten Chifret $a^2 + 2ab + b^2$ aus, und gehet endlich nicht alles gegen einander auf, ſo iſt daß ein Beweiß, daß die gegebene Größe kein würkliches Quadrat ſey. Wir wollen ein Paar Exempel geben, und das Chifret, wornach wir ſie ausziehen, allezeit dabey ſetzen.

Der $\sqrt{(c^2 + 6cb + 9b^2)}$. Hier iſt die Größe nach den Potenzen der c geordnet.

c^2

$$c^2 + 6cb + 9b^2 \,\Big|\, \begin{matrix} a + b \\ c + 3b \end{matrix}$$

$$a^2 = c^2$$

$$2ab + b^2 = + 6cb + 9b^2$$

$$2a = 2c)$$

$$2ab + b^2 = (2c + 3b)3b = 6cb + 9b^2$$

$$\circ \quad \circ$$

Die Wurzel von c^2 iſt c, hingeſetzet. Nun die c dupliret, um den neuen Diviſor zu bekommen. Denn den neuen Quotienten und den neuen Diviſor mit dem neuen Quotienten multipliciret, und ſo weiter, wie man es hier deutlich findet.

Der $\sqrt{(m^2 + 2mb - 2mc - 2bc + b^2 + c^2} \,\Big|\, a + b$

$$m^2 + 2mb - 2mc - 2bc + b^2 + c^2 \,\Big|\, a + b \; ::$$

$$a^2 = m^2$$

$$2ab + b^2 = 2mb - 2mc - 2bc + b^2 + c^2 \,\Big|\, m + b - c$$

$$2a = 2m)$$

$$2ab + b^2) = (2m = b)b = 2mb \qquad + b^2$$

$$-2mc - 2bc \qquad + c^2$$

$$2a = 2m + 2b$$

$$2ab + b^2 + (2m + 2b - c) - c = -2mc - 2bc \qquad + c^2$$

$$\circ \quad \circ \quad \circ$$

Der

$$
\begin{array}{l|l}
\text{Der } \sqrt{(c^4+2c^3+3c^2+2c+1)} & a+b \\
c^4+2c^3+3c^2+2c+1 & \overline{a+b} \\
a^2=c^4 & c^2+c+1 \\
\hline
2ab+b^2 = +2c^3+3c^2+2c+1 & \\
2a = 2c^2 & \\
2ab+b^2=(2c^2+c).c=2c^3+c^2 & \\
\hline
+2c^2+2c+1 & \\
2a+2c^2+2c & \\
2ab+b^2=(2c^2+2c+1)\,1=+2c^2+2c+1 & \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

§. 309. Jede quadratiſche Größe kann entweder aus einer Wurzel, die das Zeichen plus oder das Zeichen minus führet, entſtanden ſeyn. Auf beyde Fälle wird der Quadrat eine poſitive Größe, woraus ſich die Wurzel ziehen läßt. Z. E. der $\sqrt{64}$ kann ſowohl $=-8$ als $=+8$ ſeyn. Denn auf beyde Fälle, wenn die Wurzelgröße mit ſich ſelbſt multipliciret wird, kömmt $+64$ heraus. Wenn man daher eine Wurzel aus einer poſitiven Größe anzeigt, macht man beyde Zeichen dafür. Die Natur der Sache, die man berechnet, lehret es ſchon, ob man die poſitive Wurzel, oder die negative, oder beyde gebrauchen kann. und geſuchet hat. Z. E. $\sqrt{25} = \pm 5$; $\sqrt{144} = \pm 12$; $\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$.

Allein auch dieſe Betrachtungen lehren uns, daß man aus einer negativen Größe keine Wurzel ziehen könne, weil es keine dafür giebt. Z. E. $\sqrt{-16}$, da kann man weder $+4$ noch -4 zur Wurzel annehmen. Auf beyde Fälle iſt das Qua-

drat

drat davon + 16, aber man ſuchte hier eine Wurzel, deren Quadrat − 16 war, und die ſich alſo nicht findet.

§. 310. Wir glauben das nöthigſte von der Auszziehung der Quadratwurzel geſagt zu haben. Wir gehen zur Auszziehung der Cubikwurzel. Deren Auszziehung iſt weit mühſamer, aber ſie kommt auch nicht ſo ofte vor, als die Auszziehung der Quadratwurzel. Indeſſen kömmt ſie oft genug vor, ſo daß man daher eine Fertigkeit darin zu erlangen ſich bemühen muß. Man bedienet ſich dabey eben ſowol eines Chifrets, als bey der Quadratwurzel, um daraus die Regel, wie man zu verfahren hat, zu folgern. $a + b$ in die dritte Potenz erhoben, oder $(a + b)^3$ iſt $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, denn man multiplicire würklich:

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
+ ab + b^2 \\
+ a^2 + ab \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 \\
a + b \\
\hline
+ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
+ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

Die dritte Potenz alſo einer Größe, die aus zwey Theilen beſteht, läßt ſich allgemein durch dieſes Chifret ausdrücken, und die Wurzel einer in die dritte Potenz erhobenen Größe durch $(a+b)$.

Wenn wir alſo aus dieſem Chifret die $a+b$ wieder heraus finden können, ſo giebt uns dieſes Verfahren die Regel, wie wir es machen müſſen, wenn wir die Cubikwurzel ausziehen wollen.

Wir wollen es verſuchen:

$$\begin{array}{r|} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a^3 \qquad\qquad\qquad\quad \\ \hline 3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

$3a^2$

Partialprodukte $3a^2b+3ab^2+b^3$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Die erſte Wurzel findet man gleich, ſie iſt $= a$. Wenn man das cubiret, ſo gehet es gegen a^3 auf. Um nun das zweyte Glied der Wurzel oder b zu finden, ſiehet man bald, daß man das erſte Glied der Wurzel quadriren, mit 3 multipliciren, und dann in das folgende Glied des Cubus herein dividiren muß, das giebt $+b$ zum zweyten Theile der Wurzel.

Um zu erfahren, ob dieſer Theil der Wurzel der rechte ſey, muß man 1) a den erſten Theil der Wurzel quadriren, mit dem zweyten Theile multipliciren, und das noch mit 3 multipliciren, das giebt das erſte Partialprodukt, hier $3a^2b$. 2) Man quadriret den zweyten Theil der Wurzel, multipliciret ihn mit den erſten Theile, und noch mit drey, das giebt das zweyte Partialprodukt, hier $3ab^2$. 3) Man cubiret den zweyten Theil der Wurzel, das giebt das dritte Partialprodukt, hier b^3. Dieſe drey Partialprodukte

produkte zieht man nun von dem heruntergeſetzten Reſte ab, und man ſiehet, daß hier alles aufgehet. Alſo die cubiſche Wurzel aus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a + b$. Dieſes und die Betrachtung der cubiſchen Größe überhaupt giebt folgende Regeln bey der Ausziehung der Cubikwurzel aus Zahlen:

1) Man theilet die gegebene Zahl von der rechten Hand nach der linken in Klaſſen, je drey und drey. In die letzte Klaſſe linker Hand können zwey, auch eine Zahl kommen, weil es auch ſolche Cubus nach dem Wurzeltäflein giebt.

2) Man ſuche nun für die erſte Klaſſe an der linken Hand in dem Wurzeltäflein die Wurzel auf, und ſetze die, als den erſten Theil der Wurzel, in den Quotienten. Findet man nicht ſolche Zahl genau in dem Wurzeltäflein, als dieſe in der erſten Klaſſe iſt ſo nehme man die Wurzel von der nächſt kleinern Zahl, die ſich unter den Cubus in dem Wurzeltäflein findet, und ſetze deren Wurzel als den erſten Theil der Wurzel, in den Wurzelquotienten hin.

3) Man cubire dieſe Wurzel, ziehe ſie von der erſten Klaſſe ab, und ſetze den Reſt mit den übrigen Zahlen in ihren Klaſſen herunter.

4) Nun quadrire man den erſten gefundenen Theil der Wurzel, und multiplicire dieſes Quadrat mit 3, und dividire damit in den heruntergeſetzten Reſt. Den

Quo-

Quotienten ſetze man als den zweyten Theil der Wurzel. Man muß aber den Quotienten nicht zu hoch nehmen, weil man noch drey Partialproducte bekömmt, die man von dem heruntergeſetzten Reſte abzuziehen hat.

5) Dieſen zweyten gefundenen Theil der Wurzel nun multipliciret man mit dem quadritten erſten Theil und mit 3. Das giebt das erſte Partialprodukt; deſſen kleineſte oder hinterſte Zahl rechter Hand ſetzet man unter die höchſte oder äußerſte Zahl linker Hand der zweyten heruntergeſetzten Klaſſe.

6) Man quadrirt den zweyten gefundenen Theil der Wurzel, multipliciret ihn mit dem erſten Theile der Wurzel und mit 3, das giebt das zweyte Partialprodukt; deſſen geringſte Zahl ſetzet man unter die mittelſte Zahl der zweyten heruntergerückten Klaſſe, alſo um eine Zahl weiter rechter Hand, als die geringſte Zahl des erſten Partialprodukts.

6) Nun cubire man den zweyten Theil der Wurzel, das giebt das dritte Partialprodukt; deſſen geringſte Zahl man auch um eine Stelle weiter rechter Hand ſetzet, nemlich unter die äußerſte rechter Hand, oder unter die geringſte der zweyten heruntergeſetzten Klaſſe.

8) Dieſe Partialprodukte addire man nun alle zuſammen, und ziehe alsdenn dieſe

dieſe Summe von dem heruntergeſetzten Reſte ab. Hat man nun zwey Klaſſen gehabt, und es geht alles gegen einander auf, ſo iſt die gegebene Zahl ein würklicher Cubus, und die Theile der Wurzel richtig gefunden. Iſt die Summe der Partialprodukte zu hoch, ſo muß man den zweyten Theil der Wurzel um 1 niedriger nehmen, und die ganze Arbeit der Partialprodukte wiederholen, ſo oft bis die Summe der Partialprodukte gleich oder kleiner, als der heruntergeſetzte Reſt iſt. Bleibt alsdenn nach der Subtraktion noch ein Reſt, ſo iſt es kein völliger Cubus. Allein der Unterſchied kann nicht = 1 ſeyn, ſonſt hätte man dieſe 1 bey der Ausziehung gefunden, indem man um 1 den zweyten Theil der Wurzel hätte größer ſetzen können.

9) Hat man nun noch mehr Klaſſen, als zwey, ſo rücket man die nun auch herunter, ſiehet die beyden gefundenen Theile der Wurzel nun als einen an, und quadrirt ſie, multiplicirt ſie mit 3, und dividiret in den Reſt, um das neue b zu finden, da man denn in Anſehung der nunmehr neu zu machenden Partialprodukte eben ſo verfähret, wie die Regeln 5, 6, 7, 8, eben gelehret haben, nur daß die beyden erſten gefundenen Theile der Wurzel jetzt als der erſte allein angeſehn werden.

Exem-

Exempel werden die Sache erläutern, da wir allezeit das cubiſche Chifret neben ſetzen wollen.

§. 311. Der $\sqrt[3]{}$ aus 79507.

$$\begin{array}{r|r|ll} & & a & + \; b \\ 79 & 507 & 4 & \quad 3 \\ a^3 = 64 & ::: & & \\ \hline = 15 & 507 & & \end{array}$$

Diviſor $3a^2 = (48)$

Partialprodukte $\begin{cases} 3a^2b = 144 \\ 3ab^2 = 108 \\ b^3 = 27 \end{cases}$

$$\overline{15507}$$

Nach der erſten Regel theilet man die Zahl in Klaſſen von der rechten zur linken, je drey und drey Zahlen. Nun (zweyte Regel) in dem Wurzeltäflein die cubiſche Wurzel von 79 aufgeſuchet. Es findet ſich aber 79 nicht, alſo nimmt man die Wurzel von dem nächſt kleinern Cubus von 64; die nächſt kleinere Cubikzahl iſt 64, und die cubiſche Wurzel davon = 4. Dieſe 4 in den Quotienten geſetzet, das iſt a oder der erſte Theil der Wurzel. Nach der dritten Regel a cubiret, und von 79 abgezogen. Die andere Klaſſe herunter geſetzet, was nun noch da iſt, iſt $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Nach der vierten Regel nun den neuen Diviſor gefunden. Alſo 4 quadriret, und mit 3 multipliciret; hierein dividiret, um den zweyten Theil der Wurzel zu finden; aber nicht zu groß den Quotienten genommen, doch 3 geht hier an. Nun nach der fünften, ſechſten ſiebenten Regel die Partialpro-

produkte gemacht. Nun nach der achten Regel die Partialprodukte addiret, und dieſe Summe von dem obern Reſte abgezogen. Hier geht alles mit einander auf.

Alſo der $\sqrt[3]{}$ aus 79507 iſt = 43.

Der $\sqrt[3]{}$ aus 34965783.

		$a+b$
(erſte Regel und zweyte)	34 965 783	$a+b$:
(dritte Regel)	$a^3=27$	3 2 7
	7 965	
(vierte Regel) Diviſor	$3a^2=(27)$	
(5, 6, u. 7 Reg.) Partialprodukte.	$3a^2b=54$	
	$3ab^2=36$	
	$b^3=8$	
Summe der Partialprod.	= 5768	
(9te Regel) der Reſt	= 2197 783	
neuer Diviſ. in welchem	$a=32$	
alſo	$3a^2=(3072)$	
Partialprod.	$3a^2b=21504$	
	$3ab^2=4704$	
	$b^3=343$	
Summe der Partialprod.	= 2197783	
der Reſt	= 0000000	

Weil alles aufgeht, ſo iſt 327 die cubiſche Wurzel, und dieſe dreymal mit ſich ſelbſt multipliciret, giebt die Cubikzahl 34965783 zum Produkte.

§. 312. Es geſchiehet ſehr oft, daß man die cubiſche Wurzel nicht genau findet, wenn nemlich endlich ein Reſt überbleibet. Es iſt dieſes ein Beweiß, daß die Zahl keine genaue Cubikgröße iſt. Nun iſt zwar der Fehler, darinn man irret, nie = 1, denn ſonſt hätte man das noch im letzten Theile der Wurzel gefunden. Man kann ſich indeſſen der Wurzel ſo ſehr nähern als man will, wenn man, wie §. 305. bey Ausziehung der Quadratwurzel geſchehen, auch hier Klaſſen der Nullen anhänget, nur müſſen allezeit in jeder Klaſſe drey Nullen ſeyn, und alsdenn die folgenden Theile der Wurzel, die man findet, den vorhergefundenen Theilen als Decimalbrüche angehänget werden. Man wird ſo viel Theile der Wurzel noch in Decimalbrüchen bekommen, als man Klaſſen angehänget hat. Ein Exempel wird dieſes erläutern.

Der $\sqrt[3]{}$ aus 5789436

```
                                           | a + b
                                           | a + b:
                                           | a + b
                         5|789|436         | 179,5 ...
                  a³ =   1|:::|:::
                         4|789|:::
           Diviſor 3a² = (3)  :::
                 ⎧3a²b = 2 1  :::
Partialprodukte. ⎨3ab² = 1 47 :::
                 ⎩  b³ =  343 :::
Summe der Partialpr. = 3913|:::
          der Reſt =    876|436
neuerDiviſor, da a=17
   alſo        3a² =   (86|7)
              ⎧3a²b =  780 3
Partialprod.  ⎨3ab² =   41 31
              ⎩  b³ =      729
   ihre Summe =        822 339
       der Reſt =    540.97|000
neuerDiviſor,nun iſt a=179
            alſo 3a² = (9612|3)
                 ⎧3a²b = 48061|5
Partialprodukte  ⎨3ab² =   1342 5
                 ⎩  b³ =       125
       ihre Summe = 48195 875
          der Reſt =  5901 125
```

Man kann noch ſo viel Decimalbrüche finden, als man will, wenn man Luſt hat, die mühſame Arbeit mehrmal zu wiederholen.

§. 313. Alle die verſchiedenen Arten der Größen, die wir §. 306 und folgende angaben, woraus Quadratwurzeln ſollten gezogen werden, können auch gegeben werden, um Cubikwurzeln daraus zu ziehen. Man verfähret auf die eben gelehrte Art dabey, nur wenn man 1) ganz einzelne Zahlen hätte, hänget man ihnen gleich noch ſo viel Klaſſen der Nullen an, als man noch Wurzeltheile in Decimalbrüchen verlanget.

Z. E. $\sqrt[3]{6}$.

| a + b
| a + b:

6, | 000 | 000 | 1, 81 . . .
$a^3 = 1$ | : : : |

5. | 000 |

Divisor $3a^2 = (|3)$

Partialprodukte $\begin{cases} 3a^2b = 24 \\ 3ab^2 = 192 \\ b^3 = 512 \end{cases}$

ihre Summe = 4832

Reſt = 168 | 000

neuer Diviſor, da a = 18
alſo $3a^2 = (972$

Partialprodukte $\begin{cases} 3a^2b = 972 \\ 3ab^2 = 54 \\ b^3 = 1 \end{cases}$

ihre Summe = 97741

Reſt = 70259

Der $\sqrt[3]{}$ aus 6 iſt alſo 1, 81 . . .

2)

2) Wenn man Zahlen hat, woran ſich ſchon Decimalbrüche befinden. Man theilet die ganzen Zahlen allein ab, von der rechten Hand zur linken, und die Decimalbrüche von der linken zur rechten, und wenn hinten an der rechten Hand noch Zahlen fehlen, daß die Klaſſen nicht voll werden, ſo giebt man noch ſo viel Nullen zu.

Z. E. $\sqrt[3]{126,52}$

126, | 520 | 5,02
$a^3 = 125$
1 | 520
Diviſor $3a^2 = (7|5)$
1 520 | 000
neuer Diviſor, nun iſt $a = 50$
alſo $3a^2 = (750|0)$
Patialprodukte $\begin{cases} 3a^2b = 1\,5000 \\ 3ab^2 = 600 \\ b^3 = 8 \end{cases}$
ihre Summe = 1 506008
Reſt = 13992

3) Wenn man blos Decimalbrüche hat: Man ſetzet in den Wurzelquotienten für den Mangel der Einheit die gewöhnliche Null mit dem Comma, und alsdenn theilet man in Klaſſen von der linken zu der rechten. Fehlen hinten an der rechten Hand noch Stellen in der letzten Klaſſe, ſo erſetzet man die mit Nullen. Sind vorne an der linken Hand, ehe die Zahlen angehen, hinter den Zeichen für den Mangel der Einheit noch Nullen, ſo

ſetzet man in den Wurzelquotienten noch ſo viel Nullen hinter dem Zeichen des Mangels der Einheit, als hier volle Klaſſen der Nullen ſind. Uebrigens verfähret man auf die gewöhnliche Art.

Exempel $\sqrt{0,0000045}$

$$\begin{array}{r|r|r|l} 0, & 000 & 004 & 500 \,|\, 0,016\ldots \\ a^3 = & & 1 & \\ & & 3 & 500 \end{array}$$

Diviſor $3a^2 = (3)$

$$\text{Partialprodukte} \begin{cases} 3a^2b = 18 \\ 3ab^2 = 108 \\ b^3 = 216 \end{cases}$$

ihre Summe $= 3096$

Reſt $= 404$ u. ſ. w.

Aus Brüchen werden aus Zähler und Nenner die Cubikwurzeln gezogen, wenn das Zeichen mitten vor dem Bruche ſtehet, ſonſt kömmt es auch ofte, das man nur aus dem Zähler oder Nenner alleine die Wurzel zu ziehen hat.

Z. E. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$ $\sqrt[3]{\frac{81}{125}} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{125}}$ $= \frac{4,326\ldots}{5}$

Denn aus dem obern läßt ſich der $\sqrt[3]{}$ nicht ganz ausziehen, aber $\frac{81}{\sqrt[3]{125}}$ wäre $= \frac{81}{5} = 16\frac{1}{5}$ und $\frac{\sqrt[3]{81}}{125}$ wäre $\frac{4,326\ldots}{125}$. Ueberhaupt iſt allgemein $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

§. 314.

§. 314. Man kann auch aus Größen, die aus Buchſtaben zuſammengeſetzet ſind, den $\sqrt[3]{}$ ziehen, wenn die Größe ein völliger Cubus iſt. Es geſchiehet gleichfalls nach dem gewöhnlichen Chifret, und wollen wir nur ein Exempel zur Probe hinſetzen, weil es ſelten vorkömmt.

Der $\sqrt[3]{}$ $(m^3+12m^2+48m+64 \;|\; a+b$

$: \; :$

$m^3+12m^2+48m+64 \;|\; m+4$

$a^3 = m^3$

$12m^2+48m+64$

Diviſor $3a^2 = 3m^2$

Partialproducte $\begin{cases} 3a^2b = +12m^2 \\ 3ab^2 = \quad +48m \\ b^3 = \quad\quad +64 \end{cases}$

ihre Summe $= 12m^2+48m+64$

ihr Reſt $= 0 \quad 0 \quad 0$

alſo $m+4$ iſt die Cubikwurzel aus obiger Größe.

§. 315. Die Cubikwurzel aus einer Größe kann ſowol eine Plus- als Minusgröße ſeyn, denn der Cubus aus einer Plusgröße iſt plus, und aus einer Minusgröße iſt er minus. Aber es laſſen ſich aus Minusgrößen auch Cubikwurzeln ziehen, welches nicht angienge, wenn man Quadratwurzeln daraus ziehen wollte. §. 309. Z. E. $\sqrt[3]{125} = 5$ und $\sqrt[3]{-125} = -5$. Denn $-5 \cdot -5 \cdot -5 = -125$.

§. 316. Wenn man ſich ein Chifret für die vierte Potenz machet, oder a + b in die vierte Potenz erhebet, ſo laſſen ſich nach dieſem Chifret auch die biquadratiſchen Wurzeln ausziehen. Es iſt $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Allein es war ſchon mühſam bey Cubikzahlen, und bey biquadratiſchen wird es noch weit mühſamer, weil man hier, wie man ſchon aus dem Chifret ſiehet, vier Partialprodukte bekommt. Wir wollen daher jetzt eine allgemeine Regel lehren, die der große Neuton erfunden hat, nach welcher man aus allen Potenzen die Wurzeln durch eine Reihe von Gliedern erhält, die Potenz ſey übrigens ſo groß oder ſo klein als ſie wolle.

§. 317. Weil man hiebey die Potenzen des **Binomii** oder einer Größe, die aus zwey Gliedern, als a + b iſt, beſtehet, gebrauchet, ſo wollen wir unſern Leſern zeigen, wie ſie ganz leicht eine jede binomiſche Größe zu jeder verlangten Potenz erheben können. Weil wir hier aber keinen förmlichen Beweiß geben können, da der Beweiß am leichtiſten aus der Differentialrechnung geführet wird, weil dieſer auch bey negativen Exponenten gilt, ſo wollen wir durch die Induktion zeigen, wie man in den Gliedern die Potenzen des a und b, imgleichen auch die Coefficienten, die ſie in Zahlen haben, beſtimmen und ordnen müſſe. Um dieſes zu zeigen, wollen wir a + b bis zur zehnten Potenz erheben, und im beyſtehenden Täflein dieſe verſchiedenen Potenzen anzeigen. Wir wiſſen ſchon, daß, wenn a + b mit a + b mul-

multipliciret wird, die zweyte Potenz davon entſtehe. Multipliciret man dieſes Produkt wieder mit $a+b$, ſo entſtehet die dritte Potenz. Das Produkt wieder mit $a+b$ multipliciret, giebt die vierte Potenz, u. ſ. w.

Daher ſind die Potenzen von $a+b$

erſte Potenz $a+b$

zweyte Potenz $a^2+2ab+b^2$

dritte Potenz $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

vierte Potenz $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

fünfte Potenz $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

ſechſte Potenz $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

ſiebente Potenz $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

achte Potenz $a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$

neunte Potenz $a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$

zehnte Potenz $a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$

Wenn man ein ſolches Binomium nimmt, wo ein Glied das Minuszeichen hat, oder negativ iſt, als $a-b$, ſo werden die Potenzen und ihre

Coefficienten eben ſo fortgehen, nur daß alsdenn alle geraden Glieder das Minuszeichen bekommen, als das zweyte, vierte, ſechſte, achte Glied, wo nemlich die ungraden Potenzen der b ſich einfinden.

§. 318. Wenn man dieſe Tabelle betrachtet, ſo wird man leicht bemerken, daß in der erſten Potenz, wie auch ſo ſeyn muſte, a und b blos Exponenten = 1 oder in der erſten Potenz ſind. In allen andern Potenzen findet man, daß im erſten Gliede a in der höchſten Potenz alleine ſey, nachher mit b multipliciret, immer um eine Potenz geringer werde, bis es endlich ohne Potenzexponenten iſt; b aber erſt im zweyten Gliede ohne Potenzexponenten anfange, nachher immer um eins in der Potenz ſteige, bis es endlich die höheſte Potenz erreichet hat, da die Reihe denn aufhöret. Alſo kunſtmäßig zu reden, die Exponenten der b nehmen zu, ſo wie die Exponenten der a abnehmen.

§. 319. Es wird alſo ſehr leicht ſeyn, die Glieder einer Potenz zu finden, ſie ſey ſo hoch ſie wolle, man richtet ſich nur nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen. So wären die Glieder von $a + b$ in der zwölften Potenz: $a^{12}, a^{11}b, a^{10}b^2, a^9b^3, a^8b^4, a^7b^5, a^6b^6, a^5b^7, a^4b^8, a^3b^9, a^2b^{10}, ab^{11}, b^{12}$. Man ſiehet auch daraus, wie aus allen vorigen, daß man immer ein Glied mehr bekömmt, als die Zahl der verlangten Potenz iſt. Bey der vierten Potenz hat man fünf Glieder, bey der ſechſten

ſieben

ſieben Glieder, und ganz allgemein, wenn man die Zahl der Potenz = m ſetzet, immer m + 1 Glieder. Es kommt nun darauf an, daß wir die Coefficienten finden. Wir ſehen aus dem Täflein bey allen Potenzen, daß allezeit das zweyte Glied der Reihe die Zahl zum Coefficienten hat, als der Exponens der vorhergehenden höchſten Potenz von a, oder des erſten Gliedes in der Reihe geweſen iſt. So iſt bey der dritten Potenz der Coefficient des zweyten Gliedes = 3; bey der fünften = 5; und a hatte auch in dem erſten Gliede eben die Zahl zum Exponenten ſeiner Potenz. Der folgenden Glieder Coefficienten ſiehet man entſtehen auf folgende Art. Man multipliciret jedes Glied, vom dritten Gliede an, mit allen Exponenten der Potenzen der vorhergehenden Glieder, welche ſich an a befanden, nur die Potenzen dieſes Gliedes von a nicht mit, und dividiret dieſes Produkt mit dem Produkt aller Exponenten der b der vorhergehenden Glieder, und auch dieſes Gliedes ſelbſt. Oder wenn man vom 2ten Gliede anfänget, ſo gilt dieſe Regel gleichfalls, und ſo findet man alle Coefficienten für alle Glieder. Z. E. wir wollen die 6te Potenz nehmen. Ihre Glieder waren: (ſiehe das vorhergehende.)

$$a^6,\ a^5b,\ a^4b^2,\ a^3b^3,\ a^2b^4,\ ab^5,\ b^6,$$

Dazu die Coefficienten geſucht. Für das 2te Glied oder für a^5b. Nach der Regel nimmt man nun das Produkt der Exponenten der vorhergehenden Potenzen von a, nur die Potenz dieſes Gliedes von a nicht mit, und dividiret ſie durch

das Produkt der Exponenten der Potenzen der vorhergehenden Glieder von b, dieſes Gliedes Potenz mitgenommen. Es war vorher nur ein Glied a^6. In dem Gliede war gar kein b, alſo auch keine Potenz davon in dieſem zweyten, aber b oder b^1 das muß man nun zum Produkte des Diviſors mitnehmen. Folglich der Coefficient von dem zweyten Gliede wird ſeyn $= \frac{6}{1}$ vom dritten Gliede: die Potenzen der vorhergehenden Glieder von a waren 6 und 5, dieſes Gliedes Potenz nicht mit; und die Potenzen der vorhergehenden Glieder von b dieſes Gliedes Potenz der b mit = 1 und 2. Alſo der Coefficient für dieſes Glied $= \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 15$. So iſt auf eben die Art vom vierten Gliede der Coefficient $\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20$.

Vom fünften Gliede der Coefficient $= \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 15$

Vom ſechſten Gliede der Coefficient $= \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 6$.

Vom ſiebenten Gliede der Coefficient $= \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 1$, welchen Coefficienten man nicht auszudrücken pflegt, weil 1 nicht multipliciret. Alſo hatten wir die Coefficienten für $(a+b)^6$ gefunden, und die Reihe wäre nun $a^6 + \frac{6}{1} a^5b + \frac{6\cdot5}{1\cdot2} a^4b^2 + \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} a^3b^3 + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} a^2b^4 + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} ab^5 + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} b^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, welches mit dem Täflein übereintrift, und jeder auch durch die Multiplikation finden kann.

Auf dieſe Art können alle Coefficienten aller Glieder aller gegebenen Potenzen gefunden werden. Wenn man dieſes genau betrachtet, ſo ſiehet man,

jedes

jedes Glied hat ſowol im Nenner als in dem Zähler, woraus ſein Coefficient wird, eine Zahl weniger, woraus beyde Produkte entſtehen, als das wie vielſte Glied es iſt. So hat das vierte Glied nur drey Zahlen im Zähler, die mit einander ſollen multipliciret werden, und auch drey im Nenner, die auch ſollen multipliciret werden. Ferner fangen die Zahlen allezeit im Zähler von der an, zu der wie vielſten Potenz $a+b$ ſoll erhoben werden, und jede Zahl iſt um eins geringer, oder ſie folgen auf einander in einer natürlichen Ordnung, aber rückwärts. Im Nenner aber fangen ſie allezeit von 1 an, und folgen in einer natürlichen Ordnung auf einander. Da dieſe Bemerkung ganz allgemein iſt, ſo iſt es daher auch ſehr leicht, für jedes Glied einer gegebenen Potenz die Coefficienten, und das ganze Glied alſo zu finden. Wir haben ſchon geſehen, wie viel Glieder jede Potenz hat. Erſtlich müſte man nun die Potenzen der a und b finden, die Potenz der b iſt, wie man geſehen hat, allezeit um 1 geringer als die Zahl des Gliedes iſt; die Potenz der a findet man in jedem Gliede, wenn man von der höchſten Potenz ſo viel abzieht, als die Potenz der b in dem Gliede iſt. Z. E. das 7te Glied von $(a+b)^{10}$, das iſt im 7ten Gliede b^6. Alſo a muß in dem Gliede ſeyn, $a^{10-6}=a^4$. Alſo beyde zuſammen a^4b^6. Das 5te Glied von $(a+b)^7$, darin iſt b in der Potenz b^4, alſo muß die Potenz für a ſeyn $a^{7-4}=a^3$, alſo beyde a^3b^4. Eben ſo iſt das 8te Glied von $(a+b)^{10}=a^{10-7}b^7=a^3b^7$. Ich ſollte aber auch nun die Coefficienten finden.

Z. E.

z. E. für das 7te Glied der 10ten Potenz von $a+b$. Erſtlich iſt das Glied ſelbſt a^4b^6, und die Coefficienten müſſen nun das Produkt von 6 Zahlen im Zähler von 10 an, und immer um ein geringer ſeyn, und im Nenner von 1 bis 6 ſeyn. Alſo das 7te Glied von $(a+b)^{10} = \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6} a^4b^6 = 210\, a^4b^6$.

Das fünfte Glied von $(a+b)^7$ iſt alſo $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} a^3b^4 = 35\, a^3b^4$.

§. 320. Wir wollen nunmehro dieſes ganz allgemein betrachten. Es ſoll die Potenz, wozu ein Binomium erhoben iſt, $= m$ ſeyn. Da nach §. 319 und dem vorhergehenden Paragraphen, die Potenz der a immer in den Gliedern um 1 fällt, und die Potenz der b im 2ten Gliede mit 1 anfängt, und in jedem Gliede um 1 ſteigt; ferner die Coefficiente vom 2ten Gliede der Exponens der höchſten Potenz iſt, durch 1 dividiret, und ſo immer in den folgenden Gliedern die Coefficienten das Produkt eines Bruches ſind, da bey jedem Gliede im Zähler, die nächſt vorhergehenden Zahlen, die von der höchſten Potenz anfingen, immer mit einer um 1 geringern Zahl multipliciret werden, und im Nenner eben ſo viel in der natürlichen Ordnung fortgehende mit einander multiplicirte Zahlen, das Produkt des Nenners ausmachen; ſo würde alſo ganz allgemein das Binomium durch ſolche Reihe vorgeſtellet werden können.

$$(a+b)^m = a^m, + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3$$
$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.} a^{m-4}b^4$$
$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5}b^5$$ u. ſ. w. Die Reihe wird aufhören, oder alle Glieder der Potenz ganz hingeſchrieben ſeyn, wenn die Zahl, welche man von dem Exponens der a abziebt, dem m gleich iſt. Z. E. wenn $m = 4$ wäre, ſo hörte die Reihe auf, wenn man nun $a^{m-4}b^4$ hätte, denn das wäre alsdenn $a^{4-4}b^4 = a^0b^4$, aber eine Größe in der Potenz 0 iſt $= 1$. §. 143. Alſo $a^0b^4 = 1b^4 = b^4$, dieſes iſt das letzte Glied, welches auch keinen Coefficientien hat, wie wir ſchon in den vorhergehenden Paragraphen geſehen haben: b iſt alsdenn in der höchſten Potenz, wozu das ganze Binomium erhoben werden ſollte.

Da m alle mögliche Größen vorſtellen kann, ſo kann man ſich auch leicht vorſtellen, daß es auch einen Bruch vorſtellen kann, und man wird, wenn man ſich das, was §. 145 gelehret war, noch erinnert, es alſo leicht begreifen können, daß man alſo auch einen Radix durch dieſes Binomium ausziehen könne. Z. E. es ſey $m = \frac{1}{3}$, ſo wird $(a+b)^m = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ ſeyn, aber das iſt ja ſoviel als $\sqrt[3]{(a+b)}$ wenn $m = \frac{1}{3}$, alſo $(a+b)^m = (a+b)^{\frac{1}{3}}$

=

$= \sqrt[3]{(a+b)}$ oder die Cubikwurzel. Es ſey $m = \frac{3}{4}$, alſo $(a+b)^m = (a+b)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(a+b)^3}$.

§. 321. Wir wollen nun nach allen dieſen Paragraphen einige Exempel geben. Wir werden nachher noch eine bequemere Formel für das Binomium anzeigen. Es ſoll 5 in die 6te Potenz erhoben werden. Alſo wäre nach $(a+b)^m$ $m = 6$ und $a + b = 5$. Die fünfte kann man nun theilen wie man will. Es ſoll einmal $a = 2$ und $b = 3$ ſeyn. Man ſchreibe ſich nun die allgemeine Formel des vorigen Paragraphen auf, und ſetze darnach die Reihe, ſo wird $(2+3)^6 = 2^6 + \frac{6}{1} 2^5 . 3 + \frac{6.5}{1.2} 2^4 . 3^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3} 2^3 . 3^3 + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} 2^2 . 3^4 + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} 2 . 3^5 + \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} 3^6 = 2^6 + 6 . 2^5 . 3 + 15 . 2^4 . 3^2 + 20 . 2^3 . 3^3 + 15 . 2^2 . 3^4 + 6 . 2 . 3^5 . + 3^6$ Wenn die Größen würklich zu Potenzen erhoben, $= 64 + 6 . 32 . 3 + 15 . 16 . 9 + 20 . 8 . 27 + 15 . 4 . 81 + 6 . 2 . 243 + 729$. würklich multipliciret $= 64 + 576 + 2160 + 4320 + 4860 + 2916 + 729$, addirt 15625.

Man wird ſagen, daß man weit geſchwinder 5 auf die gewöhnliche Art hätte zur 6ten Potenz erheben können; das iſt hier ſehr wahr, allein es giebt weit ſchwerere Exempel, da einem dieſes treflich zu ſtatten kömmt, und vorzüglich bey Ausziehung der Wurzeln von einem großen Exponenten. Exempel davon. Man ſoll die $\sqrt{\ }$ aus 6 ziehen; alſo $(a+b)^m$ hier muß $a + b = 6$, und $m = \frac{1}{2}$ ſeyn. Wir wollen a als 4 und b als 2 annehmen. Folglich hätte man nun die Reihe des Binomiums von $(4+2)^{\frac{1}{2}}$ zu ſetzen. Schreibt man nun in

der

der allgemeinen Formel des Binomium §. 320 anſtatt a und b und m, dieſe gegebenen Werthe, welches man leicht kann, wenn man dieſes Chiffret für ſich nimmt, ſo bekömmt man folgende Reihe $(4+2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} 4^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}-1}{1 \cdot 2} \cdot 4^{\frac{1}{2}-2} 2^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}-1 \cdot \frac{1}{2}-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} 4^{\frac{1}{2}-3} 2^3 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}-1 \cdot \frac{1}{2}-2 \cdot \frac{1}{2}-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 4^{\frac{1}{2}-4} \cdot 2^4$ u. ſ. w.

Dieſes iſt, wenn man die Coefficienten gehörig multipliciret und dividiret, $= 4^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 4^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2 - \frac{1}{8} \cdot 4^{\frac{1}{2}-2} 2^2 + \frac{1}{16} \cdot 4^{\frac{1}{2}-3} \cdot 2^3 - \frac{5}{128} 4^{\frac{1}{2}-4} \cdot 2^4$ u. ſ. w.

Aber wir werden uns noch erinnern, daß $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, und daß man anſtatt $a^{\frac{1}{2}-1}$ ſetzen könne, $\frac{\sqrt{a}}{a}$ anſtatt $a^{\frac{1}{2}-2}$ ſetzen könne $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$ weil, um es zu wiederholen, von den Exponenten der Potenzen etwas abziehen, eben ſo viel iſt, als ſie mit einer Potenz dividiren, die eben ſo groß iſt, als die abgezogene Zahl §. 139. Folglich wird daher dieſe Reihe $\sqrt{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4} \cdot 2}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{4}}{4^2} \cdot 2^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{\sqrt{4}}{4^3} \cdot 2^3 - \frac{5}{128} \cdot \frac{\sqrt{4}}{4^4} 2^4$ . . Dieſes iſt $= 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot 2, - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{16} \cdot 4, + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{64} \cdot 8 - \frac{5}{128} \cdot \frac{2}{256} \cdot$

16

16 u. ſ. w $= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ u. ſ. w. Addirt man die Plusglieder und die Minusglieder zuſammen, und ziehet die Minusgröße von der Plusgröße ab, ſo bekömmt man an Plusgrößen $\frac{161}{64}$ und an Minusgrößen $\frac{69}{1024}$. Dieſe Größen unter einerley Benennung gebracht, giebt $\frac{2576 - 69}{1024} = \frac{2507}{1024} = 2\frac{459}{1024}$, oder in Decimalbrüchen $= 2,448..$ welches der Quadratwurzel aus 6 ſchon ſehr nahe iſt. Weil dieſe Wurzel ſich nicht völlig ausziehen läßt, ſo wäre die Reihe nie zu Ende gekommen, aber auch immer näher der wahren Größe. Man wird nun freylich wohl Quadrat- und Cubikwurzeln nicht auf die Art ausziehen wollen, allein, wenn Wurzeln von höhern Exponenten ſollen ausgezogen werden, ſo iſt die Binomium dazu ſehr nützlich, und daher wollen wir nun eine bequemere Formel für das **Binomium** ſuchen.

§. 322. Wir wollen aus der Urſache die Formel des Binomii nochmal hinſchreiben.

$$a^m + \frac{ma^{m-1}}{1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 +$$

$$\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$$

$a^{m-4} b^4$ u. ſ. w.

Weil wir wiſſen, daß $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$ und $a^{m-2} = \frac{a^m}{2}$ §. 139 u. ſ. w. ſo können wir, wenn wir

Glei-

Gleiches für Gleiches ſetzen, die Reihe alſo ſchreiben:

$$a^m + \frac{ma^m b}{a} + \frac{m.m-1}{1.2}\,\frac{a^m b^2}{a^2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\,\frac{a^m b^3}{a^3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\,\frac{a^m b^4}{a^4}$$ u. ſ. w.

Wenn wir dieſe Reihe recht betrachten, ſo finden wir in allen Gliedern nach dem erſten den Ausdruck $\frac{b}{a}$. Denn man nehme, welches Glied man wolle, im zweyten ſieht man ihn gleich, im dritten findet man $\frac{b^2}{a^2}$, das iſt aber $\frac{b}{a}.\frac{b}{a}$. Im vierten $\frac{b^3}{a^3}$, das iſt aber $\frac{b}{a}.\frac{b}{a}.\frac{b}{a}$ u. ſ. w.

Wir wollen nun ein für allemal $\frac{b}{a} = Q$ nennen. So wird die Reihe nun alſo ſeyn, wenn man anſtatt $\frac{b}{a}$ die Q, und anſtatt $\frac{b^2}{a^2}$ die Q^2 u. ſ. w. ſetzet, $a^m + \frac{m}{1}\,a^m Q + \frac{m.m-1}{1.2}\,a^m Q^2$ $+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\,a^m Q^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$ $a^m Q^4$ u. ſ. w.

Hier bemerken wir ferner, daß das erſte Glied in dem 2ten, das 2te in dem 3ten, und das 3te in dem 4ten u. ſ. w. enthalten iſt, oder deutlicher: daß das zweyte Glied entſteht durch die

Multiplikation des erſten Gliedes a^m mit $\frac{m}{1}Q$.

Das dritte Glied entſteht durch die Multiplikation des zweyten Gliedes mit $\frac{m-1}{2}Q$. Das vierte Glied entſteht durch die Multiplikation des dritten mit $\frac{m-2}{3}Q$. u. ſ. w. Da man ſchon ſiehet, wie das fortgehet.

Nun wollen wir das erſte Glied A, das zweyte Glied B, das dritte C, das vierte D u. ſ. w. nennen, ſo ſiehet man ſchon, wie nun die Reihe ausgedrücket wird, alſo das erſte Glied oder $a^m = A$.

Alſo das 2te, welches aus der Multiplikation des erſten und mQ beſtehet $= \frac{m}{1}AQ = B$.

Das dritte daher, welches aus der Multiplikation des 2ten und $\frac{m-1}{2}Q$ beſteht, iſt $= \frac{m-1}{2}BQ = C$.

Das vierte daher $\frac{m-2}{3}CQ = D$. Nun wird die Reihe:

$$a^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ = \frac{m-3}{4}DQ$$ u. ſ. w. Wobey man nichts zu merken

ken hat, als daß $Q = \frac{b}{a}$ und die großen Buchſtaben A, B, C, D u. ſ. w. in jedem Gliede allezeit den Werth des vorhergehenden Gliedes anzeigen. Dieſe Formel muß man ſich bekannt machen, weil man den großen Nutzen des Binomii erſt erkennen wird, wenn man in der Mathematik weiter gekommen iſt. Man muß hiebey immer auch bedenken, daß m ſowol ein Bruch als eine ganze Zal ſeyn kann, ſie wird allezeit ein Bruch bey Auszíehung der Wurzel durch dieſe Formel, wie wir ſchon einſehen werden.

§. 323. Wir wollen nun dieſes durch ein Paar Exempel erläutern. Man ſoll die Größe 12 zur dritten Potenz erheben. (Wir wählen mit Vorſatz nur leichte Exempel).

Wir wollen 12 in $4 + 8$ theilen, alſo $a = 4$ und $b = 8$, folglich $\frac{b}{a} = \frac{8}{4} = 2$. Das iſt nun Q, alſo iſt hier $Q = 2$.

Ferner iſt hier $m = 3$.

Folglich $a^m = 4^3 = 64 = A$.

$mAQ = 3 \cdot 64 \cdot 2 = 384 = B$.

$\frac{m-1}{2} BQ = 1 \cdot 384 \cdot 2 = 768 = C$.

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 2 = 512 = D$.

$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{0}{4} \cdot 512 \cdot 2 = 0$.

Beym vorhergehenden Gliede endiget ſich die Reihe, weil dieſes letztere Glied mit Null multipliciret wird, welches das ganze Glied zu Null machet, und daher würden auch alle folgenden Glieder = Null werden, die erhaltenen Zahlen addiret, giebt 1728, welches auch $= 12^3$ iſt. Man ziehe den $\sqrt{2}$. Wir wollen 2 in zwey Theile theilen, es ſey $= 1 + 1$. Alſo ſollen wir ausziehen, $\sqrt{(1+1)} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$.

Hier iſt $m = \frac{1}{2}$ $Q = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$, und die Reihe wird nun auf folgende Art fortgehen.

$$+a^m = 1^{\frac{1}{2}} = +1 = A.$$
$$+\frac{m}{1} = AQ = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = +\tfrac{1}{2} = B.$$
$$+\frac{m-1}{2}\, BQ = -\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = -\tfrac{1}{8} = C.$$
$$+\frac{m-2}{3}\, CQ = -\tfrac{1}{2} \cdot -\tfrac{1}{8} \cdot 1 = +\tfrac{1}{16} = D.$$
$$+\frac{m-3}{4}\, DQ = -\tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{1}{16} \cdot 1 = -\tfrac{5}{128} = E.$$
$$+\frac{m-4}{5}\, EQ = -\tfrac{7}{10} \cdot -\tfrac{5}{128} \cdot 1 = +\tfrac{35}{1280} = F.$$
$$+\frac{m-5}{6}\, FQ = -\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{35}{1280} \cdot 1 = -\tfrac{105}{5120} = G.$$

u. ſ. w.

Alſo der $\sqrt{2}$ wäre $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{35}{1280} - \frac{105}{5120}$ u. ſ. w. In einer unendlichen

Reihe

Reihe, die ſich hier aber ſchon ziemlich dem wahren Werthe wird genähert haben, alſo ſchon abgebrochen werden kann.

Wenn man die Plusgrößen addiret, und alsdenn alle zuſammen addirte Minusgrößen davon abzieht, dabey, wie es ſich verſteht, beyderley Brüche unter einerley Benennung bringet, ſo bekömmt man $1\frac{415}{1024}$, in Decimalbrüchen, 1,405.. welches von dem $\sqrt{2}$ nicht weit entfernet ſeyn wird.

§. 324. Wir beſchließen hier dieſe Lehre, die ſehr weitläuftig und ausgebreitet iſt: ich habe mehr eine hiſtoriſche Einleitung davon geben, als ſie weitläuftig aus einander ſetzen wollen. Ich halte dieſe Art Rechnung faſt noch zu ſchwer für die Leute, dafür ich jetzt ſchreibe, ich habe daher davon, wie man durchs Binomium vielfache Wurzeln ausziehet, wie man negative Potenzen dadurch erhebet, alſo z. E. $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2}$ oder auch, wie man daraus den Radix ziehet, als z. E. $(a+b)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(a+b)^3}}$ u. ſ. w. nichts geſagt, wenn man dieſes aufmerkſam durchgedacht, kann man Hrn. Hofrath Käſtners Mathematik, Hrn. Eulers Algebra ꝛc. darüber mit Nutzen nachleſen.

Das ſechszehnte Kapitel.

Fernere Betrachtungen von Wurzelgrößen, von Irrationalgrößen und unmöglichen, oder imaginären Größen.

§. 325. Wir haben ſchon Begriffe überhaupt von Wurzelgrößen gegeben, auch würklich manches von den Irrationalgrößen geſagt, ohne ſie zu nennen, wie man das in der Lehre von der Diviſion der Potenzen, von der Ausziehung der Wurzeln u. ſ. w. finden, und wenn man dieſes, was wir jetzt ſagen wollen, durchgeleſen hat, leicht einſehen wird.

Dieſes ganze Kapitel ſey nun ihnen vorzüglich gewidmet, und wir bitten unſern Leſer, es aufmerkſam zu erwegen, weil dieſe Art Rechnungen ſehr häufig vorkommen. Was Wurzelgrößen überhaupt ſind, wiſſen wir. **Irrationalgrößen** aber, oder **Irrationalzahlen** ſind ſolche **Wurzelgrößen**, die ſich nicht genau ausdrücken laſſen, ob man ſie ſich ſchon würklich vorſtellen kann. Auch dieſes wiſſen wir ſchon. So ſind z. E. der $\sqrt{12}$, der $\sqrt{15}$ Irrationalzahlen. Man kann ſich allerdings eine Größe vorſtellen, welche mit ſich ſelbſt multipliciret 12, 15 zum Produkt gebe, allein, man kann ſie durch Zahlen nicht genau

genau genug ausdrücken, als ob man ſich ſchon ihrem Werthe durch Darſtellung der Wurzel in Decimaltheilen, wie wir gelehrt haben, ſo weit man immer will, nähern kann. Sie heißen Irrationalzahlen von dem lateiniſchen Worte, welches Rechnen bedeutet. Man findet auch wol den Ausdruck für ſie: Surdiſche Zahlen. Man kann ſich auch leicht vorſtellen, daß es Wurzeln von allen möglichen Potenzen in großer Menge giebt, die Irrationalzahlen ſind.

Z. E. $\sqrt[3]{9}$, der $\sqrt[4]{17}$, der $\sqrt[5]{126}$. u. ſ. w. ſind gewiß Irrationalzahlen.

§. 326. Um alles deutlich aus einander zu ſetzen, wollen wir überhaupt die ganze Wurzelrechnung durchnehmen, und nur das, was hin und wieder vorgekommen ſeyn mag, berühren. Was das Zeichen $\sqrt{}$ bedeute, was eine Zahl in dem Zeichen bedeute, wiſſen wir ſchon, §. 90, 145. Wir wiſſen auch ſchon, wie man anſtatt deſſen eine Potenz an den Kopf der Größe ſetzen könne, und daß z. E. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ §. 145 und folgende.

Wir wiſſen auch ſchon, wie man die Wurzelgrößen unter einerley Benennung bringen, und daß ſie einen Wurzelexponenten bekommen §. 226 ernten wir, daß $a^{\frac{n}{r}}$ und $a^{\frac{s}{t}} = a^{\frac{nt}{rt}}$, $a^{\frac{rs}{rt}} = \sqrt[rt]{a^{nt}}$, $\sqrt[rt]{a^{sr}}$, §. 226. und folgende.

Wir wiſſen, daß, wenn man das Wurzelzeichen für ganz große zuſammengeſetzte Größen ſetzet, z. E. $\sqrt[3]{(a^2 - 3ax + b)}$, ſo bedeutet es, daß aus der ganzen Summe dieſer Größe der $\sqrt[3]{}$

ausgezogen werden ſoll. Und es wäre gleichfalls $= (a^2 - 3ax + b)^{\frac{1}{3}}$. Wenn man aber eine Größe hätte, welche aus der Multiplikation entſtanden, oder doch aus Faktoren entſtanden zu ſeyn, gedacht werden kann, für welchen ein Wurzelzeichen ſtehet, ſo haben alle einzelne Faktoren dieſes Wurzelzeichen. Z. E. $\sqrt{ab}$ wäre $\sqrt{a} . \sqrt{b}$, und der $\sqrt{48}$ wäre $\sqrt{4} . \sqrt{4} . \sqrt{3}$. Es wird dieſes jedem leicht begreiflich ſeyn, wenn man nur an die Erhebung der Größen zu Potenzen wieder ſich erinnert, denn da $(ab)^2 = a^2b^2$, weil $(ab)^2$ durch $ab . ab$ entſtanden, ſo muß auch $(ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$ ſeyn, alſo $\sqrt{ab} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$. Man ſiehet ein, daß das für alle mögliche Wurzelzeichen gelten muß. Wir gehen nun weiter.

§. 327. Man kann Größen unter das Wurzelzeichen ſetzen, unter welches man will, ohne daß ihr Werth im mindeſten verändert werde, wenn man ſie nur zu den Potenzen erhebet, als der Exponens des Wurzelzeichens iſt, worunter man ſie ſetzen will. Z. E. man wollte a^2b unter das $\sqrt[3]{\ }$ bringen, ſo wäre das $\sqrt[3]{a^6b^3}$. Hier iſt a^2b zur dritten Potenz erhoben, alſo muß der $\sqrt[3]{\ }$ daraus $= a^2b$ ſeyn, oder $\sqrt[3]{a^6b^3} = a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{3}{3}} = a^2b$, alſo iſt die Größe nichts geändert. Es iſt dieſes ein Kunſtgrif, der die Rechnung öfters ſehr erleichtert. Wir wollen daher noch einige Exempel davon hinſetzen, und dadurch zugleich zeigen, wenn ſchon ein Wurzelzeichen ſich bey der Größe befindet, wie die ganze Größe darunter zu bringen. Z. E. $b\sqrt{a}$ iſt

iſt $= \sqrt{ab^2}$. Man hat b hier zu der Potenz erhoben, daß, wenn die Wurzel, die a hatte, auch aus ihr gezogen wurde, ſie wieder b wurde. Denn der $\sqrt{ab^2} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{2}} = b\sqrt{a}$. Mit jeder Zahlengröße, die man in Faktores zerlegt, kann man eben ſo verfahren, und ſie auch ändern, wenn es die Rechnung erfordert, und die Faktores es erlauben. Z. E. man ſoll 12 unter das $\sqrt[3]{}$ bringen. Das könnte auf verſchiedene Art geſchehen. Es wäre $= \sqrt[3]{12^3} = \sqrt[3]{1728}$, oder auch da $12 = 2.6 = \sqrt[3]{2^3.6^3} = \sqrt[3]{8.216} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{216}$ und ſo auf vielerley Art.

§. 328. Man kann aber auch Größen, die unter dem Wurzelzeichen ſtehen, öfters ganz, oder auch zum Theil davon befreyen. Sind es Potenzen von eben dem Exponens, als das Wurzelzeichen hat, oder laſſen ſich die Wurzeln ausziehen, ſo zieht man die Wurzel daraus, und ſetzet ihren Werth hin. Z. E. $\sqrt[5]{a^5} = a^{\frac{5}{5}} = a$; $\sqrt[3]{a^3b^3} = ab$. $\sqrt[3]{64} = 4$ u. ſ. w. Sind es aus Faktoren zuſammengeſetzte Größen, ſo geht es mannichmal an, daß einer oder der andere Faktor von dem Wurzelzeichen befreyet werden kann, weil ſich die Wurzel daraus ziehen läſſet, und das thut man alsdenn, und ſetzet nur noch vor die andere das Wurzelzeichen. Sind es Zahlengrößen, ſo verwandelt man ſie in Faktoren, und verfähret dann eben ſo. Alles dieſes gründet ſich auf die Lehre von Erhebung und Diviſion der Potenzen. Z. E.

$\sqrt{a^2b} = a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{b}$, der $\sqrt[3]{a^6b^3c^4} = c^{\frac{6}{3}} b^{\frac{3}{3}} a^{\frac{4}{3}}$ $= a^2b\sqrt[3]{c^4}$, der $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{8.7} = \sqrt[3]{8} . \sqrt[3]{7}$ $= 8^{\frac{1}{3}} . 7^{\frac{1}{3}} = 2 . 7^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{7}$.

Man ſiehet, daß dieſes vortreflich bey Irrationalgrößen gebraucht wird, denn bey andern iſt es nicht nöthig, weil ſich daraus die Wurzel ziehen läßt. Z. E. $\sqrt{45}$. Die Wurzel iſt würklich irrational, aber $45 = 9 . 5$. alſo $\sqrt{45} = \sqrt{9.5}$ $= 9^{\frac{1}{2}} . 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} . \sqrt{5} = 3 . \sqrt{5}$.

$\sqrt{27} = \sqrt{9.3} = \sqrt{9} . \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64.3} = \sqrt[3]{64} . \sqrt[3]{3} = 3 . \sqrt[3]{3}$.

$\sqrt[4]{486} = \sqrt[4]{81.6} = \sqrt[4]{81} . \sqrt[4]{6} = 3\sqrt[4]{6}$.

$2\sqrt{32} + 4\sqrt{288} - \sqrt[3]{64} = 2\sqrt{16.2} + 4\sqrt{36.8} - 4$ $= 2 . 4\sqrt{2} + 4 . 6\sqrt{2.4} - 4 = 8\sqrt{2} + 48\sqrt{2} - 4$ $= 56\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{128} = 4 - \sqrt[3]{8 . 16} =$ $4 - \sqrt[3]{8 . 8 . 2} = 4 - 4\sqrt[3]{2}\sqrt{48} + \sqrt{512} =$ $\sqrt{3 . 16} + \sqrt{4 . 128} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{4 . 32} =$ $4\sqrt{3} + 4\sqrt{.4 . 8} = 4\sqrt{3} + 8\sqrt{8} = (\sqrt{3} + 2\sqrt{8})4$.

$\sqrt[3]{1728} + 3\sqrt[4]{81} - 2\sqrt{64} = \sqrt[3]{8 . 216} +$ $3 . 3 - 2 . 8 = 2\sqrt[3]{8 . 27} + 3 . 3 - 2 . 8 = 2 . 2 . 3$ $+ 3 . 3 - 2 . 8 = 12 + 9 - 16 = 21 - 16 = + 5$.

Man ſiehet bey allen Exempeln, daß man geſuchet hat einen Faktor, worin die Größe zerlegt war, zu bekommen, der ein Quadrat, oder Cubus

Cubus oder Biquadrat ꝛc. war, woraus ſich die Wurzel ziehen ließ. Es iſt aber dabey nothwendig, daß man ſie mannichmal durch manche Verwandlung zu dieſer Veränderung vorbereite, die man aus weiterm Studiren dieſer Materie, und aus Leſung mehrerer Schriften lernen wird. Nur ein Exempel, um einige Begriffe davon zu geben. $\sqrt{(a^2y + 2ayz + z^2y)}$. Weil hier y der gemeinſchaftliche Faktor aller drey Größen iſt, ſo kann dieſes alſo verändert werden $= \sqrt{(a^2 + 2az + z^2)y}$, aber aus dem erſten läßt ſich die Wurzel ausziehen, ſie iſt $a + z$. Alſo die Größe iſt $= (a + z)\sqrt{y}$.

§. 329. Sehr oft trift es auch, daß man auch Brüche, die unter dem Wurzelzeichen ſtehen, findet, die irrational ſind. Man kann ſie davon zum Theil befreyen, ſo, daß man ihren Zähler oder Nenner ganz rational mache, welches ſich darauf gründet, daß Zähler und Nenner, mit einerley Zahl multipliciret, den Bruch nicht ändert. Man multipliciret alsdenn Zähler und Nenner beyde entweder mit der Größe des Zählers, oder des Nenners, nachdem man nemlich den Zähler oder Nenner rational haben will, u. zwar ſo vielmal, bis der Theil des Bruchs, den man rational haben will, dadurch zu der Potenz erhoben iſt, als der Exponens des Wurzelzeichens die Einheit hat. Z. E. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ hier wollen wir den Zähler rational machen, alſo Zähler und Nenner mit dem $\sqrt{a}$ mul-

mul-

multipliciret, welches den Bruch nicht ändert, wie aus der Lehre von den Brüchen noch bekannt ſeyn wird, $= \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{b\cdot\sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{ab}}$ oder auch $= a\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$ welcher letztere Ausdruck auch beſtehen kann, weil aus 1 der $\sqrt{\ } = 1$ iſt, und daher $\sqrt{\frac{1}{ab}}$ und $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ gleich iſt.

Wir wollen nun den Nenner rational machen, als Zähler und Nenner mit dem $\sqrt{b}$ multipliciren $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b.b}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{bb}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$.

Exempel in Zahlen: $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot3\cdot3}{5\cdot3\cdot3}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{45}} = \frac{3}{\sqrt[3]{45}}$ oder auch $3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{45}}$; der $\sqrt[4]{\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{\frac{2\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3}} = \frac{\sqrt[4]{2\cdot3\cdot3\cdot3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{54}}{3} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{54}$.

Ferner können ſie auch manchmal ſonderbar verändert werden; nur ein oder das andre Exempel:

$$\frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{64}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\cdot64} = \sqrt{128} = \sqrt{4\cdot32} = 2\sqrt{32} = 2\sqrt{16\cdot2} = 2\cdot4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{256}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot128}} = \frac{1}{\sqrt{128}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4.32}} = \frac{1}{2\sqrt{32}} = \frac{1}{2\sqrt{16.2}} = \frac{1}{2.4\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2.64}} = \frac{1}{\sqrt{128}}$$

Man ſiehet, daß ſolche Veränderungen ſehr merkwürdig ſind, und man thut gut, ſich fleißig darinnen zu üben. Bey dem erſten Exempel hier war der Zähler, und bey dem andern der Nenner rational gemacht. Ferner bekömmt man manchmal auch Brüche, daraus man aus dem einen Theil gleich die verlangte Wurzel ziehen, und ihn alſo von Wurzelzeichen befreyen könnte. Z. E. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}}$ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ denn 2 iſt $= \sqrt[3]{8}$.

Der $\sqrt[4]{\frac{81}{144}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{144}} = \frac{3}{\sqrt[4]{144}}$.

Hier läßt ſich bey dieſem Exempel aus dem Zähler der $\sqrt[4]{\ }$ ziehen, aber auch der Nenner läßt ſich noch zum Theil von der Irrationalität befreyen, man darf nur den Nenner nach §. 328 in Faktores zerfällen $= \frac{3}{\sqrt[4]{16.9}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{9}}$.

§. 330. Wenn ſolche Größen, welche irrational ſind, neben einander in ein Verhältniß geſetzt werden, ſo heißt das Verhältniß ein irrationales

nales

nales Verhältniß, das ſich alſo nicht völlig beſtimmen läßt. Es kann aber auch kommen, daß ſolche irrationale Größen doch unter einander ein rationales, oder ſich genau ausdrücken laſſendes Verhältniß haben. Man findet dieſes, wenn man ſie auf die gelehrte Art zum Theil von dem Wurzelzeichen zu befreyen ſuchet, da, wenn das Verhältniß rational iſt, alsdenn hinter dem Wurzelzeichen einerley Zahlen zu ſtehen kommen müſſen, und es ſind die vor dem Wurzelzeichen ſtehenden Zahlen alsdenn Zahlen des Verhältniſſes.

Z. E. $\sqrt{27}$ und $\sqrt{12}$ ſind beyde irrational. Allein $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$, und $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$, alſo verhalten ſich $\sqrt{27} : \sqrt{12} = 3\sqrt{3} : 2\sqrt{3}$. Die hinterſten beyden Glieder durch den $\sqrt{3}$ dividiret $= 3 : 2$. Alſo $\sqrt{27} : \sqrt{12} = 3 : 2$. Eben ſo $\sqrt{80}$ und $\sqrt{245}$ ſind beyde irrational, aber $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$, und $\sqrt{245} = \sqrt{49 \cdot 5} = 7\sqrt{5}$. folglich $\sqrt{80} : \sqrt{245} = 4\sqrt{5} : 7\sqrt{5} = 4 : 7$.

§. 331. Wurzelgrößen, ſie ſeyn irrational oder rational, laſſen ſich addiren, ſubtrahiren, multipliciren und dividiren, nur muß man ſie dabey erſt mannichmal verändern.

Von ihrer Addition und Subtraktion. Da ſich nur gleichartige Dinge addiren und ſubtrahiren laſſen, ſo müſſen auch die Wurzelgrößen gleichartig ſeyn, das iſt: es müſſen nicht nur Wurzeln von einerley Potenzen, ſondern auch die hinter dem Wurzelzeichen ſtehende Größen müſſen gleich ſeyn. Z. E.

$\sqrt{8}$

$\sqrt{3}$ und noch $\sqrt{3}$ laſſen ſich addiren und ſubtrahiren. Es ſind addiret $= 2\sqrt{3}$, und ſubtrahiret $= 0$. Man darf ſie nur zuſammen zählen oder abziehen. Eben ſo ließen ſich auch $5\sqrt[3]{8}$ und $2\sqrt[3]{8}$ und $\sqrt[3]{8}$ addiren und ſubtrahiren. Es wäre addiret $8\sqrt[3]{8}$, denn da hinter dem Wurzelzeichen einerley Größe ſteht, ſo gebraucht man nur die andern Zahlen zuſammen zu zählen, und wo keine Zahl ſteht, da gedenket man ſich 1 und $5 + 2 + 1$ ſind $= 8$. Aber $\sqrt{8}$ und $\sqrt[3]{8}$ laſſen ſich nicht zuſammen zählen, auch nicht ſubtrahiren, weil es nicht gleichartige Dinge ſind. Denn $\sqrt{}$ und $\sqrt[3]{}$ ſind ſehr verſchieden, obſchon die Zahlen hinter dem Wurzelzeichen gleich ſind. Alle ſolche Größen werden nur durch das gewöhnliche Zeichen (+), und bey der Subtraktion durch (—) angezeiget, und man ſchriebe dieſes addiret $\sqrt{8} + \sqrt[3]{8}$, oder ſubtrahiret $\sqrt{8} - \sqrt[3]{8}$. Eben ſo $\sqrt{4}$ und $\sqrt{5}$ könnten nur angezeigt werden durch $\sqrt{4} + \sqrt{5}$, und ſubtrahirt $\sqrt{4} - \sqrt{5}$, und von ſolchen Größen ſieht man es auch gleich ein, als $\sqrt[3]{6}$ und $\sqrt[4]{5}$, daß die nicht können addirt werden, die wären $\sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{5}$, und ſubtrahirt $\sqrt[3]{6} - \sqrt[4]{5}$. Ganz allgemein die Sache betrachtet. Wenn n und m Zahlen vor dem Wurzelzeichen bedeuten, a die Zahlen hinter dem Wurzelzeichen, und der Exponens der Wurzel $= f$, und p der Exponens der Potenz, ſo laſſen ſich nur ſolche Wurzelgrößen addiren, als $n\sqrt[f]{a^p}$ und $m\sqrt[f]{a^p}$. Da läßt ſich nun m und n zuſammen zählen oder ſubtrahiren. Es gelten bey der Addition und Subtraktion, wenn man entgegengeſetzte Größen zu addiren und ſubtrahiren

ren

ren hat, die allgemeinen Geſetze, die wir §. 29 und §. 57 gelehret haben.

Nun wollen wir noch ein Paar Exempel davon geben. Es verſteht ſich, daß man gleichartige Größen unter gleichartige ſetzen muß. Wir wollen ſie in Buchſtaben und Zahlen geben. Man addire; $2a\sqrt{bc} - 5b\sqrt{df} + \sqrt{f} + 5$ zu $-a\sqrt{bc} - b\sqrt{df} + 2\sqrt{f} + r$.

Es ſtünde alſo:

$$2a\sqrt{bc} - 5b\sqrt{df} + \sqrt{f} + 5$$
$$-a\sqrt{bc} - b\sqrt{df} + 2\sqrt{f} + r$$

Die Summe iſt $= a\sqrt{bc} - 6b\sqrt{df} + 3\sqrt{f} + s + r$

In Zahlen. Man addire $5\sqrt{6} - 3\sqrt[4]{5^2} + \sqrt{7} - 8$

zu $-4\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{5^2} + 3\sqrt{7} + 2$

Die Summe iſt $\sqrt{6} - \sqrt[4]{5^2} + 4\sqrt{7} - 6$

Subtraktionsexempel:

von $3b\sqrt{fg} - 2a\sqrt[4]{fm} + 4\sqrt[3]{ad} - d$

ſubtrahire man $+b\sqrt{fg} + a\sqrt[4]{fm} - 2\sqrt[3]{ad} - b$

$- \quad - \quad + \quad +$

ſo iſt d. Differenz $2b\sqrt{fg} - 3a\sqrt[4]{fm} + 6\sqrt[3]{ad} - d + b$

$$5\sqrt[3]{6} - \sqrt{48} - 3\sqrt{8^2} - 6\sqrt{2} - 8$$

ſubtrahiret $2\sqrt[3]{6} - 2\sqrt{48} + \sqrt{8^2} - 6\sqrt{2} - 5$

$- \quad + \quad - \quad + \quad +$

die Differenz $3\sqrt[3]{6} + \sqrt{48} - 4\sqrt{8^2} \quad - 3$

Man wird wohl thun, ſich hierin ſehr zu üben.

§. 332.

§. 332. **Von der Multiplikation der Wurzelgrößen.** Es iſt hier freylich eigentlich von Irrationalgrößen die Rede, weil man Rationalgrößen, z. E. $\sqrt{4}$ $\sqrt[3]{8}$ ꝛc. ganz ausdrücken kann, und alſo ſolche Wurzeln wol gleich in Zahlen verwandeln wird, indeſſen gilt doch, was hier geſagt wird, ganz allgemein auch für die Rationalwurzeln, wenn man ſie nicht ausdrückt. Um von dem Kleinen zum Größern zu gehen, ſo bemerken wir erſtlich: daß jede quadratiſche Wurzelgröße, ſie beſtehe nun aus einer einzelnen oder zuſammengeſetzten Größe, die mit ſich ſelbſt multipliciret wird, die Größe ſelbſt ohne Wurzeichen hervorbringe. So iſt z. E. $\sqrt{a} . \sqrt{a} = a$, und in Zahlen, $\sqrt{4} . \sqrt{4} = 4 . \sqrt{12} . \sqrt{12} = 12$ und ſo weiter.

Ferner, $\sqrt{(a^2 + b - x)} . \sqrt{(a^2 + b - x)} = (a^2 + b - x)$ oder $\sqrt{(25 + 16 - 9)} . \sqrt{(25 + 16 - 9)} = 25 + 16 - 9 = 32$.

Es läßt ſich auch dieſes leicht begreifen, wenn man betrachtet, daß man jede Größe anſehen kann, als ob ſie durch die Multiplikation zweyer gleichen Größen entſtanden wäre, und das ſind ihre $\sqrt{}$. Alſo, wenn man dieſe multipliciret, kann nichts anders als die Größe heraus kommen. Dieſes gilt für Rational- und Irrationalgrößen, denn auch eine Irrationalgröße iſt doch würklich eine endliche eingeſchränkte Größe, ob wir ſie ſchon durch unſere Zahlen nicht genau ausdrücken können. Zwey gleiche cubiſche Wurzeln mit einander multipliciret, giebt zum Exponenten der Potenz $\frac{2}{3}$.

Z. E. $\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}$ giebt $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ denn $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$. Alſo $a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Mutiplicirte man das nochmals mit $\sqrt[3]{a}$, ſo würde a herauskommen. Weil $a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1+1+1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a$. Ueberhaupt muß man eine Wurzelgröße ſo vielmal mit ſich ſelbſt multipliciren, als der Exponens der Wurzel iſt, wenn die Größe ohne Wurzelzeichen erſcheinen ſoll, welches auch ſchon durch ſich ſelbſt klar iſt. Eben das gilt auch für zuſammengeſetzte Größen. Z. E. $\sqrt[3]{(a+b)}.\sqrt[3]{(a+b)}.\sqrt[3]{(a+b)}$ würde $= (a+b)^{\frac{1}{3}}.(a+b)^{\frac{1}{3}}.(a+b)^{\frac{1}{3}} = (a+b)^{\frac{3}{3}} = a+b$.

§. 333. Wenn Wurzelgrößen mit andern Größen, ſie ſeyn ganze oder gebrochene Zahlen, multipliciret werden, ſo multipliciret man die vor dem Wurzelzeichen ſtehende Zahl oder Größe mit dieſen Größen, und ſtehet keine davor, ſo wird die Zahl, damit man multipliciret, davor geſetzet, wobey man aber die Regeln der Multiplikation in Anſehung der Zeichen + und − nicht zu vergeſſen hat. Stehen aber keine Größen vor beyden Wurzelgrößen, ſo hat man auch keine zu multipliciren, wie ſich das von ſelbſt verſtehet. Z. E. $(4\sqrt{3})6 = 4.6\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. Ferner $(-5\sqrt[3]{6}) - 4 = +20\sqrt[3]{6}$ und $(-6\sqrt{24}).+4 = -24\sqrt{24}$. Wenn keine Zahl vor dem Wurzelzeichen ſteht. $\sqrt{18}.5 = 5\sqrt{18}$; $\sqrt{3}.-4 = -4\sqrt{3}$; $\sqrt{(ab)}.c = c\sqrt{ab}$; $-\sqrt{(df)}.b = -b\sqrt{(df)}$ u. ſ. w. Man kann auch ſolche Größen nach §. 328. zum Theil verändern.

Wenn

Wenn man zwey Wurzelgrößen mit einander multipliciret, ſo haben die Wurzeln entweder gleiche Exponenten, oder nicht. Z. E. $\sqrt[3]{8}$ und $\sqrt[3]{5}$; da hatten d. Wurzeln ſchon gleiche Exponenten; aber $\sqrt[3]{8}$ und $\sqrt[2]{5}$, da haben ſie nicht gleiche Exponenten. Haben ſie nicht gleiche Exponenten, ſo muß man ſie erſt nach § 226 ſo verändern, daß ſie gleich Exponenten bekommen. Alsdenn multipliciret man die Größen erſtlich mit einander, die **vor** dem Wurzelzeichen ſich befinden, dann multipliciret man die Größen, die **unter**, oder **hinter** dem Wurzelzeichen ſind, und ſetzet vor dieſes letztere Produkt das gemeinſchaftliche Wurzelzeichen mit dem neugemachten Exponenten. Man muß dabey die Regeln wegen $+$ und $-$ nicht vergeſſen. Nachher kann man, wenn es angehet, nach §. 328. alles nnter den einfachſten Ausdruck bringen, auch wenn man es nöthig findet, alles, auch die vor dem Wurzelzeichen ſtehende Zahlen nach §. 327. mit unter das Wurzelzeichen öringen.

Exempel. $3b\sqrt{(cd)} . 4a\sqrt{(cd)} = 12abcd$. Gleichfalls $2b\sqrt{(cd)} . -3c\sqrt{(bc)} = -6ab\sqrt{(bc^2d)} = -6cbc\sqrt{(bd)} = -6c^2b\sqrt{(bd)}$ Ferner $-\sqrt[4]{c^3} . -\sqrt[4]{c} = +\sqrt[4]{c^4} = +c^{\frac{4}{4}} = +c$.

In Zahlen. $5\sqrt{18} . 4\sqrt{2} = 20\sqrt{36} = 20.6 = 120$. Ferner $-3\sqrt{12} . 2\sqrt{2} = -6\sqrt{24} = -6\sqrt{4.6} = -6.2\sqrt{6} = -12\sqrt{6}$.

Wenn die Wurzelexponenten ungleich ſind: ſo müſſen ſie, wie wir geſagt haben, erſt zu gleichen Exponenten gemacht werden.

Z. E. $^{2}\surd(cd) \,.\, ^{3}\surd(c^2d) = (cd)^{\frac{1}{2}} \,.\, (c^2d)^{\frac{1}{3}} = (cd)^{\frac{1.3}{2.3}} \,.\, (c^2d)^{\frac{1.2}{3.2}} = (cd)^{\frac{3}{6}} \,.\, (c^2d)^{\frac{2}{6}} = {}^{6}\surd(cd)^3 \,.\, {}^{6}\surd(c^2d)^2$, und wenn man würklich die Größen zu den Potenzen, die an dem Kopfe der Klammer ſtehen, erhebet, $= {}^{6}\surd(c^3d^3) \,.\, {}^{6}\surd(c^4d^2) = {}^{6}\surd(c^7d^5)$.

Ferner $3\,{}^{6}\surd c \,.\, -2\,{}^{4}\surd f = -6c^{\frac{1}{6}} \,.\, f^{\frac{1}{4}} = -6c^{\frac{1.4}{6.4}} \,.\, f^{\frac{1.6}{6.6}} = -6c^{\frac{4}{24}} \,.\, f^{\frac{9}{24}} = -6c^{\frac{2}{12}} \,.\, f^{\frac{3}{12}} = -6\,{}^{12}\surd c^2f^3$.

In Zahlen: $\surd 5 \,.\, {}^{3}\surd 2 = 5^{\frac{1}{2}} \,.\, 2^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1.3}{2.3}} \,.\, 2^{\frac{1.2}{3.2}} = 5^{\frac{3}{6}} \,.\, 2^{\frac{2}{6}} = {}^{6}\surd 5^3 \,.\, 2^2 = {}^{6}\surd 125 \,.\, 4 = {}^{6}\surd 500$ und $2\,{}^{3}\surd 5 \,.\, -3\,{}^{4}\surd 6 = -6 \,.\, 5^{\frac{1}{3}} \,.\, 6^{\frac{1}{4}} = -6 \,.\, 5^{\frac{4}{12}} \,.\, 6^{\frac{3}{12}} = -6\,{}^{12}\surd 5^4 . 6^3 = -6 . {}^{12}\surd 625 \,.\, 216 = {}^{12}\surd 135000$.

Nach dieſer Vorbereitung wird man nun auch wol vieltheilichte Rational- und Irrationalgrößen unter einander vermiſcht multipliciren können, weil vieltheilichte Größen aus eintheilichten durch die Zeichen + und − zuſammengeſetzt ſind. Das verſteht ſich, daß man, ehe man zu multipliciren anfängt, allen Wurzelgrößen einerley Exponenten gegeben hat. Wir wollen daher nur einige leichte Exempel anführen. Es ſoll multipliciret werden

$$\begin{array}{rl} & 2b\surd c + d\surd f \\ \text{mit} & 2b\surd c + d\surd f \\ \hline & + 2bd\surd fc + d^2f \\ + 4b^2c + 2bd\surd fc & \\ \hline 4b^2c + 4bd\surd fc + d^2f & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline +1\sqrt{2}+2 \\ 1+1\sqrt{2} \\ \hline 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

§. 334. **Von der Diviſion der Wurzelgrößen.** Wir wollen ebenfalls von dem leichten anfangen. Es ſollen erſtlich Dividendus und Diviſor eintheilichte oder einfache Größen ſeyn, alsdenn iſt entweder der Diviſor oder Dividendus irrational, und einer davon eine rationale Größe, oder ſie ſind beyde Irrationalgrößen.

Wenn der Dividendus irrational iſt, als z. E. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. Man muß alsdenn beyde Größen unter eben das Wurzelzeichen ſetzen, welches man nach §. 327. leicht wird bewerkſtelligen können, und alsdenn kann man die Diviſion leicht verrichten, wenn man dabey die Größen in Faktores zerfället, wenn anders die Größen ſich dividiren laſſen, oder man ſie auch dividiren, und nicht blos anzeigen will, wobey man aber allezeit die Regeln in Anſehung des + und − nicht vergeſſen muß. Z. E. $\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}} = \sqrt{\frac{3.7}{7.7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$. Ferner $\frac{\sqrt[3]{24}}{6} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{\sqrt[3]{4.6}}{\sqrt[3]{6.6.6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{6.6}} = \sqrt[3]{\frac{4}{36}}$ $= \sqrt[3]{\frac{4}{4.9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Wenn der Diviſor irrational iſt, verfähret man eben ſo. Z. E. $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}}$ oder auch $= 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Ferner $-\frac{4}{2\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{2^2.8}} = -\sqrt{\frac{16}{32}} = -\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{2.16}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ferner $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2 6}} = \sqrt{\frac{9}{24}} = \sqrt{\frac{3.3}{3.8}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Wenn Diviſor und Dividendus beyde irrational ſind, ſo haben die Wurzeln entweder gleiche Exponenten oder nicht. Haben ſie gleiche Exponenten, ſo wird man durch das Zerfällen der Größen in ihre Faktores gleich ſehen, ob ſich die Größe dividiren läßt, oder ob man ſie ſo laſſen muß. Man kann auch alsdenn den Diviſor oder Dividendus, nachdem es die Rechnung fordert, von ſeiner Irrationalität befreyen, wie der §. 329. lehret. Hat der Diviſor und Dividendus verſchiedene Wurzelexponenten, ſo muß man ſie erſtlich ſo verändern, daß ſie gleiche Wurzelexponenten bekommen, und alsdenn ſie ganz ſimpel dividiren, wie wir ſchon in den vorhergehenden Paragraphen angezeigt haben. Exempel werden dieſes deutlicher machen. Man ſoll $\sqrt{6}$ durch $\sqrt{8}$ dividiren, alſo $\sqrt{\frac{6}{8}} = \sqrt{\frac{2.3}{2.4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ferner

√

$$\sqrt{\left(\frac{c^4d^2}{c^2d}\right)} = \sqrt{\left(\frac{c^2c^2dd}{c^2\ d}\right)} = \frac{\sqrt{(c^2d)}}{1} = \sqrt{(c^2d)}$$

$= c\sqrt{d}$, welches letztere der Quotient iſt.

Hätte man $\sqrt[3]{24}$ durch den $\sqrt{6}$ zu dividiren.

alſo $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt{6}} = \frac{24^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{24^{\frac{1.2}{3.2}}}{6^{\frac{1.3}{2.3}}} = \frac{24^{\frac{2}{6}}}{6^{\frac{3}{6}}} = \frac{\sqrt[6]{24^2}}{6^3}$

$= \sqrt[6]{\frac{24.24}{6.6.6}} = \sqrt[6]{\frac{4.4}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2.2.4}{2.3}} = \sqrt[6]{\frac{2.4}{3}}$

$= \sqrt[6]{\frac{8}{3}}$. Ferner es wäre $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt[4]{12}} = \frac{48^{\frac{1}{2}}}{12^{\frac{1}{4}}} = \frac{48^{\frac{1.4}{2.4}}}{12^{\frac{1.2}{4.2}}}$

$= \frac{48^{\frac{4}{8}}}{12^{\frac{2}{8}}}$ oder beſſer $= \frac{48^{\frac{2}{4}}}{12^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[4]{\frac{48^2}{12}} = \sqrt[4]{\frac{48.48}{12}}$

$= \sqrt[4]{192} = \sqrt[4]{16.3.4} = 2\sqrt[4]{12}$, das iſt der geſuchte Quotient von $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt[4]{12}}$ und folgende Größe

$$\frac{\sqrt[3]{cd}}{\sqrt[2]{cd}} = \frac{(cd)^{\frac{1}{3}}}{(cd)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(cd)^{\frac{2}{6}}}{(cd)^{\frac{3}{6}}} = \sqrt[6]{\frac{(cd)^2}{(cd)^3}} = \sqrt[6]{\frac{c^2d^2}{c^3d^3}}$$

oder $= \sqrt[6]{\frac{ccdd}{cccddd}} = \sqrt[6]{\frac{1}{cd}} = \frac{1}{\sqrt[6]{cd}}$.

Die Probe von der Diviſion der Irrationalgrößen geſchiehet, wenn man den gefundenen Quotienten mit dem Diviſor multipliciret, da der Dividendus wieder herauskömmt, dabey man doch aber alsdenn mannichmal die gelehrten Verwandlungen gebrauchen muß.

§. 385. Nachdem wir eintheilichte Irrationalgrößen zu dividiren gelehrt haben, ſo wollen wir nun zu den vieltheilichten fortgehen. Wir wollen erſtlich den Dividendus eine vieltheilichte Größe ſeyn laſſen, und den Diviſor eintheilicht, oder uninomiſch annehmen. Hier muß man nun gewöhnlich damit anfangen, daß man alle Größen des Dividendus ſowol, als auch den Diviſor unter einerley Wurzelzeichen bringe, wenn es noch nicht iſt; ob ſchon mannichmal Fälle vorkommen könnten, da es nicht nöthig wäre, und da man die Zahlen, die ſich etwa vor dem Wurzelzeichen befinden, ſtehen laſſen könnte; allein wir reden hier von den leichteſten und gewöhnlichſten. Hernach dividiret man jede Größe beſonders durch den Diviſor, auf die gewöhnliche Art zu dividiren. Z. E. $\sqrt{24} + \sqrt{48} - \sqrt{72}$ dividiret durch $\sqrt{6}$.

als $\sqrt{6}$) $\sqrt{24} + \sqrt{48} - \sqrt{72}$ | $\sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$

$\sqrt{24}$: : : |

0 $\sqrt{48}$:

$\sqrt{48}$:

0 $-\sqrt{72}$

$-\sqrt{72}$

0

Der Quotient wäre alſo $\sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$, der könnte zum Theil ausgezogen, folglich alſo verändert werden:

$$2 + \sqrt{4.2} - \sqrt{4.3} = 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$
$$= (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) . 2.$$

Man dividire $c\sqrt{cd} - f\sqrt{cf} - c\sqrt{df}$ durch $-\sqrt{c}$, dieſes alles unter das Wurzelzeichen geſetzt

iſt

iſt $= \sqrt{c^2cd} - \sqrt{f^2cf} - \sqrt{c^2df}$ dividiret durch $-\sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{c^3d} - \sqrt{f^3c} - \sqrt{c^2df}}{-\sqrt{c}}$

Nun kann man dividiren:

$$
\begin{array}{l|l}
-\sqrt{c})\ \sqrt{c^3d} - \sqrt{f^3c} - \sqrt{c^2df} & -\sqrt{c^2d} + \sqrt{f^3} \\
\phantom{-\sqrt{c})\ }\underline{\sqrt{c^3d} \quad : \quad\quad :\quad} & \quad + \sqrt{cdf} \\
\phantom{-\sqrt{c})\ \ }0 - \sqrt{f^3c} \quad : & \\
\phantom{-\sqrt{c})\ \ }\underline{\ \ -\sqrt{f^3c} \quad :} & \\
\phantom{-\sqrt{c})\ \ \quad\quad} 0 - c^2df &
\end{array}
$$

Alſo der Quotient $= -\sqrt{c^2d} + \sqrt{f^3} + \sqrt{cdf}$ $= -c\sqrt{d} + f\sqrt{f} + \sqrt{cdf}$.

Es kömmt aber auch, daß der Diviſor und Dividendus, vieltheilichte Größen ſind, alsdenn muß man, wenn es nöthig iſt, alle die Vorbereitungen machen, wovon wir ſchon einigemal geredet haben, nemlich alle Größen unter das Wurzelzeichen, und unter einerley Wurzelzeichen zu bringen, die Größen gehörig nach den Potenzen ordnen, ſo wie die gewöhnliche Diviſion mit Buchſtaben uns gelehret hat, und dann auf die gewöhnliche Art dividiren, wobey man die Geſetze von + und − nicht aus den Augen laſſen darf. Wir wollen nur ein Paar Exempel zur Probe hinſetzen.

Man dividire $6\sqrt{6} + 2\sqrt{15} - 3\sqrt{10} - 5$. durch $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$. Alles unter das Wurzelzeichen geſetzt,

$$
\begin{array}{rl}
= & \sqrt{3.6.6}+\sqrt{4.1.5}-\sqrt{9.10}-\sqrt{25} \;\big|\; \sqrt{2.6}+\sqrt{5} \\
 & \sqrt{9.2.2.6}+\sqrt{2.6.6} \\
\sqrt{9.2}+\sqrt{5} & \overline{\quad 0 \qquad 0 \; -\sqrt{9.10}-\sqrt{25}} \\
 & \qquad\qquad -\sqrt{9\,2.5}-\sqrt{25} \\
 & \qquad\qquad \overline{\qquad 0 \qquad\quad 0}
\end{array}
$$

Nun muß man wohl zuſehen, wie die Größen wegen ihrer Faktoren ſich dividiren laſſen. Man hat hier nicht ohne Vorbedacht die Faktores der Größe gelaſſen, um zu zeigen, wie man etwa verfahren muß, und obſchon die Produkte in den Subtrahenten anders ausſehen, als in den Dividendis, ſo ſind ſie doch mit ſelbigen einerley, wie man leicht durch die Multiplikation beyder Arten von

von Faktoren ſehen wird. So iſt z. E. $\sqrt{4.15}$ und $\sqrt{2.6.5}$ beyde einerley Größe, beyde $=\sqrt{60}$. Man dividire $c\sqrt{bc} - c\sqrt{bd} + d\sqrt{cm} - d\sqrt{dm}$ durch $\sqrt{c} - \sqrt{d}$. Erſt alles unter den $\sqrt{}$ gebracht. Alſo der Dividendus $= \sqrt{c^2bc} - \sqrt{c^2bd} + \sqrt{d^2cm} - \sqrt{d^2dm}$.

$$\begin{array}{llllll|l}
 & \text{oder} = \sqrt{c^3b} & - \sqrt{c^2bd} & + \sqrt{d^2cm} & - \sqrt{d^3m} & & \sqrt{c^2b} \\
\text{durch } \sqrt{c} - \sqrt{d}) & \sqrt{c^3b} & - \sqrt{c^2bd} & & & & + \sqrt{d^2m} \\
\hline
 & 0 & 0 & + \sqrt{d^2cm} & - \sqrt{d^3m} & & \\
 & & & + \sqrt{d^2cm} & - \sqrt{d^3m} & & \\
\hline
 & & & 0 & 0 & &
\end{array}$$

Alſo der Quotient $= \sqrt{c^2b} + \sqrt{d^2m} = c\sqrt{b} + d\sqrt{m}$.

Es bleibt immer eine mühſame Arbeit, groſze und verwickelte Exempel zu dividiren, und ſehr oft bringt

bringt man doch die Diviſion nicht zu Ende, weil der Diviſor entweder nicht im Dividendus genau ſtecket, und da kann es durch die Natur der Sache nicht geſchehen, oder weil die Größen ſo beſchaffen ſind, daß man nicht gleich einſehen kann, wie ſie in einander ſtecken. Man bedienet ſich alsdenn verſchiedener Kunſtſtücke, die zuweilen guten Nutzen ſchaffen, die wir aber nach der Abſicht dieſes Buchs nicht alle erklären können und dürfen. Eines darunter iſt, daß, wenn man die Größen in einen Bruch ſetzet, und den Nenner rational machet, wie wir ſchon §. 329. etwas gelehret haben, aber dieſes iſt bey zuſammengeſetzten Größen öfters herzlich mühſam und ſchwer. Nur ein Exempel davon. Man dividire $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ durch $3-2\sqrt{2}$

Wenn man Zähler und Nenner mit $3+2\sqrt{2}$ multipliciret, ſo wird der Bruch nicht geändert, und der Zähler wird

$$\begin{array}{rl} & 8-5\sqrt{2} \\ \text{multipliciret mit} & 3+2\sqrt{2} \\ \hline & +16\sqrt{2}-10.2 \\ & +24-15\sqrt{2} \\ \hline & +24+\sqrt{2}-20 \end{array}$$

welches $=4+\sqrt{2}$.

Der Nenner $3 - 2\sqrt{2}$
wird multipliciret mit $3 + 2\sqrt{2}$

$$
\begin{array}{r}
+6\sqrt{2} - 4 \cdot 2 \\
+9 - 6\sqrt{2} \qquad\quad \\
\hline
9 \qquad - 8 = +1
\end{array}
$$

Alſo der Quotient $= \frac{4 + \sqrt{2}}{1} = 4 + \sqrt{2}$.

Für Anfänger haben wir von dieſer Materie genug geſaget. Wir bemerken noch, daß auch die Probe dieſer Exempel durch die Multiplikation geſchiehet. Wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multipliciret, ſo kömmt der Dividendus zum Produkte.

§. 336. Wir kommen zu den **unmöglichen** Größen, welche man auch wol imaginäre, **eingebildete** Größen nennet. **Unmögliche** Größen ſind Wurzeln, die einen geraden Exponenten haben, und vor **negativen** Größen ſtehen. So ſind z. E. $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-8}$, oder auch $\sqrt[4]{-12}$, $\sqrt[6]{-16}$ **unmögliche** Größen. Sie heißen es daher, weil man keine Größe findet, die, wenn ſie **gerademal** mit ſich ſelbſt multipliciret wird, eine negative Zahl giebet. Denn man nehme die Größe **plus** oder **minus**; iſt ſie **plus**, ſo werden alle ihre Produkte, wenn ſie mit ſich ſelbſt multipliciret wird, **plus** ſeyn. Iſt ſie **minus**, ſo werden alle ihre Produkte, die **gerade** Potenzen werden, wenn ſie mit ſich ſelbſt multipliciret wird, plus, und nur ihre **ungeraden** werden Minusgrößen werden. Weil nun alle Wurzeln entweder

+

+ oder − ſind, ſo giebt es keine Größe oder Zahl, welches die Wurzel einer unmöglichen Größe wäre. Ein Exempel ſoll es erläutern. $\sqrt{-16}$ iſt eine unmögliche Größe, denn aus 16 iſt die Wurzel entweder + 4 oder − 4. Man multiplicire aber + 4 oder − 4 mit ſich ſelbſt, ſo wird es allezeit + 16 geben, alſo läßt ſich keine Zahl angeben, die mit ſich ſelbſt multipliciret − 16 zum Produkte gebe. Allein negative Größen, vor welchen ein Wurzelzeichen mit einem **ungeraden** Exponenten ſtehet, ſind keine unmögliche Größen, weil ſie allerdings aus der Multiplikation einer negativen Größe mit ſich ſelbſt entſtanden ſeyn können. Z. E. $\sqrt[3]{-a^3}$ iſt allerdings eine würkliche Größe, es iſt $= -a$. Denn wenn man würklich multipliciret $-a$ ſo kömmt $-a^3$ heraus.

$$\begin{array}{r} -a \\ -a \\ \hline +a^2 \\ -a \\ \hline -a^3 \end{array}$$

Der $\sqrt[3]{-8}$ iſt $= -2$. Denn $-2 . -2 . -2$. iſt $= -8$. Eben ſo mit andern negativen Größen, deren Wurzelexponenten ungerade ſind.

Die unmöglichen Größen ſind alſo weder **poſitiv** noch **negativ**, aber ſie ſind doch auch keinesweges **nichts oder** o, alſo unmöglich. Sie können aber allerdings in der Einbildung ſtatt finden, und man kann ſich zum Exempel doch immer einbilden, es gäbe eine Größe, die mit ſich ſelbſt mutipliciret, dieſe negative Zahl gäbe, ob man ſie ſchon nicht weiß. Sie werden daher auch **imaginäre** oder eingebildete Größen genennet.

§. 337.

§. 337. Es laſſen ſich bey dieſer Art Wurzeln alle vier Species gleichfalls anbringen, ſie laſſen ſich kürzer ausdrücken, addiren, ſubtrahiren, multipliciren und dividiren, wenn ſie übrigens ſo beſchaffen ſind, daß ſich dieſe Rechnungsarten dabey anbringen laſſen. Wir wollen von allen dieſen nur etwas erwähnen, weil ſich vieles, was wir von den Irrationalgrößen geſagt haben, auch hier anwenden läßt. Will man ſie kürzer ausdrücken, ſo muß man ſie in Faktores zerfällen können, aus deren einem ſich die Wurzel ausziehen läßt. Z. E. $\sqrt{-18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-2} = 3\sqrt{-2}$. Ferner: $\sqrt{-8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-2} = 2\sqrt{-2}$. Dadurch wird ein Theil dieſer Größe von der Unmöglichkeit befreyet. Weil 1 allezeit ein Faktor einer jeden Größe ſeyn kann, ſo kann man auch dieſen gebrauchen, und daher alle unmögliche Größen zum Theil von der Unmöglichkeit befreyen. Z. E. $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$; ferner $\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$, und weil ſich 12 noch zerfällen läßt $= \sqrt{4 \cdot 3} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$, welches $= 2\sqrt{-3}$. ferner $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{-1} = 2\sqrt[4]{-1}$ u. ſ. w. Die Diviſion und Subtraktion der unmöglichen Größen geſchiehet eben ſo, als bey Irrationalgrößen §. 331. und es verſteht ſich von ſelbſt, daß nur gleichartige Dinge ſich addiren und ſubtrahiren laſſen. Wir dürfen von beyden Arten nur ein Paar Exmpel geben.

Man addire $3\sqrt{-2} + \sqrt{-4} - 5\sqrt{-1}$

zu $2\sqrt{-2} - 2\sqrt{-4} - 2\sqrt{-1}$

die Summe iſt $5\sqrt{-2} - \sqrt{-4} - 7\sqrt{-1}$

von

von	$3\sqrt{-2}+\sqrt{-4}-5\sqrt{-1}$
ſubtrahiret	$2\sqrt{-2}-2\sqrt{-4}-2\sqrt{-1}$
	$-\quad+\quad+$
die Differenz	$\sqrt{-2}+3\sqrt{-4}-3\sqrt{-1}$

§. 338. Bey der Multiplikation mit unmöglichen Größen hat man verſchiedenes zu bemerken. Wenn man zwey gleiche unmögliche Größen mit ſich ſelbſt multipliciret, ſo iſt die daraus entſtehende Potenz eine **negative** Größe. Z. E. $\sqrt{-3}.\sqrt{-3}=-3$, und verändert das Zeichen hinter der Wurzel das Zeichen der Größe nicht, welches auch leicht begreiflich iſt, indem die Wurzel von der Größe nur anzeiget, und nicht ausgedrücket war, und nach den Begriffen der Wurzeln aus ihrer Multiplikation mit einander die Größe ſelbſt entſtehet. Ferner $\sqrt{-8}.\sqrt{-8}=-8$. und $\sqrt[4]{-16}.\sqrt[4]{-16}=-16^{\frac{2}{4}}=-16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-16}$. $=\sqrt{16}.\sqrt{-1}=4\sqrt{-1}$.

Es wird überhaupt das Zeichen − der unmöglichen Größen hinter der Wurzel durch die Multiplikation bey dieſer Art Multiplikation der Erhebung zu Potenzen nicht ändert, und die Regel, was die Zeichen anbetrift, gehet nur die Zeichen, die vor dem Wurzelzeichen ſich befinden, an. Allein wenn zwey verſchiedene unmögliche Größen mit einander multipliciret werden, da wird der Fall anders, und thut man am beſten, ſie in ihre einzelne Faktores zu zergliedern, ehe man ihre Multiplikation anſtellet. Z. E. $\sqrt{-3}.\sqrt{-2}$ iſt $=-\sqrt{6}$, denn $\sqrt{-3}=\sqrt{3}.\sqrt{-1}$

und

und $\sqrt{-2} = \sqrt{2}.\sqrt{-1}$, alſo $\sqrt{-3}.\sqrt{-2}$ iſt $= \sqrt{3}.\sqrt{2}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{6}.-1 = -\sqrt{6}$. Da alſo aus unmögl. Größen Multiplikation doch etwas mögliches werden kann: eben ſo kann es auch mit durch die Bewirkung des Zeichens geſchehen, das vor dem Wurzelzeichen ſteht. Z. E. $(\sqrt{-8}+\sqrt{-2}).(\sqrt{-8}-\sqrt{-2})$ giebt eine unmögl. Größe $=-6$.

Denn wenn man würklich multipliciret

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{-8}+\sqrt{-2} \\ & \sqrt{-8}-\sqrt{-2} \\ \hline & -\sqrt{-16}-(-2) \text{ oder } +2 \\ -8+\sqrt{-16} & \\ \hline -8 & +2 \text{ oder} \\ & =-6 \end{array}$$

Wenn man unmögliche Größen mit möglichen multipliciret, ſo iſt das Pro ukt allezeit unmöglich $\sqrt{5}.\sqrt{-2}$ giebt $\sqrt{-10}$, denn $\sqrt{5}.\sqrt{-2}$ iſt $= \sqrt{5}.\sqrt{2}.\sqrt{-1} = \sqrt{10}.\sqrt{-1} = \sqrt{-10}$. Man pflegt aber ſehr oft nicht würklich zu multipliciren, ſondern die Multiplikation mit den unmöglichen Größen nur anzuzeigen, damit man während der Rechnung und am Ende derſelben ſie deſto leichter erkennen könne. Z. E. $\sqrt{a}$ multipliciret mit $\sqrt{-c}$, ſchreibt man öfter blos $\sqrt{a}.\sqrt{-c}$, ohngeachtet man auch dafü. $\sqrt{-ac}$ ſchreiben könnte. Eben ſo $\sqrt{4}.\sqrt{-3}$ läßt man öfters alſo ſtehen.

Es kann endlich aber auch wol kommen, daß mögliche und unmögliche Größen in einander multipliciret ſind, und durch deren ihre Multiplikation mit einander wol eine mögliche Größe werden kann. Dieſes geſchiehet aber, wenn in beyden

Faktoren unmögliche Größen, die gleich ſind, ſich befinden, und die Zeichen der Faktoren verſchieden ſind, und daher wird dieſes unſerm vorhergehenden Satze nicht widerſprechen. Z. E. $2c\sqrt{-d} \cdot -3b\sqrt{-d} = -6bc\sqrt{-d} \cdot \sqrt{-d} = -6bc \cdot -d = +6bcd$. In Zahlen: $6\sqrt{-4} \cdot -5\sqrt{-4} = -30 \cdot \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4} = -30 \cdot -4 = +120$.

§. 339. Die Diviſion der unmöglichen Größen durch einander geſchiehet nach eben den Größen, als ihre Multiplikation, und thut man bey ſchweren Fällen oder auch Anfänger gut, ſie auf die gezeigte Art zu zergliedern. Z. E. $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{4} = 2$. Aber $\frac{-\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{-\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{4} = -2$, und $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$. Da alſo durch die Diviſion unmöglicher Größen auch mögliche entſtehen können.

Man zeiget aber ſehr oft nur die Diviſion blos an, und giebt den Größen die Geſtalt eines Bruchs, wenn ſie ſich nicht bequem dividiren laſſen, ſonſt ſuchet man ſie auf den kürzeſten Ausdruck zu bringen. Z. E $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ und $cd\sqrt{-c} : -d\sqrt{-c} = \frac{cd\sqrt{-c}}{-d\sqrt{-c}} = -c$.

Fer-

Ferner, $8\sqrt{-6} : -4\sqrt{-2} = \frac{8\sqrt{-6}}{-4\sqrt{-2}} = -2\sqrt{-3}$.

§. 340. Man möchte nun noch nach dem Nutzen fragen, welchen unmögliche Größen in der Rechenkunſt haben, da ſie würklich unmöglich ſind, und alſo ihre Behandlung bloß ſpekulativiſche Wahrheiten ohne Nutzen zu ſeyn ſcheinen. Allein ſie haben doch würklich einen guten Gebrauch. Sehr oft kommen Unterſuchungen vor, von denen man nicht allezeit voraus weiß, ob die Aufgaben möglich ſind oder nicht. Man erfähret dieſes, wenn man in der Rechnung endlich zum Schluſſe kömmt. Bekömmt man am Ende derſelben unmögliche Größen, ſo beweiſet dieſes, daß die Frage unmöglich, oder nicht aufzulöſen ſey. Man wird dieſes mannichmal in den Rechnungen, von denen wir in den letztern Kapiteln handeln werden, antreffen. Wir wollen nur jetzt das Reſultat von einiger einigen ſolchen Frage ſagen, deren ſehr viele vorkommen können. Wenn man 10 in zwey Theile theilen ſollte, die mit einander multipliciret, 36 zum Produkte geben, ſo bekäme man, wenn man die Rechnung ordentlich (wie uns die Gleichungen lehren werden) anſtellte, die Faktores $5 + \sqrt{-11}$ und $5 - \sqrt{-11}$, welches unmögliche Größen ſind, alſo die Sache geht gar nicht an. Indeſſen giebt die Multiplikation dieſer beyden unmöglichen Größen mit einander würklich 36, nur daß es ſolche Größen nicht giebt. Wir wollen die beyden Größen mit einander multipliciren.

$$
\begin{array}{r}
5+\sqrt{-11} \\
5-\sqrt{-11} \\
\hline
-5\sqrt{-11}-(-11) \\
+25+5\sqrt{-11} \qquad\qquad \\
\hline
25 \quad 0 \quad -(-11) \text{ oder } +11
\end{array}
$$

Alſo $25+11=36$. Wir bemerken noch, daß man ſonſt überhaupt genommen die unmöglichen Größen eben in Beweiſen nicht gebrauchen muß, wo es ſich irgend durch würkliche Größen zwingen läßt, weil man nichts hiebey gedenken kann, und es dem Verſtande immer einleuchtender iſt, wenn man mit möglichen Größen Schlüſſe macht.

§. 341. Ehe wir dieſe Lehre von den Wurzeln beſchließen, wollen wir noch einer Art Wurzeln gedenken, die auch mannichmal vorkommen. Es kann kommen, daß man aus einer Wurzel wieder noch eine Wurzel ziehen ſoll, und welche alſo geſchrieben wären. Z. E. $\sqrt{\sqrt{5}}$. Das heißt, man ſoll aus 5 den $\sqrt{}$ ziehen, und aus der Größe, die man denn bekommen hat, abermals den $\sqrt{}$, oder auch $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$. Oder ganz allgemein: $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}$, da r und n bedeuten können, was man will, oder was gegeben iſt. Sind die Größen, woraus die erſte Wurzel, die dichte an der Größe ſteht, ſoll gezogen werden, ſolche Größen, daraus man die Wurzel genau bekommen kann, ſo hat der Ausdruck in der That nur ein Wurzelzeichen, weil ſich die eine Wurzel ausziehen läßt. Z. E. $\sqrt{\sqrt{9}}$ wäre, weil ſich aus 9 der $\sqrt{}$ genau geben läßt, $=\sqrt{3}$. Der $\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{4}=2$. und der $\sqrt{\sqrt{a^2}}$ $=$

$=\sqrt{a}$. Aber ſind die Größen nicht alſo beſchaffen, ſondern Irrationalgrößen, ſo iſt es nicht ſchwer, ihnen ein einziges Wurzelzeichen zu verſchaffen, wenn man es nöthig befindet. Man erinnere ſich, daß man Wurzeln als Potenzen, die Bruchexponenten haben, ſchreiben kann, ferner, daß man, wenn man die Exponenten der Potenzen dividiret, ihre Wurzeln dadurch ausziehet, §. 145, ſo iſt gleich ein neues und einziges Wurzelzeichen da. Z. E. $\sqrt{\sqrt[3]{c}}$ wäre $= c^{\frac{1}{3}:2} = c^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{c}$. Ferner, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = 8^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{8}$ und $\sqrt{\sqrt[3]{8^2}} = 8^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Und ganz allgemein $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a^n}} = a^{\frac{n}{s}\cdot\frac{1}{r}} = a^{\frac{n}{sr}} = \sqrt[sr]{a^n}$, wenn $r = 3$, $s = 2$, $n = 4$, $a = 12$ wäre, ſo wäre alſo $a^{\frac{n}{sr}} = 12^{\frac{4}{6}} = 12^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{12^2} = \sqrt[3]{144}$.

Wir haben uns bemühet, das nöthigſte von den Wurzelrechnungen zu ſagen. Wir ſind dabey etwas weitläuftig geweſen, um deſto deutlicher zu ſeyn, und wir hoffen, daß ein Anfänger, der dieſes aufmerkſam durchgedacht hat, in Schriften, die es weitläuftiger ausführen, fortkommen könne.

Das ſiebenzehnte Kapitel.

Von den Logarithmen und ihrer Behandlung.

§. 342. Wir fangen eine ſehr wichtige Lehre an, deren Nutzen ſich durch die ganze Mathematik ausbreitet, und zugleich die gröſte Bequemlichkeit im Rechnen darbietet. Es iſt die wichtige Lehre von den **Logarithmen.** Wir haben ſelbige nicht eher vortragen können, bis uns die Lehre von den Proportionen, Progreſſionen und Ausziehung der Wurzeln bekannt war, weil ſich hierauf die Lehre von den **Logarithmen** gründet. Das Wort, Logarithme kömmt von dem Worte λογων αριθμος her, welches die Zahl der Verhältniſſe anzeiget, indem dieſes die Logarithmen auch würklich thun, und es anzeigen, wie vielfach ein gewiſſes Verhältniß von dem Fundamentalverhältniß zweyer nächſten Glieder der geometriſchen Reihe ſey. Weiter unten wird dieſes deutlicher werden. Der Erfinder dieſer Logarithmen iſt zweifelhaft. Einige geben einen Teutſchen, **Juſtus Byrge,** für den Erfinder derſelben an, andere einen Schottländer, **Johann Nepper, Baron von Marchiſton,** der aber den Gebrauch derſelben vielleicht nur gemeinnütziger zeigte. Er gab ſein Werk Mirifici Canonis Logarithmorum deſcriptio

1614 zu Edinburg heraus. **Heinrich Brigg**, Profeſſor der Geometrie zu Oxford, gab 1624 ſeine Arithmetica Logarithmica heraus, worin er ſelbſt auf **Neppers** Rath, ein anderes, und zum Gebrauch bequemers logarithmiſches Syſtem berechnete, als Nepper gethan hatte, welches ſich vorzüglich auch dadurch von Neppers Syſtem unterſchied, daß bey Neppern die Hauptreihe eine abnehmende Progreſſion, hingegen bey Brigg eine ſteigende, da auch Brigg zugleich eine ander Baſis ſeines Syſtems annahm. Wir werden von dieſem allem nachher Begriffe bekommen. Es würde aber nicht für dieſes Buch und für Anfänger gehören, hievon weitläuftig zu reden. Da man die nepperſchen Logarithmen faſt gar nicht mehr gebrauchet, ſondern das gewöhnliche Logarithmenſyſtem, das man gebrauchet, das **Briggiſche** iſt, welches man in den ſogenannten gewöhnlichen logarithmiſchen Tafeln findet, ſo wollen wir auch davon reden und dieſes erklären, und zeigen, wie man damit rechnen ſolle. Wer weiter gehen will, wenn er dieſes jetzt gewöhnlich gebräuchliche verſteht, wird in den größern mathematiſchen Schriften, z. E. Hr. Karſtens Mathematik Theil 2. Abſchn. VI. VII. und andern Schriften mehr Nachricht davon finden.

§. 343. Wir wollen ſie auf eben die Art anfangen aus einander zu ſetzen, wie ſie ſich nach den **gewöhnlichen briggiſchen** Logarithmen am leichteſten betrachten und erklären laſſen. Zum Anhange dieſes erſten Theils bey der jetzigen

zweyten Ausgabe wollen wir eine weitläuftigere beſondere Abhandlung über die Logarithmen geben, da wir in dieſem Kapitel aus der Urſache, weil ſich die folgenden Theile auf die §§. berufen, nicht neue Paragraphen hinzuſetzen mögen. Wenn man unter eine **geometriſche** Progreſſion, von welcher Art man will, deren erſtes Glied ſich mit 1 anfängt, eine **arithmetiſche** Progreſſion, deren erſtes Glied ſich mit 0 anfängt, und die gleichfalls beſchaffen ſeyn kann, wie man will, ſetzet, ſo daß unter jedem Gliede der geometriſchen Progreſſion das eben ſo vielſte der arithmetiſchen Progreſſion ſteht, ſo heißt jedes Glied der arithmetiſchen Progreſſion der **Logarithme** des über ihm ſtehenden Gliedes der geometriſchen Progreſſion.

Z. E. geometriſche Progreſſion	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Arithmetiſche Progreſſion	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Hier zeiget jedes Glied der arithmetiſchen Progreſſion den Logarithmen des über ihm ſtehenden Gliedes der geometriſchen Progreſſion an, z. E. 5 iſt der Logarithme von 32, oder 5 zeiget an, daß 32 das fünffache Verhältniß von 1 : 2 iſt, denn, wenn man ſchließet 1:2 = 2:4, 2:4 = 4:8, 4:8 = 8:16, 8:16 = 16:32, ſo ſiehet man gleich, daß dieſes das 5te Verhältniß iſt. Da man jede geometriſche Progreſſion, ſie fange mit einer Größe an, womit ſie wolle, in eine verwandeln kann, deren erſtes Glied mit 1 anfängt, ohne,

ne, daß das Geſetz und Verhältniß, wornach die Glieder fortgehen, im mindeſten geändert wird, §. 288, ſo kann man alle geometriſche Progreſſionen hierauf bringen, und dieſes giebt uns ein Recht, ſie als ſolche betrachten zu können, ohngeachtet es eben nicht nöthig wäre. Gleichfalls wäre es auch nicht nöthig, daß, wie wir hier im Exempel geſetzet haben, die arithmetiſche Reihe eben mit Null anfinge; allein dieſe Vorausſetzung iſt doch immer die einfachſte und natürlichſte; ferner wäre auch nicht durchaus nöthig, daß ſie, wie in dieſem Exempel, nach der Ordnung der natürlichen Zahlzeichen fortgienge, es würde darum doch die Zahl der Verhältniſſe angezeiget werden. Wenn das auch nicht geſchähe, und man ganz allgemein die geometriſche und arithmetiſche Reihen alſo anzeiget:

$$\begin{array}{ccccccc} a & am & am^2 & am^3 & am^4 & am^5 & am^6 \ldots \\ \alpha & \alpha+\delta & \alpha+2\delta & \alpha+3\delta & \alpha+4\delta & \alpha+5\delta & \alpha+6\delta \ldots \end{array}$$

ſo würden doch zwiſchen der Entfernung zweyer Glieder der geometriſchen Reihe ſo viel Verhältniſſe ſeyn, als zwiſchen der Entfernung zweyer Glieder der arithmetiſchen Reihe ſich Differenzen befinden, und die Zahl der δ oder Differenzen doch anzeigen, das wie vielſte Glied es in der geometriſchen Progreſſion wäre, eine oder beyde Reihen möchten ſteigend oder fallend, oder überhaupt beſchaffen ſeyn, wie ſie wollen. Allein dieſe Betrachtungen würden uns zu weit führen, wir reden in dieſen erſten Gründen nur von dem einfachſten und leichteſten. Wir wollen alſo allgemein

eine geometriſche Progreſſion mit 1 anfangen, welches geſchiehet, wenn wir die oberſte durch a dividiren, und die arithmetiſche mit o anfangen, ſo wird alſo α darin $= 0$, und fällt daher in allen Gliedern weg, und die Progreſſion ſtünde alſo:

Geometr. Progreſſion	$1, m, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6 \ldots$
Arithmet. Progreſſion	$0, \delta, 2\delta, 3\delta, 4\delta, 5\delta, 6\delta \ldots$

Wir mögen hier nun beyde Reihen ſteigend oder fallend, oder verſchieden annehmen, ſo ſehen wir doch, die Zahl der Differenzen zeiget die Zahl der Verhältniſſe von $1 : m$ an, oder auch die Zahl der Differenzen zeiget den Exponenten der Potenz von m an. Da dieſes iſt, ſo wird, wenn man mit den Gliedern der arithmetiſchen Reihe ſo verfähret, als wie man mit den Exponenten der gleichnamichten Potenzen verfuhr, wenn man ſie mit einander multipliciren, dividiren, zu neuen Potenzen erheben, oder den Radix ausziehen wollte, eben das Reſultat heraus kommen müſſen, das da heraus kam, und das arithmetiſche Glied, welches man alsdenn erhält, nothwendig eine über ihm ſtehende Potenz der m anzeigen müſſen, deren Exponent eben ſo groß iſt, als nun die Zahl der Differenz in dieſem Gliede iſt. Man betrachte die Reihe noch einmal:

$$1, m, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, m^7 \ldots$$
$$0, \delta, 2\delta, 3\delta, 4\delta, 5\delta, 6\delta, 7\delta \ldots$$

Wollte man nun m^2 mit m^4 multipliciren, ſo dürfte man nur die Logarithmen davon addiren, (weil gleichnamichte Potenzen multipliciren, ihre

Exponenten addiren heißt), und was man dann bekäme, würde einen auf das Glied der geometriſchen Progreſſion weiſen, das über der Größe, die man nun bekommen hätte, ſtünde. Der Logarithme von m^2 iſt $= 2\delta$, und der Logarithme von $m^4 = 4\delta$, alſo $2\delta + 4\delta = 6\delta$, über 6δ ſtehet m^6, und m^2 und m^4 würde auch m^6 ſeyn. Eben ſo wenn man die Potenzen der m durch einander dividiren wollte, dürfte man nur ihre Logarithmen ſubtrahiren, weil gleichnamichte Potenzen dividiren, ihre Exponenten von einander ſubtrahiren heißt, wie wir in der Diviſion gelernet haben. So wäre $m^5 : m^3$ logarithmiſch betrachtet, $5\delta - 3\delta = 2\delta$, über 2δ ſtehet m^2, und $m^5 : m^3$ iſt $= m^2$. Erhebet man die Potenzen der m zu neuen Potenzen, ſo multipliciret man, wie bekannt, ihren Exponenten mit der Zahl der Potenz, wozu man ſie erheben will, man darf alſo auch nur ihren Logarithmen mit ſolcher Zahl multipliciren. Z. E. m^2 zur dritten Potenz erhoben, der Logarithme davon iſt 2δ, das mit 3 multipliciret, giebt 6δ, die Potenz der m darüber iſt auch m^6, und m^2 zur dritten Potenz erhoben, iſt auch m^6. Eben ſo mit Ausziehung der Wurzel, welches, wie uns auch noch bekannt ſeyn wird, die Diviſion der Potenzexponenten durch die Zahl der Wurzel iſt, das darf gleichfalls nur mit den Logarithmen geſchehen. Z. E. $\sqrt[3]{m^6}$, der Logarithme von m^6 iſt $= 6\delta$, das dividiret durch 3, giebt $= 2\delta$, und über 2δ ſtehet m^2, welches auch $= \sqrt[3]{m^6}$ iſt. Man ſiehet alſo, wie die Multiplikation in eine Addition der Logarithmen, die Diviſion in eine Subtraktion, und die Erhebung zu Potenzen

in

in eine Multiplikation, und die Ausziehung der Wurzel in eine Diviſion der Logarithmen verwandelt wird, und daß die Logarithmen ganz allgemein betrachtet, als **würkliche Potenzexponenten** einer Größe angeſehen werden können.

§. 344. Nun ſetze man für beyde Reihen welche Art der Progreſſionen man will, und dieſe Rechnungen werden zutreffen müſſen. Es ſoll
die geometriſche Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729...
die arthmetiſche oder die Logarithmen ſeyn 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12...
ſo wäre z. E. für $3 . 27$ die Logarithmen $2 + 6 = 8$, und der Logarithme 8 weiſet auf 81, welches auch $= 3 . 27$ iſt. Ferner $\frac{243}{27}$ gäbe die Logarithmen $10 - 6 = 4$, weil der Logarithme von $243 = 10$, und von $27 = 6$ in unſerer jetzt angenommenen Einrichtung iſt, und der Logarithme 4 weiſet auf 9, welches auch $\frac{243}{27}$ iſt. Eben ſo 3 zur 4ten Potenz erhoben, wäre logarithmiſch, Logarithmus von 3 bis 4 multipliciret, alſo $2 . 4 = 8$, welcher Logarithme auf 81 weiſet, das auch $= 3^4$ iſt. Und $\sqrt{729}$ wäre logarithmiſch, Logarithme von 729 dividiret durch 2, aber der Logarithme von 729 iſt hier 12, das dividiret durch 2, giebt den Logarithmen 6, welcher auf 27 weiſet, das auch $= \sqrt{729}$ iſt.

Wir wollen noch zum Verſuch ein ander Logarithmenſyſtem nehmen, oder andere Reihen ſetzen, welches man ein Logarithmenſyſtem heißt,

Ge-

Geometriſche	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256} \ldots$
Arithmet. oder Logarithmen	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$

Alſo $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64}$ logarithmiſch gerechnet, wäre $= 1 + 6 = 7$, welcher Logarithme auf $\frac{1}{128}$ zeiget, das es auch iſt, $\frac{1}{64} : \frac{1}{8}$ logarithmiſch $= 6 - 3 =$ Log. 3. Dieſer weiſet auf $\frac{1}{8}$, welches auch $= \frac{1}{64} : \frac{1}{8}$ iſt, u. ſ. w.

§. 345. Man wird nun wol begreifen, daß man bey den Gliedern einer oder der andern geometriſchen Reihe mit Logarithmen rechnen könne, aber doch auch immer einwenden, wie man aber die Logarithmen für Glieder fände, die zwiſchen dieſen Gliedern noch fielen, wie man z. E. zu der Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729... noch für die fehlenden Glieder, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10 u. ſ. w. die Logarithmen fände, und alſo überhaupt alle Rechnungen, die man wollte, logarithmiſch führen könnte, welches freylich eine große Erleichterung in der Rechenkunſt bey großen Multiplikationen, Diviſionen ꝛc. wäre. Dieſes zu beantworten, und überhaupt hievon deutliche Begriffe zu geben, wollen wir nun das briggiſche Logarithmenſyſtem betrachten und erklären, und zeigen, wie man für alle Zahlen die Logarithmen nach dieſem Syſtem finden kann, und wie man die gedruckten Tafeln der Logarithmen brauchen muß.

§. 346. Heinrich Brigg berechnete ſelbſt auf des Baron Nepers Rath, wie wir ſchon geſagt, ein anderes logarithmiſches Syſtem, als

Nepper,

Nepper, in welchem er das Verhältniß 1 : 10 für das einfache annahm, daraus die geometriſche Progreſſion beſtimmte, und dazu die arithmetiſche Progreſſion der natürlichen Zahlzeichen nahm, die er mit 0 anfieng, und ſo mit 1, 2, 3, 4 u. ſ. w. fortſetzte. Er bekam alſo folgende geometriſche und arithmetiſche Progreſſion:

Geometriſche Progrogreſſion	1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 ꝛc.
arithm. oder dieſer obern Logar.	0, 1, 2, 3, 4, 5.

Dieſe arithmetiſche Progreſſion, oder die Logarithmen der geometriſchen Progreſſion, ſind die wahren Exponenten der Potenzen der 10, wie denn auch die Null unter der 1 dazu gehöret, weil $10^0 = 1$ iſt. Nun kam es darauf an, wenn man Zahlen zwiſchen dieſen Progreſſionen ſetzt, ſo, daß man in der geometriſchen Reihe alle natürliche, auf einander folgende Zahlen hat, alsdenn in der arithmetiſchen aller dieſer Zahlen Logarithmen zu finden. Zwiſchen 1 und 10 fehlen noch 9 Zahlen und zwiſchen den andern Gliedern noch ſehr viel mehrere. Allein alle die Zahlen, die dazwiſchen fehlen, können doch als Potenzen der 10 betrachtet werden. Weil zwiſchen 1 und 10, welches 10^0 und 10^1 iſt, ſich noch viele Potenzen gedenken laſſen, deren Exponenten noch nicht 1, aber auch nicht 0 ſind, ſondern alſo größer als 0 ſind, ſo ſind zwiſchen 10^1 und 10^2, oder zwiſchen 10 und 100 noch unendlich viele, deren Potenz über 1, aber auch noch nicht 2 iſt. Man ſiehet hieraus, daß alſo alle

alle Exponenten der Potenzen, oder alle Glieder der arithmetiſchen Reihe, alle **Logarithmen** der ganzen Zahlen zwiſchen 1 und 10 wahre Brüche ſeyn müſſen, weil ſie kleiner als 1 ſind, und alle Logarithmen der Zahlen, die über 10 ſind, ganze Zahlen mit angehängten Brüchen ſeyn müſſen, alſo unächte Brüche, weil allezeit bey jeden Potenzexponenten oder Logarithmen, dazwiſchen dieſe fallen, ſich ganze Zahlen befinden. So werden z. E. alle Logarithmen der Zahlen zwiſchen 10 und 100, die Potenz der 1 und noch einen Bruch zum Logarithmen haben, weil erſtlich bey 100 der Logarithme 2 wird, u. ſ. w. Man nennet dieſe **ganze Zahlen** und auch die **Null**, welche ſich bey den Logarithmen befindet, ihre **Charakteriſtik**, und dabey findet ſich nun bey allen übrigen Zahlen, außer denen, die in der Progreſſion vorkommen, nemlich, als bey 10, 100, 1000, 10000 ꝛc die ganze Zahlen allein zu Logarithmen haben, der Bruch. Druckte man den Bruch allgemein durch $\frac{m}{n}$ aus, ſo würde alſo z. E. der Logarithme von 5 ſeyn, $= 0 + \frac{m}{n}$ der Logarithme von 45 $= 1 + \frac{m}{n}$ u. ſ. w. Weil die Exponenten der Potenzen aller Zahlen, oder ihre Logarithmen, die ſich zwiſchen denen befinden, die blos eine ganze Zahl zur Charakteriſtik oder Potenz haben, doch als würkliche Potenzen der 10 müſſen betrachtet werden, ſo wird man nicht einmal

mal dieſen Bruch gänzlich genau ausdrücken können. Man muß ſich begnügen, nur die Bruchpotenz, oder den Logarithmen, der zwiſchen die Glieder der Reihe fallenden Zahlen, durch Näherung auszudrücken. Man hat daher Decimalbrüche dazu genommen, die man an die Charakteriſtik angehänget hat, und man findet ſie in den kleinen gedruckten Tafeln bis auf 7 Decimalbrüche, außer der Charakteriſtik berechnet, daß alſo obſchon daher kein einziger Logarithme, außer den Potenzen der 10, nemlich 1, 10, 100, 1000. 10000 ꝛc. völlig wahr und richtig iſt, doch der Fehler kein ein zehn Millionen Theilchen beträgt.

§. 347. Und wie hat man nun dieſe Logarithmen gefunden? Auf eine erſtaunend mühſame, obſchon nicht ſo ſchwere Art. Durch die Suchung der mittlern Proportionalzahlen zwiſchen der geometriſchen und arithmetiſchen Reihe, die man, wenn wir unſere gewöhnlichen Tafeln betrachten, immer bis auf 7 Decimalbrüche ſuchte, bis man endlich auf eine Zahl kam, welche der verlangten Zahl ſo nahe kam, daß der Fehler kein $\frac{1}{10000000}$ betrug, und die nahm man als die wahre an, dabey man denn auch ihren Logarithmen, den man durch die Suchung der mittlern arithmetiſchen Proportionalzahl für jedesmalige mittlere geometriſche Proportionalzahl gefunden hatte, nun auch erhielt. Jetzt hat man Kunſtgriffe, die Logarithmen beſſer zu finden, welches aber die Leute, die unſere Tafeln verfertiget haben, noch nicht wußten, und wel-

ches

ches ſich auch hier nicht erklären läßt. In dem Anhange zu dieſer 2ten Ausgabe wollen wir doch es deutlich zu machen ſuchen, und zeigen, daß man durch dieſen Kunſtgriff in einer Stunde mehr Logarithmen finden kann, als ſonſt auf die alte Art in einem Tage. Jetzt erklären wir die Art, deren ſich die Erfinder bedienten. Wir wollen jetzt, um ein Exempel davon zu geben, den Logarithmen von 9 ſuchen, damit ſich unſere Leſer einen deutlichen Begriff von der mühſamen Arbeit dieſer Leute machen können. Es iſt aus §. 272 bekannt, daß, wenn man eine mittlere geometriſche Proportionalzahl ſuchet, wenn die zwey äußerſten gegeben ſind, welche a und b heißen ſollen, man alſo verfähret.

$\overline{a : x = x : b}$. Folglich iſt $x^2 = a \cdot b$ §. 269 und aus beyden der $\sqrt[2]{\ }$ gezogen $x = \sqrt{ab}$. Man muß alſo die beyden gegebenen äußerſten Glieder mit einander multipliciren, und aus dem Produkte den $\sqrt[2]{\ }$ ziehen, ſo hat man die mittlere geometriſche Proportionalzahl. Die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl findet man nach §. 261, wenn c und d die äußerſten ſind $\overline{c - x = x - d}$, ſo iſt nach §. 258. $x + x$ oder $2x = c + d$, wenn man beydes durch 2 dividiret, ſo findet man $x = \frac{c + d}{2}$ man muß alſo die beyden äußerſten addiren, und alsdenn die Summe durch zwey dividiren. Auf dieſe Art bekömmt man ſowol die mittlere geometriſche Proportionalzahl, als auch ihren Logarith-

men. Wenn man nun zwey Potenzen der 10 hätte, z. E. 10^n und 10^{n+1}, wozwiſchen man die mittlere Proportionalzahl ſuchte, ſo müßte man alſo verfahren, $10^n : x = x : 10^{n+1}$. Alſo $10^n . 10^{n+1} = x^2$. Aber $10^n . 10^{n+1}$ iſt $= 10^{n+n+1} = 10^{2n+1}$. Alſo $10^{2n+1} = x^2$. Aus beyden den $\sqrt{}$ gezogen, $\sqrt[2]{10^{2n+1}} = x$. Es iſt aber auch $\sqrt[2]{10^{2n+1}} = 10^{\frac{2n+1}{2}}$, alſo $10^{\frac{2n+1}{2}} = x$

Hieraus ſiehet man alſo, daß der Logarithme der neuen mittlern Zahl iſt, die Logarithmen der beyden alten addirt, und durch 2 dividiret, und die mittlere neue Zahl ſelbſt iſt, die beyden alten multipliciret, und den $\sqrt[2]{}$ ausgezogen, welches wir auch vorher ſagten.

§. 348. Zum Verſuch wollen wir nun anfangen den Logarithmen für die Zahl 9 auf 7 Decimalſtellen zu ſuchen, und daher gleich ſowol denen uns bekannten Zahlen der geometriſchen Progreſſion als der arithmetiſchen, 7 Nullen anhangen, aber als 7 Decimalbrüche, die alſo, da ſie Nullen ſind, nichts bedeuten, und die Zahlen nicht ändern. Die beyden uns bekannten Zahlen der geometriſchen Progreſſion, wozwiſchen 9 fällt, ſind 1 und 10. Wir fangen alſo an zu ſchließen: $1,0000000 : x = x : 10,0000000$; alſo $x^2 = 10,00000000000000$ und $x = \sqrt{10,00000000000000}$ dieſer iſt 3,1622777 ... für 7 Decimalſtellen, alſo auch die mittlere Pro-

por-

portionalzahl. Der Logarithme dazu wäre nun ſo zu finden. Weil der Logarithme von 1 die Null iſt, und von 10 die 1 iſt, ſo müßte man alſo in einer arithmetiſchen Proportion ſchließen: $0 - x : x - 1$, alſo $0 + 1 = 2x$ oder $1 = 2x$, alſo $x = \frac{1}{2}$. Dieſer 1 wollen wir auch 7 Nullen anhängen, und dann dividiren, alſo $\frac{1,0000000}{2}$ $= 0,50000000$. Nun haben wir die mittlere Proportionalzahl zwiſchen 1 und 10, und auch ihren Logarithmen, die Zahl ſelbſt iſt 3,1622777 ... ihr Logarithme 0,50000000, allein das iſt noch nicht 9, welches man doch ſuchet, mit ſeinen Logarithmen. Man ſuchet alſo abermals die mittlern Proportionalzahlen, ſowol geometriſch als arithmetiſch, zwiſchen dieſer gefundenen und 10. Man muß alſo abermals dieſe gefundene Zahl, und 10 mit 7 angehängten Decimalullen mit einander multipliciren, und aus dem Produkt den $^2\surd$ ziehen, ſo hat man wieder die mittlere geometriſche Proportionalzahl zwiſchen 3,1622777 und 10. Die Logarithmen von beyden addiret man, und dividirt die Summe abermals durch 2, ſo hat man auch den Logarithmen für die neue mittlere geometriſche Proportionalzahl. Z. E. $3,1622777 \cdot 10,0000000$ iſt $= 31,622777000000$ und der $^2\surd$ daraus bis auf 7 Decimalſtellen iſt $= 5,6234132$. Der Logarithme dazu iſt der Logarithme von der vorigen Zahl, addirt zu dem Logarithmen von 10, und die Summe dividirt durch 2. Alſo

$$\frac{0,50000000 + 1}{2} = \frac{1,50000000}{2} = 0,7500000.$$

Das iſt aber noch nicht 9 und ihr Logarithme, man ſuchet alſo abermals die mittlere Proportionalzahl zwiſchen 10 und 5,6234132 und den Logarithmen dazu, und man ſuchet ſo immer zwiſchen zweyen Zahlen die mittlere Proportionalzahl mit ihren Logarithmen, bis man endlich auf die Zahl kömmt, welche man ſuchet, die anſtatt der Decimalbrüche hinter ihr nach Ausziehung der Wurzel nur ſo viel Decimalnullen hat. In folgender Tabelle iſt ſo die Findung der Zahl 9 mit ihren Logarithmen gezeiget, da die mittlere Zahl in den Fächern allezeit die gefundene mittlere Proportionalzahl iſt, und die Buchſtaben zeigen an, zwiſchen welchen man ſie allezeit geſuchet hat, und wie man zwiſchen der gefundenen mittlern und einer ſchon gehabten Zahl abermals die neue hat ſuchen müſſen. In der letzten Columne ſind die Logarithmen dieſer gefundenen Zahlen. Man wird ſehr gut thun, wenn man einen Logarithmen von etwa einer andern Zahl alſo berechnet, weil man ſich ſehr dadurch in Ausziehung des $^2\surd$ üben wird.

	Mittlere geometriſche Proportionalzahlen.	Ihre Logarithmen.
a	1,0000000	0,00000000
c	3,1622777	0,50000000
b	10,0000000	1,00000000
b	10,0000000	1,00000000
d	5,6234132	0,75000000
c	3,1622777	0,50000000

	Mittlere geometriſche Proportionalzahlen.	Ihre Logarithmen.
b	10,0000000	1,00000000
e	7,4989421	0,875000000
d	5,6234132	0,75000000
b	10,0000000	1,00000000
f	8,6596432	0,93750000
e	6,4989421	0,875000000
b	10,0000000	1,00000000
g	9,3057204	0,96875000
f	8,6596432	0,93750000
g	9,3057204	0,96875000
h	8,9768713	0,95312500
f	8,6596432	0,93750000
g	9,3057204	0,96875000
i	9,1398170	0,96093750
h	8,9768713	0,95312500
i	9,1398170	0,96093750
k	9,0579777	0,95703125
h	8,9768713	0,95312500
k	9,0579777	0,95703125
l	9,0173333	0,95507812
h	8,9768713	0,95312500
l	9,0173333	0,95507812
m	8,9970796	0,95410156
h	8,9768713	0,95312500
l	9,0173333	0,95507812
n	9,0072008	0,95458984
m	8,9970796	0,95410156

	Mittlere geometriſche Proportionalzahlen.	Ihre Logarithmen.
n	9,0072008	0,95458984
o	9,0021388	0,95434570
m	8,9970796	0,95410156
o	9,0021388	0,95434570
p	8,9996088	0,95422363
m	8,9970796	0,95410156
o	9,0021388	0,95434570
q	9,0008737	0,95428467
p	8,9996088	0,95422363
q	9,0008737	0,95428467
r	9,0002412	0,95425415
p	8,9996088	0,95422363
r	9,0002412	0,95425415
s	8,9999250	0,95421889
p	8,9996088	0,95422363
r	9,0002412	0,95425415
t	9,0000831	0,95424652
s	8,9999250	0,95423889
t	9,0000831	0,95424652
v	9,0000041	0,95424271
s	8,9999250	0,95423889
v	9,0000041	0,95424217
x	8,9999650	0,95424080
s	8,9999250	0,95423889
v	9,0000041	0,95424271
y	8,9999845	0,95424217
x	8,9999650	0,95424080

	Mittlere geometriſche Proportionalzahlen.	Ihre Logarithmen.
v	9,0000041	0,95424271
z	8,9999943	0,95424223
y	8,9999845	0,95424217
v	9,0000041	0,95424271
α	8,9999992	0,95424247
z	8,9999943	0,95424223
v	9,0000041	0,95424271
β	9,0000016	0,95424259
α	8,9999992	0,95424247
β	9,0000016	0,95424259
γ	9,0000004	0,95424253
α	8,9999992	0,95424247
γ	9,0000004	0,95424253
δ	8,9999998	0,95424250
α	8,9999992	0,95424247
γ	9,0000004	0,95424253
ε	9,0000000	0,95424251
δ	8,9999998	0,95424250

Hier iſt die letzte mittlere Proportionalzahl, die neben ε ſteht, der 9 ſo nahe, daß der Fehler noch kein ein zehn Millionen Theilchen beträgt, man kann ſie alſo für 9 annehmen, und ihr Logarithme iſt die daneben ſtehende Zahl, 0,95424251. Wir haben die Logarithmen auf 8 Decimalbrüche berechnet, weil zuletzt die Logarithmen ſich in den erſten ſieben Decimalbrüchen gleich zu werden anfangen.

§. 349. Auf ſolche mühſame Art ſind nun die Logarithmen ſehr vieler Zahlen berechnet, ich ſage **ſehr vieler**, aber nicht aller. Denn es durften nur die Logarithmen der ganzen Zahlen berechnet werden, die man nicht in Faktores zerlegen kann, und daher **Primzahlen** genennet werden, z. E. 2, 5, 7, 11, 13, 17, 19 u. ſ. w. Derer giebt es nun freylich auch eine große Menge, wenn man nur bis 10000 hinzählet. Die Logarithmen der andern Zahlen können auf verſchiedene andere Arten gefunden werden, ſie können durch die **Addition**, **Subtraktion** und **Multiplikation** der Logarithmen gefunden werden. Weil Potenzen mit einander multipliciren, ihre Exponenten addiren heißt, ſo darf man nur, wenn man die Logarithmen verſchiedener Primzahlen hätte, und wiſſen will, welcher Logarithme dem Produkt aus dieſen Zahlen zukömmt, nur dieſe Logarithmen addiren, weil in dieſem Logarithmenſyſtem alle Zahlen Potenzen der 10 ſind, z. E. 3 . 5 = 15. Man addirt den Logarithmen von 5 zu dem Logarithmen von 3, ſo hat man den Logarithmen von 15. Nach den gedruckten Tafeln iſt

$$\begin{array}{r} L.\ 5 = 0{,}6989700 \\ L.\ 3 = 0{,}4771212 \\ \hline \text{alſo } L.\ 15 = 1{,}1760912 \end{array}$$

Und wenn man hiezu noch den Logarithmen von einer andern Zahl addirte, ſo hätte man den Logarithmen von der Zahl, die dieſe mit 15 multipliciret wäre. Z. E. 9 . 15 = 135.

alſo zu L. 15 = 1,1760912
addirt L. 9 = 0,9542425

giebt L. 135 = 2 1303337

Auch durch die Subtraktion kann man ſie finden, wenn man ſchon einige hat, weil gleichnamichte Potenzen dividiren, ihre Exponenten von einander ſubtrahiren heißt. Z. E. der L. 10 = 1,0000000.. hätte man nun auch den L. 5 = 0,6989700, ſo wäre der L. $\frac{10}{5}$ oder L. 2 = dem L. 10 — L. 5. oder die beyden müſſen von einander abgezogen werden L. 10 = 1,0.0.0.0.0.000
L. 5 = 0,6 9 8 9 7 0 0

von einander abgezogen giebt L. 2 = 0,3 0 1 0 3 0 0

Eben auch durch die Multiplication, weil Potenzen zu neuen Potenzen erheben, ſie mit der Zahl, die anzeigt, zu welcher Potenz ſie erhoben werden ſollen, multipliciren heißt, ſo darf das nur mit den Logarithmen geſchehen, ſo hat man den Logarithmen der Potenz.

Z. E. 9 . 9 = 9^2 = 81. Nun iſt der
L. 9 = 0,9542425
multipliciret mit 2

giebt L. 81 = 1,9084850

So würde ferner der Logarithme von 9, multipliciret mit 3, den Logarithmen 9^3 = 729 geben, welcher ſeyn würde L. 9 = 0,9542425
3

= 2,8627275 = L. 729.

§. 350. Die Logarithmen von einer Zahl, welche mit 10, oder Potenzen der 10 multipliciret iſt, bleiben eben dieſelben, als die Zahl ſelbſt war, nur daß die Charakteriſtik verändert, und um eins oder um ſo viele Einer vermehrt wird, als ſie mit Potenzen der 10 multipliciret iſt, welches auch leicht begreiflich ſeyn wird, wenn man bedenket, daß die Multiplikation bey logarithmiſchen Rechnungen, wie wir geſehen haben, in eine Addition verändert wird, und die Potenzen der 10 nur 1, 2, 3, 4, 5 u. ſ. w. oder blos eine ganze Zahl ohne angehängten Decimalbruch zum Logarithmen haben. So iſt alſo z. E. L. 20 = L. 2 + L. 10 = 0,3010300 + 1 = 1,3010300, weil 20 = 2 . 10. Ferner L. 200 = L. 2 + L. 100 = 0,3010300 + 2 = 2,3010300, weil 200 = 2. 100 u. ſ. w. Eben ſo L. 810 = L. 81 + L. 10 = 1,9084850 + 1 = 2,9084850, weil 810 = 81 . 10 u. ſ. w.

Eben ſo behält auch eine Größe, die durch Potenzen der 10 dividiret wird, eben den Logarithmen, nur daß ihre Charakteriſtik um ſo viel 1 vermindert wird, als die Potenzen der 10, oder genauer als der Exponent der Potenz der 10 iſt. Z. E. L. von 2700 iſt = 3,4313638, alſo L. von 270 = L. 2700 − L. 10 = 3,4313638 − 1 = 2,4313638 und L. 27 = L. 2700 − L. 100 = 3,4313638 − 2 = 1,4313638 und L. 27 = L. 270 − L. 10 = 1,4313638 − 1 = 0,4313638 u. ſ. w., welches jeder durch Exempel üben wird.

§. 351.

§. 351. Man ſiehet alſo, daß bey logarithmiſchen Rechnungen alle Multiplikation in Addition, die Diviſion in Subtraktion, die Erhebung zu Potenzen in Multiplikation (voriger §.) verwandelt wird. Eben ſo wird auch die Ausziehung der Wurzeln in Diviſion der Logarithmen verwandelt, weil, wie wir wiſſen, Potenzen durch den Wurzelexponenten dividiren, die Wurzel ausziehen heißt. Z. E. der Logarithme von 49 iſt $= 1{,}6901961$, alſo der $L. \sqrt[2]{49} = L. 49^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{L. 49}{2}$ oder $\frac{1{,}6901961}{2} = 0{,}8450980$. Dieſes iſt alſo $L. \sqrt{49}$, und wenn man dieſen Logarithmen in den Tafeln, von denen wir nachher reden werden, ſuchet, ſo findet man, daß die ihm zugehörige Zahl 7 ſey, welches auch $\sqrt{49}$ iſt. Eben ſo $L. \sqrt[4]{256}$ iſt $= \frac{L. 256}{4} = \frac{2{,}4082400}{4}$ $= 0{,}6020600$, welches der L. von 4 iſt, und das iſt auch $= \sqrt[4]{256}$.

§. 352. Ehe wir weiter gehen, und die verſchiedenen Rechnungen mit Logarithmen zum Theil, wie zu der Abſicht dieſes Buchs nöthig iſt, erklären, wollen wir erſt unſern Leſern die Einrichtung und Gebrauch der üblichen gedruckten logarithmiſchen Tafeln anzeigen. Heinrich Brigg hat auf die Art, wie wir gezeigt haben, die Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 20000, und auch von 90000 bis 100000 berechnet. Ein Holländer, Adrian Vlacq, berechnete darauf

die

die Logarithmen der Zahlen von 20000 bis 90000, und gab ſeine Logarithmen 1628 zu Goudan heraus, alſo, daß man würklich die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000 hatte. Nachher erſchien eine Ausgabe, wo die briggiſchen und vlacqiſchen Logarithmen zuſammen waren von 1 bis 10,000 1742 unter dem Titel: Sherwins Mathematical Tables contrivd after a moſt comprehenſive method &c. by William Gardiner, zu London. Vor zwey Jahren hat man dieſe Tafeln zu Avignon wieder aufgelegt, und noch verſchiedene Einrichtungen dabey gemacht. Es ſind unterdeſſen noch viele kleinere Ausgaben an manchen Orten gemacht, wo man nur die Logarithmen von 1 bis 10000 antrift, und dieſes ſind diejenigen, die man am gewöhnlichſten antrift und gebrauchet. Wir ſagen von der Einrichtung der großen Tafeln hier nichts, weil unſere Leſer ſich wol vors erſte mit den kleinen behelfen werden. Wer von dem Gebrauch der großen umſtändliche Nachricht einziehen will, findet ſie unter andern in des Herrn Karſten zweytem Theil des **Lehrbegrifs der geſammten Mathematik** p. 214. 2c. Von den kleinern Tafeln hat man verſchiedene holländiſche Ausgaben, die auch in Teutſchland nachgedruckt ſind, unter andern auch verſchiedene Ausgaben vom Herrn von Wolff. Die Einrichtung der mehrſten iſt folgende: vorne findet man die Tafeln der *Sinuum*, Tangentium, & Secantium mit ihren Logarithmen, doch davon reden wir erſt in der Trigonometrie. Nachher die Tafeln der Logarithmen von 1 bis 10000; da in einer

ner Columne die Zahlzeichen, und in der daneben ſtehenden ihre Logarithmen mit ihrer Charakteriſtik gedruckt ſind. Die Logarithmen ſind bis auf 7 Decimalbrüche neben der Charakteriſtik berechnet, da die Charakteriſtik von 1 bis 9 = 0, die Charakteriſtik von 10 bis 99 = 1, von 100 bis 999 = 2, von 1000 bis 9999 = 3, von 10000 bis 99999 = 4, und überhaupt mit jeder Potenz der 10 um 1 ſteiget. Man ſiehet hieraus, daß man, wenn man die Zahl weiß, auch wiſſe, wie viel Einheiten ſie zur Charakteriſtik habe, denn man weiß ja, zwiſchen welche ganze Potenzen der 10 ſie fällt. Ferner ſiehet man auch hieraus, daß die Charakteriſtik jeder Zahl um 1 weniger iſt, als die Anzahl der Zahlzeichen, die in jeder Zahl ſich befinden. Z. E. alle Zahlen zwiſchen 100 und 1000 beſtehen aus drey Zahlzeichen, und ihre Charakteriſtik iſt um 1 weniger, nemlich ſie iſt 2; die Charakteriſtik aller Zahlen zwiſchen 1000 und 10000, die nur aus vier Zahlzeichen beſtehen, iſt 3, u. ſ. w. Man könnte alſo die Charakteriſtik ganz weglaſſen, wie auch in den großen Tafeln geſchehen iſt. Will man nun den Logarithmen einer Zahl haben, ſo ſuchet man in den Tafeln die Zahl, und neben bey ſteht ihr Logarithme. Hat man einen Logarithmen, ſo ſuchet man in den Tafeln eben den Logarithmen auf, den man, weil man ſeine Charakteriſtik hat, bald findet, und neben bey ſtehet die Zahl, wozu er gehöret. Hat man einen Logarithmen, und man findet ihn nicht ſo völlig genau in den Tafeln, ſondern es treffen nur etwa vier oder

fünf

fünf der erſten Ziffern damit überein, ſo zeiget das an, daß die Zahl noch um einige Decimalbrüche größer oder kleiner ſey, welches man daraus ſiehet, ob die Zahl, die nun nicht mit der Zahl des Logarithmen in den Tafeln übereintriſt, größer oder kleiner als dieſe iſt. Je weiter die Zahlen der Logarithmen mit einander übereintreffen, je kleiner iſt der Unterſchied, oder je geringer an Werth die Decimalbrüche, darum ſie unterſchieden ſind, welchen Unterſchied man in vielen Rechnungen, die auf der Erde vorgenommen werden, öfters negligiren kann.

§. 353. Da wir hier vorzüglich von den kleinen logarithmiſchen Tafeln reden, wollen wir uns auch auf deren Gebrauch vorzüglich einlaſſen, und unſere Exempel darnach wählen, obſchon das, was hier geſagt wird, ſich auch auf die größern wird appliciren laſſen. Wie man den Logarithmen der ganzen Zahl findet, ſo weit er in den Tafeln ſteht, iſt ſchon geſagt im vorigen §. Wir wiſſen auch ſchon vorläuftig, daß, wenn man zwey oder mehrere Zahlen mit einander zu multipliciren hat, man nur ihre Logarithmen addiren darf, die man vorher in den Tafeln aufſuchet, denn aus dieſen zuſammenaddirten Logarithmen entſtandenen Logarithmen ſuchet man wieder, daneben man denn die Zahl, die ihm zugehöret, findet. Doch wir wollen nun alles dieſes ausführlicher betrachten. Z. E. 136 . 24 . 2 iſt logarithmiſch = L. 136 + L. 24 + L. 2.

alſo

also L. 136 = 2,1335389
L. 24 = 1,3802112
L. 2 = 0,3010300 addirt

also L. 136.24.2 = 3,8147801

Dieſen Logarithmen aufgeſucht giebt die daneben ſtehende Zahl 6528, welches = 136.24.2 iſt, u. ſ. w. Mit dem Dividiren geht es eben ſo, nur werden die Logarithmen, wie wir wiſſen, von einander abgezogen, und ſucht man die Zahl für den neuen Logarithmen auf. Z. E. 8815 dividirt durch 1763 iſt logarithmiſch L. 8815 — L. 1763

also L. 8815 = 3,9452223
L. 1763 = 3,2462523 ſubtrah.

folgl. L. 8815 — L. 1763 = 0,6989700

Dieſen aufgeſucht giebt die dabey ſtehende Zahl 5, welches auch $\frac{8815}{1763}$ Hat man entgegengeſetzte Größen zu multipliciren oder zu dividiren, ſo weiß man ſchon vorher, was der Quotient für ein Zeichen bekömmt. Man kann alſo bey dieſem Fall in der Rechnung mit Logarithmen eben ſo rechnen, als ob alles Plusgrößen wären, und nachher, wenn man die Zahl für den gefundenen Logarithmen ſucht, der gefundenen Zahl das Zeichen geben, das ihr gehört.

In §. 350. 351 haben wir ſchon geſagt, wie man logarithmiſch die Größen zu Potenzen erhebt, auch die Wurzel extrahirt. Man ſucht alsdenn auch für den neuen Logarithmen die ihm zugehörige Zahl in den Tafeln. Allein bey dieſen letz-

letztern haben wir noch etwas zu bemerken. Wenn der Radix aus einer Größe keine ganze Zahl iſt, ſo findet man auch für den Logarithmen, den man nun gefunden hat, keine ganze Zahl. Nähme man nun unter den Logarithmen für ganze Zahlen, die dieſen gefundenen am nächſten kämen, einen an, ſo könnte der mannichmal um ein großes zu klein, oder zu groß ſeyn; man thut alſo gleich am beſten, man ſuchet unter den Logarithmen der größten Zahlen, die in den Tafeln ſind, einen auf, der dieſem gleich iſt, und wenn man ſolchen nicht finden kann, doch am nächſten iſt, ohne ſich um die Charakteriſtik vors erſte zu bekümmern; hat man den, ſo bemerket man, welche Charakteriſtik unſer gehabter Logarithme hatte, und ſtreichet alsdenn von der gefundenen Zahl in den Tafeln ſo viele Zahlen von der rechten Hand an gerechnet ab, und machet ſie zu Decimalbrüchen, als die Charakteriſtik unſers Logarithmen weniger Einheiten hatte, als die, welche man nur in der Tafel findet, ſo bekömmt man doch die Wurzel weit genauer. Z. E. $\sqrt[3]{1648}$ logarithmiſch $= \frac{L.1648}{3} = \frac{3,2169572}{3} = 1,0723190$. Dieſen Logarithmen aufgeſucht, findet ſich neben den ganzen Zahlen nicht genau, welche 1 zur Charakteriſtik haben. Der nächſte wäre der Logarithme von 12, welcher 1,0791812 iſt. Allein 12 iſt gewiß zu groß, weil die dritte Zahl in dieſem Logarithmen ſchon größer iſt, als die dritte in meinem gefundenen. Wir wollen ihn alſo unter den großen Zahlen aufſuchen, aber nicht

auf

auf die Charakteriſtik dabey ſehen. Der Logarithme von 1181 iſt ohne Charakteriſtik 0722499, und der von 1182 iſt 0726175; letzterer iſt zu groß und erſterer zu klein, wir wollen aber den erſtern nehmen. Unſere Charakteriſtik war 1, die Charakteriſtik des Logarithmen dieſer Zahl 3, die ſind nun 2 unterſchieden, alſo müſſen wir zwey Zahlen von der Zahl, die zu dieſen Logarithmen gehört, zu Decimalbrüchen machen, und ſtatt 1181 ſetzen 11,81. Hätten wir den letztern Logarithmen genommen, ſo hätten wir ſetzen müſſen 11,82. Der Irrthum ſteckt alſo zwiſchen den beyden Zahlen, und beträgt noch kein $\frac{1}{100}$. Hat man die großen Tafeln, ſo kann man es weit genauer finden, indeſſen iſt auch dieſes in vielen Fällen hinreichend.

Will man für ächte Brüche die Logarithmen ſuchen, ſo wird der Logarithme des Zählers und Nenners in den Tafeln aufgeſuchet, (wenn die Zahlen noch nicht größer ſind, als die ſich in den Tafeln befinden, wie man verfahren muß, wenn ſie größer ſind, davon weiter unten,) und alsdenn der Logarithme des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abgezogen. Weil bey einem ächten Bruch der Nenner allezeit größer iſt als der Zähler, ſo muß die Differenz der Logarithmen negativ werden, man ziehet daher die obere Größe oder des Zählers Logarithmen von des Nenners ſeiner nur ab, und ſetzet die Differenz, welches der gefundene Logarithme iſt, unter das Minuszeichen. Es werden daher auch alle Logarithmen ächter

Brüche, ſie mögen gewöhnliche oder Decimalbrüche ſeyn, negativ. Bey Decimalbrüchen verfähret man eben ſo, man giebt ihnen den Nenner, der ihnen gehöret, deſſen Logarithmen, weil dieſe Nenner allezeit Potenzen der 10 ſind, auch allezeit eine ganze Zahl iſt, und verfähret mit der Subtraktion, wie wir eben geſagt haben. Aus allem dieſem ergiebt ſich, daß die Charakteriſtik der Bruchlogarithmen, die zwiſchen 1 und 0,1 fallen, = 0, die zwiſchen 0,1 und 0,01 fallen − 1, und ſo weiter ſind, wie folgende Progreſſion zeiget, wie in den Lehren von der Multiplikation und Diviſion weitläuftig erkläret iſt.

	0,0001	0,001	0,01	0,1
Charakteriſtik	−4	−3	−2	−1

	1,	10,	100,	1000,	10000
Charakteriſtik	0,	1,	2,	3,	4.

Exempel hievon der $L. \frac{3}{4} = L. 3 - L. 4.$

$$
\begin{array}{rl}
L.\,3 = & 0{,}4771212 \\
L.\,4 = & 0{,}6020600 \\
\hline
\text{alſo } L.\,\frac{3}{4} = & -0{,}1249388
\end{array}
$$

$$
\text{Der } L.\,0{,}0532 = L.\,\frac{532}{10000} = L.\,532 - L.\,10000
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{alſo } L.\,532 = & 2{,}7259116 \\
L.\,10000 = & 4{,}0000000 \\
\hline
& -4{,}2740884
\end{array}
$$

Suchet man dieſe Logarithmen in den Logarithmen der großen Zahlen auf, ſo findet man für den erſten die nächſte Zahl, damit er am meiſten überein-

einkömmt, 1333, und wenn man nicht auf das Zeichen — Rückſicht hätte, ſo wäre die Zahl, weil hier bey unſerm Logarithmen die Charakteriſtik null iſt, = 1,333. Weil aber das Minuszeichen dafür ſteht, ſo iſt die Zahl nun = $\frac{1}{1,333}$. Eben ſo bey dem andern Logarithmen, vor welchem man beynahe die Zahl 1880 unter den gröſten Logarithmen findet. Wäre ſeine Charakteriſtik + 1, ſo wäre ſie alſo 18,8; da ſie — 1 iſt, ſo iſt $\frac{1}{18,8}$. Macht man beyde Brüche zum Decimalbruch, ſo wird man bald finden, daß bey dem erſten der Quotient 0,75, welches = $\frac{3}{4}$, und bey dem andern 0,0532 herauskommt. Denn $\frac{1}{1,333} = \frac{1000}{1333} = 0,750\ldots$ und $\frac{1}{18,8} = \frac{10}{188} = 0,05319\ldots$ welches faſt = 0,0532 iſt. Daß es nicht genau iſt, kömmt daher, weil die Logarithmen nicht genau paßten, davon unten.

Daß die Zahl von einem ſolchen Logarithmen, vor dem das — Zeichen ſteht, ein Bruch iſt, deſſen Zähler = 1, und der Nenner die zu dem Logarithmen in den Tafeln gehörige Zahl, läßt ſich leicht begreifen, wenn man bedenket, daß die Logarithmen Exponenten der Potenzen ſind, und wie wir §. 143 geſehen haben, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, und $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ iſt, oder $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, welches dieſes völlig erklärt. Suchet man für ſolche Brüche Logarithmen, deren Zähler = 1 iſt, ſo darf man nur den Logarithmen des Nenners in den Tafeln ſuchen, und den unter das — Zeichen ſetzen, das iſt der Logarithme eines

ſolchen Bruchs. Z. E. L. $\frac{1}{16}$ = − 1,2041200 denn er iſt = L. 1 − L. 16, aber L. 1 iſt = 0; alſo iſt er = − L. 16, welches dieſer Logarithme iſt. Hierbey iſt gar nichts ſchweres.

§. 354. Um die Logarithmen unächter Brüche zu finden, behandelt man ſie als wahre Diviſionsexempel, wenn man dafür nach §. 253 den Logarithmen ſuchet. Dieſer Logarithme iſt allezeit poſitiv, weil bey uneigentlichen Brüchen der Zähler größer iſt als der Nenner, daher wird es auch leicht fallen, Logarithmen für ganze Zahlen, woran Brüche hangen, zu finden, weil man die leicht zu uneigentlichen Brüchen machen kann. Z. E. L. $3\frac{5}{8}$ = L. $\frac{29}{8}$ = L. 29 − L. 8, aber

L. 29 = 1,4623980
ſubtrahirt L. 8 0,9030900

folglich L. $\frac{29}{8}$ = L. $3\frac{5}{8}$ = 0,5593080.

Suchte man ihn in den Tafeln auf die gelehrte Art auf, ſo fände man dafür 3,625, welches auch $\frac{29}{8}$ oder $3\frac{5}{8}$, wenn man es in einen Decimalbruch verwandelt, ſeyn wird. Wenn an einer Zahl ſich noch Decimalbrüche befinden, ſo verwandelt man die ganze Größe in einen uneigentlichen Decimalbruch, welches durch die Multiplikation mit Potenzen der 10 geſchieht, und giebt ihm einen ſolchen Nenner von ſolcher Potenz der 10, als die iſt, damit man ſie multipliciret hat, und verfährt übrigens damit, wie mit einem gewöhnlichen Diviſionsexempel, das iſt man den Logarithmen ſuchet. Dieſer Logarithme wird gleichfalls poſitiv ſeyn. Es iſt hier immer

mer noch die Rede von ſolchen Größen, da die Zahlen ſich in den Tafeln finden. Z. E. L. 2,545 = L. $\frac{2,545}{1}$ = L. $\frac{2545}{1000}$ = L. 2545 − L. 1000

L. 2545 = 3,4056878
L. 1000 = 3,0000000

ſubtrahirt 0,4056878 = L. $\frac{2545}{1000}$ = L. 2,545, welchem genau die Zahl 2,545 auch correſpondiret.

§. 355. Da wir geſehen haben, wie man die Logarithmen für allerley Brüche finden muß, ſo wird es uns nun auch leicht ſeyn, mit Brüchen, oder Brüchen und ganzen Zahlen zu rechnen, und alle die Arten Rechnungen, die ſich damit machen laſſen, logarithmiſch zu führen, als multipliciren, dividiren, erheben zu Potenzen, Wurzel ausziehen u. ſ. w. Man verfährt völlig auf die Art, wie §. 354 gelehrt iſt, daß die Logarithmen ächter Brüche Minusgrößen ſind. Nur ein Paar Exempel davon, $\frac{3}{4}$. 8 wäre L. $\frac{3}{4}$ + L. 8.

Alſo L. $\frac{3}{4}$ = − 0,1249388 §. 353
L. 8 = + 0,9030900

= + 0,7781512 = L. $\frac{3}{4}$. 8

welchem Logarithmen die Zahl 6 zugehöret, und $\frac{3}{4}$. 8 iſt auch = 6.

Eben ſo $(\frac{3}{4})^2$ = 2. L. $\frac{3}{4}$ = − 0,1249388
2

− 0,2498776

welcher Logarithme faſt zu der Zahl $\frac{1}{1,778}$ gehöret, und $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ iſt auch faſt = $\frac{1}{1,778}$ oder $\frac{1000}{1778}$

$\frac{1000}{1778}$, weil $\frac{9}{16}$ und $\frac{1000}{1778}$ faſt einerley Quotienten geben, wenn beyde zu Decimalbrüchen gemacht werden, nemlich 0,5625. Wollte man den $\sqrt{\frac{3}{4}}$ logarithmiſch ſuchen, das wäre L. $\frac{3}{4} : 2 = -\frac{0,1249388}{2} = -0,0624694$, welchem die Zahl $\frac{1}{1,155}$ am nächſten zugehöret, dieſes $\frac{1}{1,155}$ iſt alſo der $\sqrt{}$ aus $\frac{3}{4}$, denn $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,7320\ldots}{2}$ $= 0,8660\ldots$ Eben ſo iſt $\frac{1}{1,155} = \frac{1000}{1155} = 0,8640\ldots$ welches etwas zu klein iſt, weil der Logarithme nicht genau in den Tafeln war. Davon unten.

§. 356. Wir werden nun auch leicht gedenken können, daß man die Logarithmen auch bey den Proportionen wird gebrauchen können, und man gebraucht ſie auch ſehr oft. Wer logarithmiſch Multiplikations- und Diviſionsexempel machen kann, dem kann dieſes nicht mehr ſchwer ſeyn, wenn er nur ſich erinnet, daß bey logarithmiſchen Rechnungen die Multiplikation in eine Addition, und die Diviſion in Subtraktion verwandelt wird, und dabey, weil es mannichmal vorkömmt, die Rechnung mit entgegengeſetzten Größen wohl inne hat. Ein Exempel wird dieſes erläutern. 100 ℔ koſten 76 Thlr. was koſten 7350 ℔? Ob man nun gleich dieſes Exempel eben ſo leicht auf die gewöhnliche Art rechnen könnte, wollen wir es doch einmal logarithmiſch rechnen, alſo $100 : 7350 = 76 : x$, weil $x = \frac{7350 . 76}{100}$, ſo iſt es durch Logarithmen, L. 7350 + L. 76 − L. 100.

Alſo

Alſo L. 7350 = 3,8662873
L. 76 = 1,8808136

5,7471009 addirt

L. 100 = 2,0000000

3,7471009 ſubtrahirt.

welcher Logarithme in den Tafeln zu 5586 gehöret, alſo ſo viel Thaler koſten die 7350 ℔.

Noch ein Exempel, wenn man zwey gleiche große Klumpen Eiſen und Bley hat. Wir wollen z. E. ſolche, die in eine Forme gegoſſen wären, dafür annehmen, ſo würden ſich ihre Gewichte gegen einander verhalten, wie 176:256. Man hat nun eine eiſerne Kugel, die 1 ℔ wieget, man will wiſſen, wie viel eine bleyerne wägen würde, die von eben der Größe oder in eben der Form gegoſſen wäre, man kann alſo ſchließen,

176 : 256 = 1 ℔ : x ℔

und $x = \frac{256.1}{176}$ logarithmiſch L. 256 — L. 176.

L. 256 = 2,4082400
L. 176 = 2,2455127

0,1627273 ſubtrahirt

Dieſen Logarithmen unter den größern Zahlen der Tafeln aufgeſuchet, und wegen der Charakteriſtik das gehörige beobachtet, giebt eine Zahl, die zwiſchen 1,454 und 1,455 fällt, alſo iſt der Irrthum, da man in den Tafeln die Zahl nicht genau findet, doch noch kleiner als $\frac{1}{1000}$ eines ℔. welches ohngefähr der 8te Theil eines Quentins iſt. Man könnte alſo wol annehmen, die bleyerne Kugel

 wöge,

wöge, 1,454 ℔ oder 1 ℔ + $\frac{454}{1000}$ ℔. Man ſiehet auch hieraus, wie man zu jeden drey gegebenen Zahlen einer geometriſchen Proportion die 4te allezeit logarithmiſch finden könne, es mag ſeyn welche es wolle, weil man jede zur 4ten machen kann, §. 272.

§. 357. Man möchte endlich fragen, was das nun für Logarithmen wären, die zu den **Minusgrößen** gehörten, z. E. L. — 8, L. — 1000. oder L. — a. Wir antworten, man hat dafür keine Logarithmen; ſondern die Logarithmen ſind **unmögliche Größen**, eben ſo wie man kein √ — 4 ꝛc. hat. Denn die **poſitiven** Logarithmen ſind alle für poſitive Zahlen, die größer als 1 ſind, die **negativen** Logarithmen für Brüche, die kleiner als Eins ſind, §. 353 aber doch größer als 0. Nun iſt eine negative Größe dieſes alles nicht. Da es nun keine andere als poſitive oder negative Logarithmen geben kann, ſo ſind für die keine Logarithmen da.

§. 358. Wir haben bis daher immer mit Logarithmen gerechnet, die wir noch in den Tafeln, auch in den kleinen gewöhnlichen Tafeln finden konnten. Wie macht man es da, wenn man Größen hat, die größer ſind als die ſich in den Tafeln befinden, dafür den Logarithmen zu finden; und wenn man Logarithmen hat, die eine größere Charakteriſtik haben, als die man in den Tafeln antrift, und deren andere Zahlen mit den Zahlen der Logarithmen in den Tafeln nicht völlig übereintreffen

treffen, oder wo beydes nicht iſt, dazu die Zahl zu finden? Dieſes leitet uns auf zwey allgemeine Aufgaben und Unterſuchungen.

1) **Es iſt eine Zahl gegeben, deren Logarithme nicht in der Tafel iſt, man ſuchet ihn.**

2) **Es iſt ein ſolcher Logarithme gegeben, man ſuchet die Zahl dazu.**

§. 359. Die erſte Aufgabe alſo: Es iſt eine Zahl gegeben, deren Logarithme nicht in den Tafeln iſt, man ſuchet dazu den Logarithmen. Man ſehe erſt zu, ob ſich dieſe Zahl in Faktores zertheilen läßt, die ſich in den Tafeln unter den Zahlzeichen finden, und addire alsdenn alle die Logarithmen dieſer Faktoren, ſo bekommt man den Logarithmen der gegebenen Zahl §. 349. Dieſer Weg iſt leicht, und der beſte und gewiſſeſte. Ein Paar Exempel ſollen es erläutern. Man ſuchet den Logarithmen von 183220. Dieſe Zahl findet ſich in den Tafeln nicht. Allein ſie kann auf verſchiedene Art in Faktoren zerlegt werden. Ihre Faktoren waren z. E. 10 . 2 . 9161, oder 20 . 9161

Alſo:

$$L.\ 20 = 1,3010300$$
$$L.\ 9161 = 3,9619429$$

folgl. $L.20 + L.9161 = L.\ 183220 = 5,2629729$

Noch ein Exempel. Der L. von 1492992 iſt = L. 36 + L. 128 + L. 324, weil ſich die Zahl in

dieſe Faktoren zerlegen läßt, oder 1492992 = 36 . 128 . 324, alſo L. 36 = 1,5563025
L. 128 = 2,1072100
L. 324 = 2,5105450

folglich L. 1492992 = 6,1740575

u. ſ. w. Wenn aber die Zahl ſich nicht in Faktoren zerlegen läßt, ſo muß man andere Wege ſuchen. Man kann alsdenn die Logarithmen durch die Differenzen finden. Man findet bey großen Zahlen, daß die Differenzen zweyer Zahlen, und die Differenzen ihrer Logarithmen faſt einerley, und nur in ſehr kleinen Theilen verſchieden ſind.

Z. E. der L. von 9991 = 3,9996090
der L. von 9990 = 3,9995655

ihre L. Differenz = 435

Ferner: L. 9992 = 3,9996.5.2.4
L. 9990 = 3,9995655

ihre L. Differenz = 869

Die Differenz zwiſchen 9990 und 9991 war = 1, und die Differenz zwiſchen 9990 und 9992 war = 2. Gleichfalls iſt die logarithmiſche Differenz zwiſchen 9990 und 9992, alſo zwiſchen zwey Zahlen, die um 2 verſchieden ſind, faſt auch nochmal ſo groß, als die logarithmiſche Differenz zwiſchen zwey Zahlen, die nur um 1 verſchieden ſind. Denn 435 . 2 iſt faſt = 869, und es fehlet hier bey den Logarithmen nur 1 zehn Milliontel Theilchen. Es iſt dieſes freylich nur bey ſieben Decimalſtellen, worauf die Logarithmen in den kleinern Tafeln berechnet

rechnet ſind, richtig, aber man braucht auch in den allermehrſten Rechnungen nicht mehr Decimalſtellen für die Logarithmen. Man kann alſo die Differenzen der Zahlen mit den Differenzen der Logarithmen bey großen Zahlen vergleichen, ohne eben einen merklichen Irrthum zu begehen. Hierauf gründet ſich nun folgendes Verfahren.

1) Wenn große Zahlen gegeben ſind, welche ſich in den Tafeln nicht finden, ſo ſtreichet man von den Zahlen ſo viel von der linken nach der rechten Hand ab, daß nur noch ſo viel rechter Hands überbleiben, als man noch Zahlen in den Tafeln hat, und ſiehet die andern vors erſte als Decimalbrüche an. Z. E. es wäre gegeben die Zahl 8946352, ſo ſchneidet man ſie bis 6 ab, weil ſie ſo weit noch in den Tafeln iſt, und ſiehet ſie alſo auf ſolche Art an, 8946,352.

2) Nun ſuchet man von dieſer abgeſchnittenen Zahl, und der um 1 größern, die Logarithmen, und ziehet den kleinern von dem größern ab. Z. E.

$$\begin{array}{l} L.\ 8947 = 3,9516774 \\ L.\ 8946 = 3,9516289 \\ \hline \end{array}$$

Hier iſt die Differ. der nat. Zahl. = 1 und die L. Differ. = 485 oder vielmehr 0,0000485

Man hat alſo die logarithmiſche Differenz einer Zahl, die um 1 größer iſt als 8946.

§. Weil ich die letztern 3 Zahlen von meiner gegebenen Zahl als Decimalbrüche betrachtet habe, ſo

ſo ſind ſie noch nicht mal = 1. Alſo aus obigen, gleich im Anfang des § angeführten Gründen, kann ich die Differenz der Zahlen und der Logarithmen durch eine geometriſche Proportion vergleichen, und ſo eine vierte Zahl finden.

4) Ich ſchließe daher, wie ſich verhält die Differenz 1 zu einem Decimalbruche, der an eine Zahl hängt, ſo verhält ſich die gefundene logarithmiſche Differenz zu der zu findenden, die noch zu dem Decimalbruch gehöret. Hier ſchlöſſe ich alſo 1 : 0,352 = 0,0000485 : x, und x wäre =

$$\frac{0,352 \cdot 0,0000485}{1} = 0,0000170720.$$

5) Dieſes addirt man zu dem Logarithmen der Zahl, die man abgeſchnitten hatte, und zwar nur die erſten Zahlen der gefundenen Differenz, nemlich gleiche Decimalbrüche zu gleichen, hier die 170. So hat man den Logarithmen von der geſuchten Zahl nebſt dem Decimalbruch. Alſo hier:

L. 8946 = 3,9516289
dazu addirt 170

giebt den L. 8946,352 = 3,9516459

6) Weil man aber nicht den Logarithmen dieſer Zahl mit einem Decimalbruch, ſondern die ganze Zahl ohne Decimalbruch haben will, ſo addirt man Charakteriſtik des gefundenen Logarithmen noch ſo viel Einheiten, oder 1, als man Decimalbrüche gemacht hatte. So hat man nun den Logarithmen der gegebenen ganzen Zahl. Hier alſo müßte man

zu

zu dem gefundenen Logarithmen noch 3 addiren, weil man 3 Decimalbrüche gemacht hatte, und es wäre alſo L. 8946352 = 6,9516459. Es läßt ſich dieſes leztere auch leicht begreifen, denn 8946,352 . 1000 = 8946352, und daher L. 8946,352 + L. 1000 = L. 8946352, aber L. 1000 = 3,0000000, alſo muſte man das zur Charakteriſtik des vorigen noch addiren, ſo bekömmt man den Logarithmen in den erſten 7 Decimalſtellen richtig.

§. 360. Hievon wollen wir noch ein Exempel geben. Man ſuche den Logarithmen von 196668. Alſo nach der erſten Regel: 1966, 68.

Nach der zweyten Regel L. 1967 = 3,2938044
L. 1966 = 3,2935835
2209,
oder vielmehr 0,0002209

Nach der 4ten Regel; 1 : 0,68 = 0,0002209 : x und x = 0,68 . 0,0002209 = 0,000150212.

nach der 5ten Regel L. 1966 = 3,2935835
addirt 1502
alſo L. 1966,68 = 3,2937337

Nach der 6ten Regel alſo: L. 196668 = 5,2937337, welches er auch in den erſten 7 Decimalſtellen genau iſt.

Anmerkung. Dieſe Zahl läßt ſich in Faktores zertheilen, und wenn man dieſes thut, und

ihre

ihre Logarithmen addirt, wie wir gelehret haben, wird man eben dieſen Logarithmen finden. Wir haben ſie daher mit Willen gewählet, um dieſes zu zeigen.

§. 361. Es ergiebt ſich aus dieſer Methode von ſelbſt, daß man daher auch die Logarithmen für große und kleine Zahlen, daran ſehr viele Decimalbrüche hängen, bis auf 7 Decimalſtellen finden könne, wenn man nur allezeit im Anfang betrachtet, als ob ſie vier ganze Zahlen hätten, ſie haben nun mehr oder weniger, und darnach ſeine Rechnung einrichtet. Am Ende der Rechnung, wenn man die gegebene Zahl nochmal betrachtet, ſiehet man gleich, ob man Einheiten zur Charakteriſtik addiren oder davon ſubtrahiren muß. Z. E. L. 473,8425, erſt betrachtet, als 4738,425,

nun iſt L. 4739 = 3,6756867
L. 4738 = 3,6755951

L. Differenz = 916

Alſo 1 : 0,425 = 0,000016 : x, und daher x = 0,0000916.0,425 = 0,0000389300.

Alſo L. 4738 = 3,6755951
addirt zu 389

3,6756340 = dem L. von 4738,425, weil aber der L. von 473,8425 geſucht wird, muß 1 von der Charakteriſtik abgezogen werden, alſo L. 473,8425 = 2,6756340.

§. 362. Wir kommen zu der zweyten Aufgabe. Es iſt der Logarithme gegeben, man ſoll die

Zahl

Zahl dazu finden. Man ſiehet gleich, daß, wenn dieſe Aufgabe aufgelöſet iſt, man die Zahlen finden wird, der **Logarithme** mag ſo beſchaffen ſeyn, daß er zwar von einer **höhern** Charakteriſtik iſt, als die in den gemeinen Tafeln, aber eben die angehängten Decimalbrüche hat, oder er mag auch eine höhere Charakteriſtik und **verſchiedene** Decimalbrüche haben. Hätte er nur eine höhere Charakteriſtik, und wären übrigens ſeine Decimalbrüche mit einem von denen in den Tafeln einerley, ſo hat man nur nöthig, die für dieſe in den Tafeln gefundene Zahl mit ſolch einer großen Potenz der 10 zu multipliciren, oder zu dividiren, als die Charakteriſtik meines Logarithmen mehr oder weniger Einheiten hat, als die ich in den Tafeln bey eben den Decimalbrüchen fand. Z. E. es ſey gegeben der Logarithme 5,7550359. Die Decimalbrüche dieſes Logarithmen finden ſich genau bey der Zahl 5689. Aber da iſt die Charakteriſtik = 3, aber hier = 5, alſo um zwey Einheiten größer, man multipliciret alſo nur 5689 mit 10^2 oder mit 100, und 568900 wird die Zahl für den gegebenen Logarithmen ſeyn. Eben ſo der Logarithmen 1,5933968. Die Decimalbrüche hievon finden ſich genau bey 3921, weil aber da die Charakteriſtik 3 iſt, und hier nur 1, ſo wird die Zahl, weil die Differenz der beyden Charakteriſtiken = 2 war, durch 10^2 dividiret, ſie iſt alſo $\frac{3621}{100}$ = 39, 21. Wenn aber die Decimalbrüche mit denen in den Tafeln nicht überein kommen, ſo verfähret man folgendermaßen:

1) Man ſuchet nemlich unter der Charakteriſtik 3 ein Paar Logarithmen, zwiſchen welchen die Decimalbrüche des gegebenen Logarithmen fallen, welches man leicht finden wird, weil von den erſten Zahlen deſſelben immer einige damit überein kommen.

2) Man ſuchet nun zwiſchen dem nächſt größern und nächſt kleinern Logarithmen die logarithmiſche Differenz, und die Differenz zwiſchen den dazu gehörigen Zahlen iſt doch = 1. Man achtet dabey auf die Charakteriſtik nicht.

3) Nun ſubtrahire man von dem gegebenen Logarithmen auch den nächſt kleinern, und hat alſo abermals die Differenz, da man auf beyder Charakteriſtik auch nicht achtet.

4) Nun ſchließet man: wie ſich verhält die Differenz der beyden Logarithmen, wozwiſchen der gegebene fällt, zu der Differenz des gegebenen und des nächſt niedrigen, ſo verhält ſich 1 zu der findenden Zahl.

5) Dieſe gefundene Zahl addirt man, als einen Decimalbruch, an die Zahl, welche zu ihrem Logarithmen den nächſt kleinern Logarithmen hatte.

6) Nun betrachtet man erſt die Charakteriſtik des gegebenen Logarithmen, iſt die gleich mit der Charakteriſtik 3, worunter man die Vergleichungslogarithmen geſucht hatte, ſo bleibt dieſer nach vorgehender Regel angehängte Decimalbruch in ſeiner völligen Geſtalt: iſt ſie größer, ſo wird die Zahl mit ſolcher Potenz der 10 multipliciret, als die Charakteriſtik des gegebenen Logarithmen

mehr

mehr Einheiten hat; iſt ſie kleiner, ſo wird ſie mit ſolcher Potenz der 10 dividiret, als ſie weniger Einheiten hat. Man bekömmt auf ſolche Art die Zahl für 6 bis 7 Ziffern richtig, aber bey dem Gebrauch der Logarithmen der gemeinen Tafeln für mehrere nicht, welches aus den vorigen Paragraphen und der ganzen Behandlung erhellet.

§. 363. Exempel. Es iſt gegeben der Logarithme 5,4325798. Man ſucht die Zahl nach der erſten Regel, zwiſchen deren Logarithmen dieſer gegebene fällt, ohne auf die Charakteriſtik zu achten.

	L. 2708 =	3,4326487
	L. 2707 =	3,4324882
Differenz beyder Zahlen = 1.	L. Differenz =	1605

Nach der 3ten Regel, gegebener L. =	5,4325798
nächſt kleinerer =	3,4324882
logarithmiſche Differenz =	916

Nach der 4ten Regel 1605 : 916 = 1 : x, und $x = \frac{916}{1605} = 0,5707$.

Nach der 5ten Regel an die 2707 als Decimalbruch gehänget, giebt 2707, 5707.

Nach der 6ten Regel wird dieſes mit $10^2 = 100$ multipliciret werden müſſen, weil wir hier die Charakteriſtik 5 hatten, die um 2 größer iſt als 3, für welche wir die Zahl jetzt gefunden hatten, giebt 270757,07, welches die Zahl für den gegebenen Logarithmen iſt. Es ſey der Logarithme gegeben

1,3456789, nun fallen ſeine Decimalbrüche zwiſchen folgende Logarithmen:

Der Logarithme von	2217 =	3,3457657
Logarithme	2216 =	3,3455698
	Differenz	1959
gegebener Logarithme		1,3456789
nächſt niedriger in den Tafeln		3,3455698
ohne auf die Charakteriſtik zu achten	Differenz	1091

geſchloſſen 1959 : 1091 = 1 : x, alſo $x = \frac{1091}{1959}$ = 0,556.

Alſo die Zahl für den gegebenen Logarithmen, wenn die Charakteriſtik = 3 wäre, wäre 2216,556, da ſie aber nur = 1, ſo iſt die Zahl $= \frac{2216,556}{100}$ = 22,16556. Wäre die Charakteriſtik des gegebenen Logarithmen = 0, ſo wäre die Zahl alſo 2,216556, wäre ſie aber = − 1, ſo wäre ſie $\frac{1}{22,16556}$ §. 353. folgl. wäre ſie aber + 6, ſo wäre die Zahl = 2216556.

Man wird, wenn man ſich fleißig übet, dieſes alles leicht verſtehen und nachmachen können, alſo die Zahlen für gegebenen Logarithmen, welches am meiſten vorkömmt, bald finden lernen.

§. 364. Wir haben das nöthigſte von der Erfindung und Vorſtellung und Rechnung der Logarithmen mit Zahlen geſagt, wir wollen noch ſehen, wie man ſie in Buchſtabenrechnungen, und alſo ganz allgemein behandelt, woraus die logarithmiſchen Rechnungen folgen. Man drückt gewöhnlich bey logarithmiſchen Rechnungen das Wort

Loga-

Logarithme durch den Buchſtaben l aus, welchen man vor die Größen ſetzet. Z. E. der L. von a = la, der L. von x = lx u. ſ. w. Da die Logarithmen Exponenten der Potenzen ſind, ſo werden ſie auch alle in Buchſtabenrechnungen ſo behandelt, und daher gleichfalls die Multiplikation in eine Addition, die Diviſion in Subtraktion, die Ausziehung der Wurzeln in Diviſion, und die Erhebung zu Potenzen in Multiplikation verwandelt. Wenn man daher ein Produkt aus verſchiedenen Größen zuſammen geſucht hat, ſo kann das durch die Addition der Logarithmen ausgedrückt, und nachher, wenn man ſie in Zahlen beſtimmet, gefunden werden. Z. E. das Produkt abc logarithmiſch ausgedrückt, wäre $la + lb + lc$, eben ſo $3cd$ wäre logarithmiſch $= l3 + lc + ld$. Auch bey zuſammengeſetzten Größen $(nm + a - x)$ könnte ausgedrückt werden $l(nm + a - x)$, aber ja nicht $ln + lm + la - lx$. Denn das hieße, als ob alle dieſe Größen mit einander multipliciret wären, der Ausdruck $nm + a - x$, heißt aber, wie man weiß, daß n mit m multipliciret, dazu a addiret, und x davon abgezogen werden ſoll. Und wenn dieſes geſchehen iſt, läßt ſich der Logarithme dafür angeben. Die Diviſion der Logarithmen geſchiehet auf eben die Art als in Zahlen, nemlich durch die Subtraktion, und auch aus eben dem Grunde. Der L. von $\frac{a}{b} = la - lb$, und der Ausdruck $\frac{am}{r}$ logarithmiſch vorgeſtellet, iſt $la + lm - lr$. Der Ausdruck $\frac{cd}{nr}$ wäre $(lc + ld) - (ln + lr)$, das

iſt die beyden letzten Logarithmen addirt, werden von der Summe der erſten beyden, die auch addirt ſind, abgezogen, und der Ausdruck $\frac{bf - mr}{2n}$ würde logarithmiſch ausgedrückt heißen, $l(bf - mr) - (l2 + ln)$.

§. 365. Da die Erhebung zu Potenzen durch die Multiplikation des Exponenten einer Größe geſchiehet, ſo müſſen auch die Logarithmen alſo vorgeſtellet werden. Alſo a^2 logarithmiſch vorgeſtellet, wäre $2la$, das heißt, den L. von a mit 2 multipliciret, und denn für dieſen Logarithmen die Zahl aufgeſucht, gäbe a^2 zur Zahl, wenn man a vorher als Zahl beſtimmt hat. x^3 heißt logarithmiſch vorgeſtellet, $3 . lx$ und x^n heiſt $n . lx$. Hieraus wird man auch leicht ſchwerere Ausdrücke beſtimmen lernen. Z. E. a^{n-2}, heißt logarithmiſch $n . la - 2 . la$, denn es zeigt ja ſchon die Potenz an, daß man ſo handeln ſoll, und Logarithmen ſind ja Potenzen, und ferner leuchtet es auch daraus hervor, weil $a^{n-2} = a^n : a^2 = \frac{a^n}{a^2}$, alſo auch $n . la - 2 . la$. Es werden uns, wenn wir dieſes wohl betrachten, nun viele Ausdrücke ſehr leicht fallen. Wir wollen noch einige zur Uebung hinſetzen. Z. E. $a^{n-m}x\,y$ iſt logarithmiſch ausgedrückt $n . la - m . la + lx + ly$; der Ausdruck $a^n x^{3-n} m$ wäre $n . la + 3 . lx - n . lx + lm$, und folgender $a^n m^{-3}$ wäre $n . la - 3 . lm$, denn $a^n m^{-3} = \frac{a^n}{m^3}$ §. 143

Wenn

Wenn die Potenzen der Größen Brüche ſind, oder alſo Wurzeln dadurch mit vorgeſtellet werden, verfähret man eben ſo, als wir gezeiget haben. Man ſetzet den Bruchexponenten gleichfalls vor das l, welches den Logarithmen anzeiget. Z. E. $x^{\frac{3}{4}}$ wäre logarithmiſch ausgedrücket, $\frac{3}{4}$. lx oder $\frac{3lx}{4}$, welches hieße, der Logarithme von x ſoll mit 3 multipliciret, dieſes durch 4 dividiret werden, und von dem Logarithmen, welchen man alsdenn erhält, ſoll man die Zahl ſuchen. Es verſteht ſich, daß man x zu einer Zahl beſtimmt hätte. Z. E. es ſoll $x = 36$ ſeyn. $x^{\frac{3}{4}} = 36^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{36^3}$, und logarithmiſch $= \frac{3}{4}$ L. 36.

$$\text{Alſo: } \frac{3l.36}{4} = L.\,36 = 1{,}5563025$$

$$\text{multiplicirt } \underline{\quad 3}$$

$$= 4{,}6689075$$

$$\text{nun dividirt durch } 4 = 1{,}1672268$$

Dieſen Logarithmen aufgeſchlagen, findet man faſt die Zahl 14,7, alſo $36^{\frac{3}{4}}$, oder $\sqrt[4]{36^3}$ iſt $= 14{,}7$. Man ſiehet hieraus ſchon den großen Nutzen der logarithmiſchen Rechnungen. Es iſt auch dieſes auf folgende Art leicht begreiflich $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$, alſo erſtlich x zur cubiſchen Potenz erhoben, das geſchiehet aber logarithmiſch, wenn ich den Logarithmen von x mit 3 multiplicire, wie wir ſchon

oft gehabt haben, ich erhalte dadurch einen Logarithmen, deſſen Zahl x^3 iſt. Soll aus dieſer Größe der $\sqrt[4]{}$ ausgezogen werden, ſo iſt uns ſchon bekannt, daß ich nur den Logarithmen derſelben durch 4 zu dividiren habe, der Logarithme von dem $\sqrt[4]{}$ aus x^3 iſt, alſo $x^{\frac{3}{4}}$ logarithmiſch ausgedrücket wäre $\frac{3}{4}\, lx$. Eben ſo der Ausdruck $\frac{x^n}{m} = \frac{nlx}{m}$ oder $\frac{n}{m}\, lx$ und $(nm + rx) . \frac{3}{4} = l\,(nm + rx) + l\,\frac{3}{4}$ aber $(nm + rx)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\, l\,(nm + rx) = 3l\,(nm + rx)$ und dieſen Logarithmen durch 4 dividiret giebt den geſuchten Logarithmen.

Wir wollen alles dieſes durch ein Exempel erläutern, welches wir aus den geometriſchen Progreſſionen hernehmen, und daran den Gebrauch logarithmiſcher Ausdrücke etwas zeigen wollen. Es ſey in einer geometriſchen Progreſſion gegeben, das erſte Glied und das letzte Glied, wie auch der Exponens der Reihe, man ſoll hieraus die Zahl der Glieder finden.

Es ſey nun das erſte Glied $= a$
das letzte $= b$
Der Exponens der Reihe $= m$
und die Anzahl der Glieder $= x$

welches geſucht wird. Nun läßt ſich für den Ausdruck des letzten Gliedes $= b$, auch dieſer ſetzen $b = am^{x-1}$, wie §. 288 zeiget.

Alſo

Alſo $b = am^{x-1}$ logarithmiſch ausgedrückt.
$$lb = la + xlm - lm$$

$$lb + lm = la + xlm$$ Gleiches zu Gleichem addirt, bleibt Gleiches, alſo zu beyden $+ lm$ addirt.

$$lb + lm - la = xlm$$ noch von beyden la abgezogen.

$$\frac{lb + lm - la}{lm} = \frac{xlm}{lm}$$ Gleiches durch Gleiches dividirt, bleibt Gleiches, beyde durch lm dividirt.

$$\frac{lb + lm - la}{lm} = x$$ oder

$$\frac{(lb - la)}{lm} + \frac{lm}{lm} = x$$ und bequemer ausgedrückt.

$$\frac{(lb - la)}{lm} + 1 = x$$ noch bequemer ausgedrückt.

Da wäre alſo x oder die Zahl der Glieder, welche wir ſuchten, in Logarithmen ausgedrückt. Geſetzt nun, die Reihe wäre alſo: das erſte Glied 2, alſo $a = 2$, das letzte 1458, alſo $b = 1458$, der Exponens ſey $= 3$, alſo $m = 3$, und die Zahl der Glieder oder x würde geſucht, ſo wäre nach dieſer Formel $x = \frac{(lb - la)}{lm} + 1$, nun, da die

Zeichen beſtimmt ſind, $x = \frac{(l\ 1458 - l2)}{l3} + 1$

Nun iſt l 1458 = 3,1637575
ſubtrahiret l 2 = 0,3010300
2,8627275

Dieſen dividiret durch den L. 3

Aber l3 = 0,4771212.

Alſo $\frac{2,8627275}{0,4771212}$ weil beyde gleichviel Decimalbrüche haben.

$= \frac{28627275}{4771212} =$ ~~28627275~~ | 6
(4771212) |
~~28627272~~ |

welches der Quotient iſt, nur bleibt hinten ein ganz kleiner Reſt ſtehen, welches daher gekommen, weil noch die Logarithmen faſt alle Irrationalgrößen ſind. Hiezu muß noch 1 addirt werden. Alſo 6 + 1 = x, oder der Zahl der Glieder, alſo 7 Glieder, und wenn man die Reihe macht, wird man das auch wirklich finden. Sie iſt: 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458.

Das

Das achtzehnte Kapitel.

Von der Combination.

§. 366. Die Lehre, wie man es anzufangen hat, es zu finden, wenn man eine gewiſſe gegebene Anzahl von Dingen unter einander, ſo vielmal es ſich thun läßt, in ihrer Ordnung verſetzen, oder ſie je zu zwey und zwey, zu drey und drey, zu vier und viere ꝛc. nehmen ſoll, oder überhaupt, wie man Verbindungen und Veränderungen von gegebenen Dingen nach verlangten Geſetzen machen ſoll, und wie vielmal ſich dieſes bey einer gegebenen Anzahl von Dingen thun läßt, heißt die Lehre von der **Combination**. Man kann ſich gleich vorſtellen, daß dieſe Lehre ungemein weitläuftig ſeyn muß, und ſich auf viel tauſend Fälle appliciren läßt, man wird es alſo ſehr billigen müſſen, wenn ich nach der Abſicht dieſer Schrift nur einige Fälle davon berühre.

§. 367. Wir wollen von den leichteſten anfangen, und reden erſt von der bloßen Verſetzung einzelner gegebener Dinge. Wenn man zwey gegebene Dinge hat, die wir allgemein a und b nennen wollen, und worunter man Zahlen, Namen, Perſonen, Wörter ꝛc. was man will, verſtehen

kann, ſo laſſen ſich dieſe nur zweymal verſetzen, oder beſtimmter zu reden, ſie haben nur zwey Lagen, in Anſehung ihrer Ordnung. Denn entweder ich ſetze ſie ab. Ich finde alſo gleich, daß
oder ba
die möglichen Verſetzungen von zwey Dingen auch alſo können ausgedruckt werden: 1 . 2 = 2, oder daß es durch die Multiplikation der erſten beyden Zahlzeichen mit einander herausbringe. Wir wollen das dritte c dazu nehmen. Dieſes c kann vorne an ab, in der Mitte zwiſchen beyden, und hinten an ab zu ſtehen kommen. Und auf eben die Art auch bey ba. Das giebt alſo dreymal mehr Veränderungen, als bey den vorigen war. Wenn ich alſo die Zahl der vorigen Veränderungen mit drey multiplicire, ſo weiß ich, wie vielmal ſich drey verſetzen laſſen, alſo 1 . 2 . 3 = 6mal, welches wieder durch die Multiplikation der erſten drey Zahlzeichen herauskommt. Die Verſetzungen ſelbſt würden ſeyn:

cab cba
acb bca
abc bac

und mehr ſind nicht möglich. Nehme ich den vierten Buchſtaben d dazu, ſo ſiehet man leicht, daß ſich der bey jeder dieſer Ordnungen, vorne, am Ende, und hinter das erſte und hinter das zweyte Ding ſetzen laſſe, alſo bey jeder Ordnung vier Veränderungen mache, und daß, wenn ich alſo die Zahl der vorigen Veränderungen mit 4 multiplicire, ich alsdenn weiß, wie vielmal ſich 4 Dinge unter einander verſetzen laſſen. Die

Zahl,

Zahl, wie ſich drey Dinge unter einander verſetzen ließen, kam heraus, durch 1.2.3. Alſo von 4 Dingen, durch 1.2.3.4 = 24. Nehme man 5 Dinge, ſo ſiehet man hieraus leicht ein, daß ſie ſich 1.2.3.4. 5mal = 120mal unter einander verſetzen ließen, und überhaupt, daß ich dieſes allezeit finden kann, wenn ich ſo viel auf einander folgende Zahlzeichen von 1 an mit einander multiplicire, als Dinge ſind, deren mögliche Verſetzungen ich wiſſen will. So wären z. E. von 6 Dingen alle mögliche Verſetzungen 1.2.3.4.5.6 = 720. Wenn man alſo die Zahl der gegebenen Dinge n nennet, ſo kann die Anzahl der möglichen Veränderungen durch die allgemeine Formel vorgeſtellet werden. n.n − 1.n − 2.n − 3.n − 4.n − 5, u. ſ. w. ſo lange bis das letzte Glied = 1 wird, welches endlich geſchehen muß, wenn n eine würkliche Zahl iſt. Denn es iſt gleichviel, ob man die Faktores, die man mit einander zu multipliciren hat, von vorne oder von rückwärts multiplicire, um die Zahl der Verſetzungen heraus zu bringen. Hier bey der Formel fängt man von der letzten Zahl an, und höret bey 1 auf. Ein Paar Exempel ſollen es erläutern. Man frägt, wie oft ſich die Wörter in dem Verſe: una ſalus victis nullam ſperare ſalutem verſetzen laſſen. Sie laſſen ſich, weil es 6 Wörter ſind, 1.2.3.4.5.6 = 720mal verſetzen. Man ſoll 10 Perſonen die an einer Tafel ſitzen ſollen, ſo oft zu Gaſte bitten, ſo oft als ſich die Ordnung unter ihnen ändern läßt, das macht alſo 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10mal = 3628800 mal.

mal. Wenn einer die Geſellſchaft Mittags und Abends zu Gaſte hätte, ſo würde er doch erſt faſt in 4971 Jahren damit zu Ende kommen.

§. 368. Es ſind aber hiebey noch verſchiedene Fälle möglich. Z. E. es wäre unter den gegebenen Dingen eins oder einige, die doppelt, dreyfach, oder mehrmal vorkämen, ſo wäre das Geſetz gleich verändert. Kommt **eine und eben dieſelbe Sache** unter einer Anzahl gegebener Dinge zweymal vor, ſo giebt es nur halb ſo viel Verbindungen, wenn man nicht darauf ſiehet, wenn dieſe beyden einerley Dinge zuſammen kommen, welches voran, und welches hinterher ſtehet, denn ſonſt betrachtete man ſie als würklich verſchiedene Dinge. Eben dieſe Betrachtungen zeigen es. Man hätte erſtlich a alleine, kömmt das doppelt vor, ſo iſt es aa, alſo nur eine Veränderung, alſo nur halb ſoviel als von zwey verſchiedenen Dingen, davon zwey auch zwey Veränderungen geben. Nimmt man das dritte c dazu, ſo hat man aac caa und aca, alſo drey, da man von drey verſchiedenen Dingen 6 Veränderungen hätte. Deswegen bleibt zwar die obige Regel des vorigen §. nur muß auf dieſen Fall die gegebene Anzahl Dinge, wenn eins doppelt darin vorkommt, durch 2 dividiret werden, und die allgemeine Formel dafür würde ſeyn, wenn n die Anzahl der Dinge wäre, $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{1.2}$; ſo lange die oberſte Reihe fortgeſetzet, bis das letzte Glied in den oberſten Faktoren = 1 iſt. Wären zwey Dinge

ge, die einerley wären, unter der gegebenen Anzahl ſo wäre die Formel $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}$ u. ſ. w.

Bey dreyen alſo:

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \text{ u. ſ. w.}$$

welches man leicht auf mehrere fortſetzen kann.

Käme eine Sache dreymal in einer gegebenen Anzahl Dinge vor, die man, wie im Anfang des § geſagt iſt, als völlig einerley betrachtete, ſo wäre der Diviſor $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Denn es müſſen alsdenn nothwendig ſechsmal weniger Verſetzungen ſeyn, als bey einer gleichmäßigen Anzahl verſchiedener Dinge, weil die ſechsmaligen Veränderungen von drey Dingen, die nun als eins betrachtet werden, wegfallen. Denn es käme z. E. a dreymal vor, ſo wäre doch aaa nur eine Veränderung, da ſich ſonſt 6 daraus machen ließen, und damit alle die andern übrigen gemacht werden könnten, alſo die allgemeine Formel iſt.

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Käme eine Sache viermal vor, ſo iſt aus eben den Gründen die allgemeine Formel

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ u. ſ. w.}$$

Wäre der Fall, daß z. E. eine Sache in einer gegebenen Anzahl Dinge dreymal, eine andere

zwey-

zweymal vorkäme, ſo läßt ſich das auch leicht aus dieſen Betrachtungen beſtimmen. Nemlich der Diviſor würde aus 1.2.3.1.2 beſtehen müſſen, weil einmal ſechs Verſetzungen für eine, einmal zwey Verſetzungen für eine gerechnet werden müſten. Z. E. man hat folgende Größen aaabbc, wie vielmal laſſen ſich die verſetzen? Es ſind überhaupt ſechs Dinge, aber weil a dreymal und b zweym. vorkömmt, iſt der Diviſor noch

$$\text{alſo } \frac{1.2.3.4.5.6.}{1.2.3.1.2.} = \frac{4.5.6}{2} = 60.$$

Eben ſo, wie vielmal laſſen ſich folgende Dinge verſetzen aaaa bbb cc, es ſind neun Dinge, alſo und der Diviſor

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.1.2.3.1.2} = 1260 \text{ mal.}$$

Denn die Verſetzungen, die einmal aus vier entſprangen, werden für eine, weil a viermal da iſt, die aus drey entſprangen, auch für eine, weil b dreymal da iſt, und die aus c entſtanden, auch für eine, weil c zweymal da iſt, gerechnet. Man kann dieſes, wie man ſieht, leicht auf mehr Fälle appliciren. Es verſteht ſich, daß hier von ſolchen Veränderungen, worin allezeit alle die Dinge ſich befinden, die Rede iſt.

Ein Exempel: unter der Geſellſchaft von 10 Perſonen §. 367 ſollen 5 Damen ſeyn. Es ſoll in Anſehung der Veränderungen ſo eingerichtet werden, daß jede Dame wieder bey ihrem Chapeau kömmt, ſo wird die Berechnung folgende ſeyn, weil jede Dame und jeder Chapeau nur für 1 Ding beyde zuſammen gerechnet werden. Es gäbe alſo nur

nur eine Verbindung von 5 Dingen. Alſo 1.2.3.4.5 = 120mal könnten doch ihre Plätze verändert werden. Und alſo 120 Traitemens, da giengen, wenn man Mittags und Abends nähme, 60 Tage auf hin.

§. 369. Es wird jedem leicht einfallen, daß es noch unendlich vielerley Arten von Combinationen giebt, wofür man Regeln erfinden kann. Wir wollen noch einige betrachten. Wenn eine Menge Dinge gegeben ſind, woraus man ſo viel verſchiedene **Paare**, ſo viel verſchiedene **Dreyen**, ſo viel **Vieren** u. ſ. w., nehmen ſoll, als S, ſo heißt dieſes **Combinationen**, **Conternationen**, **Conquaternationen** u. ſ. w. Wir wollen jetzt das Geſetz für Paare ſuchen. Es ſollen 5 Dinge gegeben ſeyn, die man paarweiſe verbinden ſoll, wo aber keine Rückſicht genommen wird, welches Ding bey jedem Paare zuerſt oder zuletzt ſteht, ſo findet man nach beyſtehender Tabelle die Paare. In der erſten Reihe ſtehet die Anzahl der Dinge, in der zweyten die Dinge ſelbſt, in der dritten die Paare davon.

Anzahl der Dinge	Die Dinge ſelbſt	Die Paare
1	a	o
2	b	ab
3	c	ac, bc
4	d	ad, bd, cd
5	e	ae, be, ce, de.

Man ſieht gleich, daß ſich aus einem Dinge kein Paar nehmen läßt, folglich ſteht da o. Aus

zwey

zwey Dingen läßt ſich ein Paar nehmen, nemlich ab, da man auf die Stelle der Dinge nicht Achtung hat, und ab oder ba als einerley anſiehet, weil man nur auf Paare ſeine Rückſicht nimmt. Nimmt man das dritte Ding, hier c dazu, ſo giebt das mit jedem der vorigen, mit a und b, ein neues Paar, alſo zwey Paare, und das erſte Paar auch dazu ſind drey Paare, alſo drey Dinge geben drey Paare. Kommt das vierte Ding hinzu, hier d, ſo giebt es erſtlich mit jedem der vorigen drey Dinge ein neues Paar, alſo drey Paare, und die vorigen drey Paare auch dazu, das ſind alſo ſechs Paare. Das fünfte giebt mit jedem der vorigen vier Dinge vier neue Paare, und die vorigen ſechs dazu ſind zehn Paare. Nun läßt ſich das Geſetz leicht beſtimmen, nemlich alle dieſe Paare ſind die Summe der Glieder einer arithmetiſchen Reihe, die ſich mit eins weniger, als die gegebene Anzahl der Dinge iſt, anfängt, und die immer eins fällt, oder deren Differenz eins iſt, und die mit 1 aufhöret, als z. E. bey dieſen fünf Dingen wäre die Anzahl der Paare die Summe von $4 + 3 + 2 + 1 = 10$; von ſechs Dingen wäre ſie die Summe $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Oder man kann ſie auch als die Summe einer arithmetiſchen Reihe betrachten, deren erſtes Glied $= 1$, die Differenz auch $= 1$, und deren letztes Glied um eins weniger iſt, als die Anzahl der gegebenen Dinge. Wir haben §. 265. geſehen, daß die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion $= an + \frac{(n^2 - n)d}{2}$, wo n die Zahl der

Glie-

Glieder bedeutet, a das erſte Glied, und d die Differenz. Da nun hier a = 1 und d auch = 1, ſo bliebe noch in der Fromel $n + \frac{(n^2 - n)}{2}$, allein man muß hier auch betrachten, das immer um eins weniger Glieder ſind, als die Zahl der gegebenen Dinge, denn z. E. bey fünf Dingen waren vier Glieder in der arithmetiſchen Reihe, wodurch man ihre Summe fand, bey ſechs Dingen fünf Glieder, alſo bey n Dingen n − 1 Glieder. Wäre alſo die Anzahl der gegebenen Dinge, dieſman Paarweiſe combiniren ſollte, = n, ſo wären der Glieder in der arithmetiſchen Reihe, deren Summe die Anzahl der Combinationen anzeigte, n − 1, und folglich müſte man hier ſtatt n die n − 1 ſetzen, alſo würde aus der Formel $n + \frac{n^2 - n}{2}$ folgende werden: $n - 1 + \frac{(n - 1)^2 - (n - 1)}{2}$ und das würklich aus einander geſetzet wäre $n - 1 + \frac{n^2 - 2n + 1 - n + 1}{2}$, und wenn man n − 1 auch mit unter dieſen Bruch brächte, ſo wäre es $= \frac{2n - 2 + n^2 - 2n + 1 - n + 1}{2}$, und nun addiret was ſich addiren läßt $= \frac{n^2 - 3n + 2n + 2 - 2}{2}$ $= \frac{n^2 - n}{2}$, aber $\frac{n^2 - n}{2}$ iſt auch $= \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$

und das iſt nun die allgemeine Formel für alle Verbindungen Paarweiſe, wenn die Zahl der Dinge gegeben iſt, und die Zahl n, oder wenn n beſtimmt iſt.

Exempel. Wie vielmal laſſen ſich neun Dinge Paarweiſe mit einander verbinden? Hier iſt $n=9$, alſo $\frac{9(9-1)}{2}$ oder $\frac{9.8}{2}$ mal $= 36$, ſo viel Paare ſtecken darin. Dieſes iſt die Regel, wie man in dem bekannten Lottoſpiel die Amben ſucht, denn Amben oder Paarweiſe Verbindungen iſt einerley. Man hat 12 Nummern, wie viel ſind darin Amben? Folgende $\frac{12.11}{2} = 66$ in allen 90 Nummern ſind $\frac{90.89}{2}$ Amben $= 4005$ Amben, davon werden 5 Nummern gezogen, darin ſind alſo $\frac{4.5}{2} = 10$ Amben. Wenn man alſo eine Ambe beſitzet hat, ſo hat man 10 Wahrſcheinlichkeiten, daß ſie gezogen wird, und 3995 Unwahrſcheinlichkeiten, daß ſie nicht gezogen wird. Das Verhältniß der Wahrſcheinlichkeiten und Unwahrſcheinlichkeiten iſt alſo wie $10 : 3995$ oder $1 : 399,5$, alſo $399\frac{1}{2}$ Unwahrſcheinlichkeiten gegen eine Wahrſcheinlichkeit.

§. 370. Wenn man gegebene Dinge zu drey und drey verbinden ſoll, ohne auf die Ordnung zu ſehen, die je drey und drey unter ſich haben, und n iſt die gegebene Anzahl der Dinge, ſo iſt die allgemeine Formel dafür $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}$, und bey Verbindung je 4 und 4 iſt ſie $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}$

Wir

Wir führen nur die Formel an, ohne ſie zu beweiſen, weil wir, wenn wir ſie nicht durch eine Induktion beweiſen wollten, die Lehre von den figurirten Zahlen vorausſetzen müſten, von welchen wir nichts geſagt haben, und auch gar wenig ſagen wollen, um unſere Anfänger nicht zu ſehr zu überhäufen.

Wenn man erſtlich eine Uebung in der allgemeinen Rechnungskunſt hat, ſo kann man ſich weiter in Hrn. Hofrath Käſtners Analyſis endlicher Größen, welches die erſte Abtheilung ſeines dritten Theils der mathematiſchen Anfangsgründe iſt, Raths erholen pag. 383 bis 409, da man völlige Ueberzeugnug und Genugthuung erhalten wird. Will man eine ganz allgemeine Formel haben, wenn man aus n gegebenen Dingen p Verbindungen machen ſoll, ſo iſt die Formel davon

$$\frac{n.n-1.n-2\ldots.(n-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots p}$$

das iſt: es werden oben im Zähler ſo viel Faktores, als Verbindungen gegeben ſind, und im Nenner von 1 an auch ſo viel Faktores, als Verbindungen gegeben ſind. Nun von allen ein Exempel. Man will wiſſen, wie viel Ternen in 20 Zahlen ſtecken, das iſt 20 Zahlen zu drey und drey genommen. Die n gegebenen Dinge waren 20 oder n, alſo = 20. Sie ſollen zu p Verbindungen gemacht werden, hier Ternen, oder nach drey und drey, alſo wäre hier p = 3. Man fienge alſo im Zähler von 20 an, multiplicirte das mit der nächſt niedrigern

Zahl, und führe ſo fort, bis man auf die Zahl $(n-p+1)$ käme. Die wäre hier $20-3+1 = 20-2 = 18$. Das wäre nach der Formel

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \overset{3}{\cancel{18}}}{\cancel{6}} = 20 \cdot 19 \cdot 3 = 1140.$$

Wie viel Quaternen ſtecken in 20 Zahlen? Das wäre 20 Zahlen zu viere und viere verbunden. Alſo gilt da die Formel $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ hier $= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845$, ſo viel Quaternen ſind darin befindlich. Man will wiſſen, wie viel Spiele im Lombre a quatre möglich ſind, oder wie vielmal man alſo aus 40 Karten 10 und 10 nehmen könne, ſo daß man nie einerley bekommt. Das würde nun nach der geſetzten Formel, da nun hier $p = 10$ iſt, alſo müſſen berechnet werden, wo der letzte Faktor im Zähler $= n - p + 1$ hier $40 - 10 + 1 = 31$, und der letzte Faktor im Nenner $= 10$ iſt.

$$\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

Dieſes gehörig multipliciret und dividiret, giebt 847660528 Spiele, und da dies auch das Spiel verändert, wer die Karten zuerſt bekömmt, ſo muß dieſe Summe noch mit 4 multipliciret werden, weil vier Spielers ſind.

§. 371. Sehr oft muß man noch vielerley Bemerkungen bey den Combinationen in acht nehmen,

men, wovon ſich eben keine Regeln geben laſſen. Wir wollen einige Beyſpiele darüber anführen. Z. E. wie viel verſchiedene Würfe ſind mit zwey Würfeln möglich? Hier muß man ſchon Rückſicht nehmen, daß auf beyden Würfeln einerley Nummern ſind. Man kann alſo überhaupt nur die Combination für 6 gegebene Zahlen berechnen, alſo $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Dazu aber kommen noch 6 Würfe, wenn die Augen auf beyden Würfeln gleich ſind, alſo überhaupt $15 + 6 = 21$ Würfe. Wollte man wiſſen, wie viel Würfe mit drey Würfeln möglich ſind, ſo hat man wieder die Betrachtung, daß auf jedem Würfel gleiche Augen ſtehen, davon die höchſten 6 ſind, alſo muß man ſie erſt berechnen, als ob nur 6 Dinge, je drey und drey zu verbinden wären gegeben worden. Das macht alſo $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ $= 20$ Verbindungen oder Würfe. Nun giebt es noch 6 Würfe, wenn auf jeden Würfel gleiche Augen kommen, alſo ſchon 26 Würfe. Ferner können auf zwey Würfeln einerley Augen kommen. Das giebt für jede einerley Art Augen auch noch 5 Würfe, als nemlich 1 und 1 und 2; 1 und 1 und 3, u. ſ. w. Alſo für alle 6 noch 30 Würfe; das ſind zuſammen $20 + 6 + 30$ Würfe $= 56$ Würfe. Mehr ſind mit drey Würfeln nicht möglich. Man ſpielet mit 3 Würfeln ein Spiel, welches man **Paſchen** nennet; wenn auf zwey Würfeln gleiche Augen fallen, und die Augen des dritten Würfels, zu der Summe beyder gleichen zugezählet 11 oder über 11 ausmachen, ſo heiſt der Paſch ein guter Paſch; machen ſie unter 11 aus, ſo iſt es ein ſchlechter Paſch. Unter dieſen

56 Würfen ſind nun 36 Paſchwürfe möglich, nemlich a) 6 Würfe, wenn alle 3 Würfel gleiche Augen haben. b) Mit jeder der beyden gleichen Augen, noch 5 Würfe. Z. E. 1 und 1 und 2, 1 und 1 und 3, 1 und 1 und 4, 1 und 1 und 5, 1 und 1 und 6 ꝛc. Da außer den völlig gleichen Augen auf allen 3 Würfeln, noch 5 Verbindungen aller andern Augen für jeden Paſch möglich ſind, und ſechſerley Art Paſche ſeyn können, nemlich 1 und 1, 2 und 2, 3 und 3 ꝛc., ſo giebt es noch 5.6=30 Paſchverbindungen; es ſind alſo 6+30=36 mögliche Paſche. Man wird finden, daß darunter 18 gute, die 11 und über 11 zuſammen an Augenzahl ſind, und 18 ſchlechte, die unter 11 ſind, ſich befinden, denn z. E. alle, wo 2 eins der Paſch, ſind ſchlecht. Denn das höchſte davon 1+1+6 iſt erſt=8 ꝛc. Die Wahrſcheinlichkeit alſo einen Paſch, er ſey gut oder ſchlecht, oder gar keinen zu werfen, iſt, da 56 alle Würfe ausmachen 36:20 oder 9:5. Man hat alſo 9 Wahrſcheinlichkeiten gegen 5 Unwarſcheinlichkeikeiten und kann allezeit auf den Paſch halten. Die Wahrſcheinlichkeit und Unwahrſcheinlichkeit zu einem guten oder ſchlechten Paſch iſt völlig gleich, weil 18 gute und 18 ſchlechte ſind. Man kann viele, vorzüglich Hazardſpiele berechnen, nur muß man die Geſetze und Umſtände davon wiſſen. Man ſiehet, wie man die Combinationslehre auf die Spiele, die Wahrſcheinlichkeiten in denſelben, und viele andere Dinge anwenden kann.

§ 372.

§. 372. Wenn man aber Combinationen, Conternationen, Conquaternationen ſucht, da man zugleich auf die Ordnungen, die die Dinge unter ſich haben, mit Rückſicht nimmt, und auch jedes gegebene Ding zweymal, dreymal ꝛc. mit ſich ſelbſt verbunden werden ſoll, ſo iſt die Regel wieder anders, ob es ſchon auch wol möglich wäre, daß obige Regeln darauf könnten appliciret werden, nur daß man dabey, nachdem die Aufgaben wären, die Reſultate verſchiedentlich multipliciren, dividiren, oder etwas davon abnehmen müſte, worauf wir uns jetzt aber, um keine Verwirrung den Anfängern zu verurſachen, nicht einlaſſen. Wenn man nach jetzt angegebener Art Verbindungen machen will, ſo kann man leicht die Regeln dafür finden. Man hätte zwey Dinge zu **Paaren** zu verbinden, ſo daß man auch auf die Ordnung ſehen wollte, welches wir bey den Combinationen nach Amben nicht thaten, und jede Sache auch mit ſich ſelbſt verbunden werden ſollte. Die Dinge ſollten a und b ſeyn, das gäbe ab ba, alſo vier Verbindungen, mehr nicht. Hätte
aa bb
man drey Dinge, als a, b, c auf eben die Art nach zweyen zu verbinden, das gäbe ab, ac, bc
ba ca cb
aa bb cc
mehr gäbe es nicht. Das vorige, da man zwey Dinge hatte, gab 4 Verbindungen, alſo das Quadrat von 2; bey drey Dingen auf die Art zu paaren, gab 9 Verbindungen, alſo das Quadrat von drey; vier Dinge auf die Art zu paaren,

giebt 16 Verbindungen, alſo das Quadrat von 4. Und weil bey allen gegebenen Dingen auf die Art zu Paaren verbunden, die Anzahl der Verbindungen das Quadrat der gegebenen Dinge iſt, ſo geben alſo allgemein n Dinge auf die Art zu paaren, n^2 Verbindungen.

Exempel: Wie oft laſſen ſich die neun Zahlzeichen auf die Art zu Paaren verbinden, wo man nemlich allerdings auch auf die Ordnung, welches rechter Hand, und welches linker Hand ſtehet, ſiehet, und auch die Zahlen mit ſich ſelbſt verbindet? Antwort: $9 \cdot 9$ oder $9^2 = 81$ mal, und das iſt auch. Rechnet man dazu die 9 einzelnen Zahlzeichen, und noch daß jedes Zahlzeichen von 1 bis 9 einmal mit 0 verbunden wird, als 10, 20 ꝛc. alſo auch noch 9 Verbindungen, alſo überhaupt noch 9 und noch 9 zuſammen = 18 Zahlenwerthe zu 81 hinzu, ſo hat man 99, welches auch, wie bekannt, alle Zahlen zwiſchen 1 und 100 ſind. Wenn man noch drey auf die Art Verbindungen anſtellt, ſo iſt die Zahl der Verbindungen allezeit der Cubus der gegebenen Dinge. Oder wenn n die gegebenen Dinge ſind, ihre Verbindungen nach drey auf die Art n^3 u. ſ. w.

Exempel: wie vielmal laſſen ſich die 9 Zahlzeichen zu drey und drey auf die Art verbinden? Antwort: $9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ mal. Nimmt man dazu, daß, da 9 Zahlzeichen nach zwey ſich 81 mal verbinden ließen, und daß an jede Verbindung doch noch die 0 kommen kann, alſo es

als-

alsdenn auch drey Zahlen werden, ſo hat man noch 81 Verbindungen zu drey. Setzet man dazu, daß auch jedes Zahlzeichen mit zwey angehängten Nullen kann geſetzt werden, da es auch drey Zahlen ſind, die einen Werth haben, ſo giebt das auch noch 9 Verbindungen zu drey. Ferner kann auch die 0 bey dieſen 81 Verbindungen nach zwey noch in der Mitte ſtehen, das ſind auch noch 81 Verbindungen, jede zu drey Zahlen. Man muß alſo 729 + 81 + 81 + 9 addiren, um alle Zahlen zwiſchen 100 und 999, beyde mit eingeſchloſſen zu haben, das ſind 900 Verbindungen zu drey, und ſo viel Zahlen finden ſich auch genau zwiſchen 100 und 999. Will man die möglichen Modos der Syllogismen berechnen, die durch A E I O angedeutet werden, das ſind vier Dinge, die alſo nach drey auf dieſe Art ſich 4^3 verbinden laſſen, oder 64 mal, wovon aber nachher viele Arten der Verbindungen wegen der Regeln wieder wegfallen.

§. 373. Wir haben §. 370. von figurirten Zahlen geſaget. Wir wollen doch zum Beſchluß dieſes Kapitels etwas von ihnen erwähnen, wie auch noch von andern Arten der Zahlen, aber nur erwähnen, weil ihre weitläuftigere Ausführung, da ſie ſo häufig nicht vorkommen, nicht der Abſicht dieſes Buchs gemäß iſt, und man ſich darin in des Herrn von Wolfs Elementen, Herrn Käſtners und Eulers teutſchen Algebra und neuern Schriften weiter Raths erholen kann. Nachfolgende Tabelle ſtellet eine Art derſelben vor. Sie werden wegen ihrer

ver Stellung, worin man ſie ſetzen kann, figurirte Zahlen genennet.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1 u. ſ. w.

In der erſten heruntergehenden Reihe ſind bloße 1, die man ſo weit fortſetzen kann, als man will, in der zweyten Reihe ſind die Summen dieſer einzelnen Glieder, alſo daß allezeit die vorhergehenden Glieder der vorigen Reihe ein Glied der zweyten ausmachen. Oben ſteht z. E. in der zweyten Reihe 0, denn da iſt kein vorhergehendes Glied der vorhergehenden Reihe, da das zu ſummiren wäre, das zweyte Glied der zweyten Reihe iſt = 1, denn das vorhergehende Glied der erſten Reihe iſt = 1, das zweyte Glied der zweyten Reihe iſt = 2, denn die Summe der beyden vorhergehenden Glieder der erſten Reihe iſt = 1 + 1 = 2. Eben dadurch wird das dritte Glied der zweyten Reihe = 3, denn die Summe der drey vorhergehenden Glieder der erſten Reihe = 1 + 1 + 1 = 3. Und ſo entſtehen in der zweyten Reihe die natürlichen Zahlzeichen, in der dritten Reihe findet man nun die Summen dieſer

dieſer natürlichen Zahlzeichen, da allezeit die Summation der vorhergehenden Glieder der vorhergehenden Reihe ein neues Glied wieder ausmachet. Und ſo gehet es auch bey den andern Reihen, daher müſſen auch die Reihen mit 0 anfangen, und je weiter ſie kommen, deſto mehrmal 0 muß an ihren erſten Gliedern herunterwärts ſich finden, weil keine vorhergehenden Glieder der vorhergehenden Reihen zu ſummiren ſind. Z. E. die vierte Zahl in der dritten Reihe iſt = 10. Weil die die Summe der vorhergehenden zweyten Reihe = 0 + 1 + 2 + 3 + 4, welches = 10 iſt. Die vierte Zahl in der fünften Reihe iſt = 35, weil die Summe der vorhergehenden Glieder der vorhergehenden Reihe = 0 + 0 + 0 + 1 + 4 + 10 + 20 = 35 iſt, u. ſ. w.

Da der Werth aller Glieder alſo nach Geſetzen beſtimmet iſt, ſo ſiehet man leicht, daß man dafür allgemeine Formeln finden kann, wodurch ſich jedes Glied jeder Reihe leicht finden läßt. Wenn man die Horizontalreihen dieſer Reihen lieſet, ſo findet man die Coefficienten des Binomiums, welche auch für ganze Exponenten daraus zu erweiſen ſtehen, und erwieſen ſind. Z. E. in der vierten Horizontalreihe findet man 1, 3, 3, 1, das ſind die Coefficienten für $(a+b)^3$, in der ſechſten findet man 1, 5, 10, 10, 5, 1, das ſind die Coefficienten für $(a+b)^5$ und ſo weiter. Aus der Betrachtung der vertical heruntergehenden Reihen laſſen ſich die Geſetze für die Combinationen, Conternationen, Conquaternationen, und ſo viel Verbindun-

bindungen, als man will, §. 370 erweiſen. Betrachtungen, die alle für dieſe Schrift zu weitläuftig ſind, und noch nicht hieher gehören, und wir daher nur hiſtoriſch anführen wollen.

§. 374. Wenn man **arithmetiſche Progreſſionen** nimmt, deren Differenz 1, oder 2, oder 3, oder welche Zahl man will, iſt, ſo entſtehet durch die Addition der vorhergehenden Glieder einer ſolchen Reihe, allezeit ein neues Glied, und alſo eine neue Reihe, welche man **polygonal**, oder **vieleckte Zahlen** nennet, und welche zu den **figurirten** Zahlen gehören. Sie heißen vieleckte Zahlen, weil ihr zweytes Glied anzeiget, wie viel Winkel eine gewiſſe geometriſche Figur habe, und weil ſich verſchiedene davon würklich durch ſo viel Punkte, als ein gegebenes Glied von der Reihe Einheiten hat, in ſolcher Figur, wovon die Reihe den Namen hat, vorſtellen läſſet. Die Sache ſelbſt wird dieſes erläutern. Die erſte arithmetiſche Reihe habe zur Differenz 1. Sie iſt alſo:

Arithmetiſche Reihe	1 2 3 4 5 6 7 8 ꝛc.
Polygonalzahlen.	1 3 6 10 15 21 28

nemlich allzeit die Glieder der vorhergehenden Reihe addirt und die neuen daraus gemacht.

In dieſer Polynalzahl ſind nun die Glieder allezeit die Summen der vorhergehenden Glieder der arithmetiſchen Reihe. Denn $1=1$. $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ u. ſ. w.

Dieſe

Dieſe Zahlen heißen Triangularzahlen. Ihr zweytes Glied zeiget an, wie viel Winkel ein Triangel habe, nemlich drey. Auch läßt ſich jedes Glied dieſer Reihe durch Punkte als ein Triangel darſtellen. Wir wollen z. E. das Glied, das = 15 iſt, nehmen. Da denn auch, wie bey allen Gliedern, alſo auch bey dieſem, die Anzahl der Glieder der erſten Reihe, durch deren Summirung dieſes Glied entſtanden iſt, die Theile der Seite des Triangels, oder hier die Punkte vorſtellet, die man an einer Seite machen muß. 15 war durch die Summation von 5 Gliedern der vorhergehenden Reihe entſtanden, alſo ſeine Seite iſt 5, und es ſtünde alſo:

. . . . .
. . . .
. . .
. .
.

28 war durch die Summation von 7 Gliedern entſtanden, alſo ſeine Seite iſt 7, und es läßt ſich alſo vorſtellen.

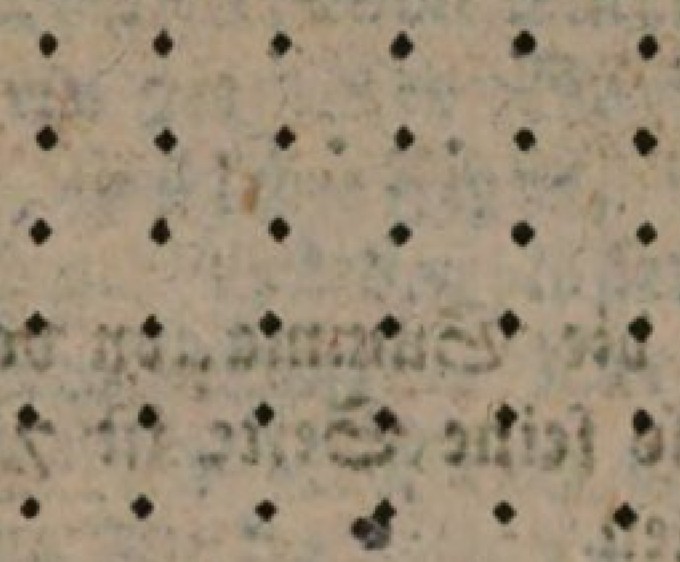
. . . .
. . . . . .
. . . . .
. . . .
. . .
. .
.

Wenn man auf eben die Art die Glieder einer arithmetiſchen Reihe, deren Differenz = 2 iſt, ſum-

ſummiret, und eine neue Reihe dadurch machet, ſo bekömmt man **Quadrangularzahlen**, ihr zweytes Glied zeiget wieder die Winkel an, die in einem Viereck ſind, und die Anzahl der Glieder, aus deren Addition allezeit ein Glied der Polygonalzahlreihe entſtanden iſt, zeiget die Seite an, oder wie viel für jede Seite gehöret.

Z. E. arithm. Reihe 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ꝛc.
Polygonalzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

Dieſe laſſen ſich auch noch bequem durch Punkte vorſtellig machen. Wir wollen z. E. 36 nehmen, das war durch die Addition von 6 Gliedern entſtanden. Es wird ein Viereck geben, deſſen Seite = 6.



Wenn man in der arithmetiſchen Reihe die Differenz = 3 nimmt, ſo ſtellet die Polygonalzahlreihe **fünfeckigte** Zahlen vor, als z. E.
arithmetiſche Reihe 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 ꝛc.
Polygonalzahl 1 5 12 22 35 51 ꝛc.
Dieſes läßt ſich nun ſchon nicht mehr ſo ſchön durch Punkte vorſtellen, obſchon alles vorhergehende bemerkte davon richtig iſt. Nimmt man die Differenz 4 in der arithmetiſchen Reihe, ſo kann man die ſechseckigte Zahl erhalten, u. ſ. w. Man hat auch

auch für alles dieſes Formel und Berechnungen in den angezeigten Autoren und anderwärts, überhaupt kömmt aber die Sache ſelbſt in der Mathematik nicht öfters vor. Wenn man auf eben die Art die Polygonalzahlen wieder addirt, ſo bekömmt man Pyramidalzahlen,

z. E. Polygontriangular 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28
Pyramidalzahlen 1 4 10 20 35 56

Addirt man Pyramidalzahlen auf eben die Art, ſo bekömmt man Pyramidalzahlen von höhern Ordnungen. Die älteren Rechenmeiſter haben ſich überhaupt mit Problemen von dieſer Art viel zu gute gethan, die aber, wenn man dieſe Eigenſchaften der Zahlen ſtudiren will, ganz bequem aufgelöſet werden können.

§. 375. Unter den unzählig vielen Veränderungen, die man mit Zahlen vornehmen kann, wollen wir doch noch zweyer gedenken, der Pronikzahlen. Sie ſind zwar von ſehr wenigem Gebrauch, indeſſen wollen wir ihrer doch gedenken, weil man doch zuweilen etwas davon antrift. Eine Pronikzahl iſt das Quadrat einer Zahl, und die Zahl ſelbſt zuſammen addiret. Z. E. das Quadrat von 2 iſt $= 4$, und $4 + 2 = 6$ iſt eine Pronikzahl. Das Quadrat von 6 iſt $= 36$, und $36 + 6 = 42$ iſt eine Pronikzahl. Alſo ganz allgemein, $n^2 + n$ iſt allezeit eine Pronikzahl. Wie man aus einer gegebenen Pronikzahl die Pronikwurzel finden könne, können wir noch nicht zeigen, weil wir noch nicht von quadratiſchen Gleichungen geredet haben. Alsdenn wird es jeder leicht ſelbſt

auf-

auflöſen können, und man wird alsdenn die Wahrheit der Formel, die wir jetzt dafür nur anzeigen wollen, leicht einſehen. Die Wurzel davon iſt: wenn eine Pronikzahl n^2+n, die nun in einer Zahl gegeben iſt, und die wir a nennen wollen, allezeit $= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(4a+1)}}{2}$ da, weil a bekannt iſt, alles leicht zu berechnen. Z. E. 156 iſt eine Pronikzahl, alſo 156 iſt hier = a. Folglich würde nun die Formel ſeyn $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(4 \,.\, 156 + 1)}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(624+1)}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{625}}{2}$ da der $\sqrt{625} = 25$, ſo iſt dieſes, wenn der √ würklich ausgezogen, $= -\frac{1}{2} + \frac{25}{2} = -\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2} = 12$, welches auch die Pronikwurzel iſt, denn $12^2 + 12$ iſt $= 144 + 12 = 156$, welche Pronikzahl gegeben war.

Man kann alle gegebene Pronikzahlen, wie wir allgemein gezeigt haben, durch $n^2 + n$ vorſtellen, aber wenn man dieſes in einen andern Ausdruck verwandelt, ſo iſt $n^2 + n = (n+1) \,.\, n$, wie man gleich ſiehet, oder $n \,.\, (n+1)$. Wenn man alſo zwey auf einander folgende natürliche Zahlzeichen mit einander multipliciret, ſo giebt das allezeit eine Pronikzahl, denn der andere Faktor, wie man hier allgemein ſiehet, iſt, wenn n gegeben iſt, nur um 1 größer, wie die Zahlzeichen auch ſo auf einander folgen. Alſo z. E. 3.4 oder 4.5 oder 20.21 u. ſ. w., giebt allezeit eine Pronik-

nikzahl, deren Pronikwurzel ſich, wie wir gezeigt haben, finden läſſet, auch ſchon hieraus erhellet, und wie man ſiehet, die geringſte von dieſen beyden Zahl oder n iſt. Die andre Art der Zahlen, welcher wir noch erwähnen wollten, ſind die **Primzahlen**, ſie ſind ſolche Zahlen, die in keine Faktores können zerfället werden, alſo auch nicht können gedacht werden, als ob ſie aus Faktoren entſtanden wären, und alſo, wenn man ſo ſagen kann, nur die 1 zum Faktor haben. Solche Primzahlen ſind z. E. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und ſo weiter.

§. 376. Die alten Mathematiker haben noch viele Arten und Eigenſchaften der Zahlen unterſucht, und ihnen mancherley Namen gegeben, als numeri perfecti, numeri amicabiles und andere mehr, von welchen wir aber nicht reden können und wollen.

Das neunzehnte Kapitel.

Von den Gleichungen überhaupt, und von den Gleichungen vom erſten Grade und ihrer Auflöſung.

§. 377. Wir haben bis daher in manchen Vorfallenheiten und bey manchen Beweiſen, die wir

geführet haben, ſchon Gleichungen gemacht, ohne daß wir es geſagt haben, daß es Gleichungen wären; und wir haben Urſach zu glauben, daß uns unſere Leſer dennoch verſtanden haben, weil unſer Verfahren ſich auf die erſten Gründe aller menſchlichen Erkenntniß gründete, die einem jeden bekannt ſind. Eigentlich iſt die ganze Arithmetik die Wiſſenſchaft, aus einigen gegebenen bekannten Größen unbekannte zu finden, welche unbekannte durch die bekannten beſtimmet werden, und die Algebra lehret dieſes nur auf eine allgemeine Art. Das haben wir bey der Addition, Subtraktion, Multiplikation ꝛc. geſehen. Wir wiſſen auch, daß man bey der allgemeinen Rechenkunſt die bekannten Größen durch die erſten Buchſtaben des Alphabets, und die unbekannten durch die letztern, durch x, y, z, ausdrücket. Und wir können nach allen dieſen Vorbereitungen nun ganz ſicher zu den Gleichungen ſchreiten.

§. 378. Eine Gleichung iſt ein doppelter Ausdruck einerley Größe, zwiſchen welchen denn das Gleichheitszeichen (=) geſetzet wird. So iſt z. E. $5 + 7 = 10 + 2$ oder $4 . 6 = 3 . 8$ u. ſ. w. Wäre nun hiebey eine unbekannte Größe, als z. E. $4 . 6 = 3 . x$, ſo ſiehet man hier bald, daß ſich dieſe unbekannte Größe durch die gegebenen bekannten könnte finden laſſen. Es käme darauf an, daß ich dieſe Gleichung immer veränderte, ſo aber, daß immer auf beyden Seiten gleiche Werthe blieben, bis ich x allein bekäme, da ich denn ſeinen Werth auch hätte. Da muß man nun mannichmal durch

die

die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Diviſion, Erhebung zu Potenzen, Ausziehung der Wurzeln, logarithmiſchen Rechnungen und verſchiedene Rechnungsarten erhalten, welche der geſunde Verſtand lehren muß, weil bey ſo unendlich verſchiedenen vorfallenden Aufgaben ſich nur allgemeine Regeln geben laſſen. Bey dieſem Falle ſiehet man bald, daß, wenn man beyde gleiche Dinge durch 3 dividirte, man x alleine bekäme, die beyden Dinge ſich aber dennoch gleich blieben, weil Gleiches durch Gleiches dividiret Gleiches giebt, und man alſo den Werth für x hätte. Denn iſt

$$4 . 6 = 3 . x \quad : 3$$

$$\frac{4 . 6}{3} = x \quad \text{aber} \quad \frac{4 . 6}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

alſo $8 = x$

§. 379. Es kömmt bey allen vorgegebenen Fragen vorzüglich darauf an, daß man die Umſtände der gegebenen Frage, und die bekannten und unbekannten Dinge darin ſehr wohl in Erwägung ziehet, und daraus die Gleichung herleitet. Hiebey muß der geſunde Verſtand das beſte thun, und laſſen ſich darüber keine Regeln geben. Die fleißige Uebung thut auch ſehr viel bey der Sache, und lehret einen, wie man aus einer Frage eine Gleichung herleiten und machen ſoll. Sehr oft iſt die Auflöſung weit leichter, als die Aufſetzung der Gleichung, wo öfters viel Nachdenken und Vorſicht zugehöret. Die Algebra iſt ein Orakel, das allezeit antwortet, aber nur richtig antwortet, wenn es richtig gefraget wird.

§. 380. Bey den Aufgaben ſelbſt iſt auch ein großer Unterſchied, indem bey einigen nur eine unbekannte Größe, bey andern zwey, drey und mehr unbekannte Größen geſucht werden: iſt das erſtere, ſo hat man nur eine Gleichung nöthig, iſt aber das letztere, ſo muß man ſo viel Gleichungen haben, als man unbekannte Größen ſuchet, die aber alle aus der Aufgabe müſſen hergeleitet werden können. Die Aufgaben können nun auch beſtimmt, oder unbeſtimmt ſeyn. Sie ſind, um eine ihrer vorzüglichen Eigenſchaften anzuzeigen, beſtimmt, wenn ſich nur eine Antwort auf jede Frage geben läßt; aber unbeſtimmt, wenn ſie mehr als eine Antwort zulaſſen; doch von dieſem letztern werden wir am Ende dieſes Abſchnitts noch etwas deutlicher reden. Jetzt iſt die Rede von beſtimmten Aufgaben, da durch die Bedingungen der Aufgabe die Aufgabe ſo beſtimmt wird, daß ſich für jede unbekannte Größe nur ein Werth finden läßt. Wenn die unbekannte Größe in einer Gleichung nur auf die erſte Potenz ſteiget, oder wenn ſie blos x, y und z bleibet, ſo heißt die Gleichung eine **Gleichung vom erſten Grade.** Wenn in der Gleichung die unbekannte Größe, nachdem die Gleichung gehörig in Ordnung gebracht iſt, auf die zweyte Potenz ſteiget, alſo das x^2 ꝛc. darin kömmt, ſo heißt ſie **vom zweyten Grade.** Iſt x^3 oder eine oder mehr unbekannte Größen in der dritten Potenz darin, ſo heißt ſie **vom dritten Grade**; kurz die Gleichung wird von dem ſo vielſten Grade benennt, ſo hoch die höchſte Potenz der unbekannten Größe oder Größen ſich darin befindet. Die

Glei-

Gleichungen vom erſten Grade ſind nun am leichteſten aufzulöſen, und von denen wollen wir jezt reden.

§. 381. Wir wollen nun die Fälle vornehmen, von jedem etwas ſagen, und die leichteſten zuerſt vortragen. Einer der leichteſten iſt wol, wenn man blos durch die Addition, oder Subtraktion eine Gleichung auflöſen könnte. Z. E. es wäre $x + a = b$. So iſt natürlich, daß, wenn man von beyden $+ a$ ſubtrahiret oder $- a$ dazu addiret, man alsdenn x alleine, und auch den Werth für x bekömmt. Aber da $x + a = b$, ſo werden auch beyde Größen noch gleich bleiben, wenn man Gleiches von beyden abziehet, oder Gleiches zu beyden addirt, alſo: $x + a = b$

$$\begin{array}{r} x + a = b \\ - a = - a \text{ addirt} \\ \hline x = b - a \end{array}$$

Denn durch die Addition von $- a$ fällt das a bey x weg: der Strich, den man denn macht, bedeutet folglich

eben ſo: $x - a = b$

$$\begin{array}{r} x - a = b \\ + a = + a \text{ addirt} \\ \hline x = b + a. \end{array}$$

In Zahlen: $4 + x = 16$

$$\begin{array}{r} 4 + x = 16 \\ - 4 = - 4 \text{ addirt} \\ \hline x = 16 - 4 = 12. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 8 = 15 \\ + 8 = + 8 \text{ addirt} \\ \hline x = 15 + 8 = 23 \end{array}$$

Ein Exempel mit Umſtänden: Es hat jemand mit zwey Würfeln 10 Augen geworfen. Die Augen auf dem einen Würfel ſind 6, wie viel ſind die Augen auf dem andern? Ob man das nun ſchon gleich ſagen könnte, wollen wir es doch durch eine Gleichung ſuchen. Es ſeyn die Augen auf dem andern Würfel, das nicht geſagt wird, $= x$. Da beyder Augen 10 ſind, und auf dem einen ſich 6 befinden, ſo muß

$x + 6 = 10$ ſeyn.

$+6 = +6$ ſubtrahiret

$x = 10 - 6$ würklich ſubtrahiret $= 4$.

So viel Augen hätte der andere Würfel gehabt.

§. 382. Wir bemerken bey dieſer Art Gleichung, und überhaupt, daß, wenn wir von einer Seite, um x alleine zu bekommen, eine Größe durch die Addition, oder Subtraktion wegſchaffen wollten, wir ſie allezeit auf die andere Seite mit dem entgegengeſetzten Zeichen, als ſie vorher gehabt hatte, bekommen, und es iſt auch leicht aus der Betrachtung der Gleichungen ſelbſt begreiflich. Daraus folget die Regel: Will man eine Größe von der einen Seite auf die andere Seite bringen, ſo löſchet man ſie auf der einen Seite aus, und ſetzet ſie auf die andere, aber mit entgegengeſetzten Zeichen. Hätte man alſo z. E. die Gleichung.

$x + a - cd = b$

ſo iſt folglich

$x = b - a + cd$ da die Größe mit verkehrten Zeichen herüber geſetzet ſind.

§. 383.

§. 383. Wenn die Gleichungen ſo beſchaffen ſind, daß die unbekannte Größe mit einer andern bekannten multiplicirt iſt, ſo muß man durch die Diviſion das x alleine zu bekommen ſuchen, wie wir gleich im Anfange ein Exempel gaben, und immer dahin ſehen, daß auf beyden Seiten Gleiches bleibet. Z. E.

$$bx - c + d = 5a$$

erſt auf die andere Seite gebracht.

$$bx = 5a + c - d$$

beydes durch b dividiret

$$x = \frac{5a + c - d}{b}$$

da man denn x allein bekömmt.

Exempel: Ein Knabe ſagt zu dem andern, wenn ich viermal ſo viel Aepfel hätte als du, und noch 8 dazu, ſo hätte ich eben 60. Wie viel hat der andere Knabe gehabt? Wir wollen ſetzen, er habe x Aepfel gehabt. Der erſte Knabe ſagt aber, wenn er viermal ſo viel hätte, und noch 8 Stück dazu, ſo hätte er 60, alſo muß viermal x und 8 dazu 60 ſeyn. Die Gleichung iſt alſo

$$4x + 8 = 60$$

die 8 herübergeſetzt

$$4x = 60 - 8 = 52$$

: 4

$$\frac{4x}{4} = x = \frac{52}{4}$$

oder

$$x = 13$$

Der andere Knabe hat alſo 13 Aepfel gehabt.

Man kann auch leicht einſehen, daß dieſes richtig iſt, denn der Knabe ſagte, wenn er 4mal ſo viel Aepfel hätte als ſein Kamerad und noch 8 dazu, ſo hätte er 60. Alſo muß der Kamerad 13 Aepfel gehabt haben. Denn 4mal 13 $+ 8$ iſt $= 60$.

§. 384. Man bekommt öfters Gleichungen, worin ſich Brüche befinden, z. E. $\frac{x}{3} + \frac{a}{3} - \frac{bd}{4} = c$, da muß man ſich bemühen, die Brüche wegzuſchaffen, und alle Glieder der Gleichung in ganze Größen zu verwandeln. Dieſes geſchiehet, wenn man alle Glieder der Gleichung nachgerade mit allen Nennern der Brüche multipliciret, es bleibt alsdenn dennoch auf beyden Seiten gleich viel; weil Gleiches mit Gleichem multipliciret gleich bleibet. Alsdenn verfähret man nach den befindenden Umſtänden auf die gelehrte Art, daß man die unbekannte Größe alleine bekömmt, und einen Werth dafür findet; oder welches kürzer iſt, man multipliciret die Glieder der Gleichung mit dem gemeinſchaftlichen Nenner aller Brüche, da man denn auch die Glieder der Gleichung in ganzen Größen erhält. Wir wollen dieſe Gleichung vornehmen.

$$\frac{x}{3}+\frac{a}{3}-\frac{bd}{4}=b \quad \cdot 3$$

$$x+a-\frac{3bd}{4}=3c \quad \cdot 4$$

$$4x+4a-3bd=12c$$

$$4x=12c-4a+3bd \quad :4$$

$$x=\frac{12c-4a+3bd}{4}$$

oder würklich dividiret $x=3c-a+\frac{3bd}{4}$

Man hätte eben dieſes erhalten, wenn man gleich die Gleichung mit dem gemeinſchaftlichen Nenner der Brüche, der = 12 iſt, multipliciret hätte.

Denn $\frac{x}{3} + \frac{a}{3} - \frac{bd}{4} = c$

$$\frac{12x}{3} + \frac{12a}{3} - \frac{12bd}{4} = 12c \quad .12$$

oder

$$4x + 4a - 3bd = 12c$$

$$4x = 12c - 4a + 3bd$$

$$x = \frac{12c - 4a + 3bd}{4}$$

oder

$$x = 3c - a + \tfrac{3}{4}bd$$

Es gilt eben dieſe Methode, wenn auch die unbekannte Größe ſich im Nenner des Bruchs befindet, man muß alsdenn gleichfalls die Glieder der Gleichung damit multipliciren.

Z. E. $\frac{100}{x} - 8 = 12.$

$$.x$$

$$100 - 8x = 12x$$

$$100 = 12x + 8x = 20x \quad : 20$$

$$\tfrac{100}{20} = x$$

$$5 = x$$

Eben.

Eben ſo, wenn man folgendes Exempel hätte:

$$\frac{5x + 3}{x - 1} = 7$$

da im Zähler und Nenner die unbekannte Größe iſt.

$$\cdot (x - 1)$$

$$5x + 3 = 7x - 7$$

$$3 + 7 = 7x - 5x$$

$$10 = 2x$$

$$\tfrac{10}{2} = x$$

oder

$$5 = x$$

Folglich die 7 mit entgegengeſetzten Zeichen herüber gebracht, und auch die 5x auf die andre Seite.

§. 385. Wir haben eine Sache jetzt voraus angezeiget, die ſich aber leicht begreifen ließ. Wir finden bey dieſer Gleichung gleich, da der Bruch weggeſchaft war, auf beyden Seiten die unbekannte Größe. Es iſt leicht begreiflich, daß, wenn dieſes iſt, man ſich bemühen muß, die unbekannten Größen alle auf eine Seite zu ſchaffen, welches mit entgegengeſetzten Zeichen leicht geſchehen kann. Zuweilen kömmt es auch, daß x in mehr als einem Gliede, in ganzen Zahlen, oder in Brüchen ſich befindet. Iſt es in gauzen Größen, ſo ſehen wir ſchon bey dieſem Exempel, wie man verfahren müſſe: nemlich ſind die Coefficienten des x, wie hier, Zahlen, ſo addirt oder ſubtrahirt man ſie, wie ſie denn hier ſubtrahirt wurden, denn $7x - 5x$ iſt, wie jeder weiß, $= 2x$. Wäre aber die Gleichung blos in Buchſtaben, wenn man allgemein eine Sache betrachtet, ſo muß man die un-

bekannte Größe, wenn ſie in mehr Gliedern in eben der Potenz iſt, wie bey Gleichungen vom erſten Grade allezeit iſt, zum allgemeinen Faktor machen, und die andern Größen in die Klammer ſetzen, wie bey der Lehre von der Multiplikation und Diviſion manchmal geſehen haben. Ueberhaupt kommen bey allen Gleichungen das Zerfällen der Größen in ihre Faktores und manche andre Kunſtgriffe einem treflich zu nutze. Man hätte die Gleichung

$$\frac{ax+b}{x-c} = gd-f$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \;.\; x-c$$

$$ax+b = gdx-fx-cgd+cf$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$ das ax herüber gebracht.

$$b = gdx-ax-fx-cgd+cf$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$ die bekannten Größen auf die andere Seite.

$$b+cgd-cf = gdx-ax-fx$$

Hier iſt x ein gemeinſchaftlicher Faktor auf einer Seite.

Alſo $\overline{\qquad\qquad\qquad}$

$$b+cgd-cf = (gd-a-f)x$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \;:\; gd-a-f$$

$$\frac{b+cgd-cf}{gd-a-f} = x$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$ und weil im Zähler die c ſich noch in zwey Größen befindet.

$$\frac{b+(gd-f)c}{gd-a-f} = x$$

Wenn

Wenn die unbekannte Gröſse in mehr Gliedern der Gleichung als Bruch vorkömmt, ſo addirt man alle Brüche zuſammen, nachdem man ſie zu einerley Benennung gebracht hat, und verfährt denn auf die gewöhnliche Art.

Exempel: Ein Schäfer wird gefragt, wie viel er Schaafe habe: er ſagt: den vierten Theil meiner Schaafe hütet mein Knecht, den achten Theil mein Bruder, dieſe, die ich hier hüte, ſind die Hälfte von allen meinen Schaafen, und 40 Stück ſind in dem Siechenhauſen; wie viel hat er gehabt? Da ich das noch nicht weiſs, ſo will ich das x nennen, welches nun alle Schaafe überhaupt, die er hat, bedeutet.

Davon hütet ſein Knecht den vierten Theil, alſo $\frac{1}{4}x$
Sein Bruder den achten Theil, alſo $\frac{1}{8}x$
Er ſelbſt die Hälfte, alſo $\frac{1}{2}x$
Und in dem Siechenhauſen ſind 40

Alſo alles, was er hat, iſt $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}x + 40$, und das iſt folglich allen ſeinen Schaafen, aus der unbekannten Gröſse oder x gleich. Nun läſst ſich die Gleichung leicht aufſetzen.

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}x + 40 = x$$

——————————— die Brüche addiret

$$\frac{7}{8}x + 40 = x$$

——————————— . 8 den Bruch durch

$$7x + 320 = 8x$$ die Multipl. weggeſchaft.

———————————

$$320 = 8x - 7x$$

——————————— oder

$$320 = x$$

Er

Er hat alſo 320 Schaafe gehabt.

Davon hat der Knecht gehütet	$\frac{1}{4} = \frac{320}{4}$	$= 80$
Der Bruder hat gehütet	$\frac{1}{8} = \frac{320}{8}$	$= 40$
Er ſelbſt die Hälfte =	$\frac{1}{2} = \frac{320}{2}$	$= 160$
und 40 im Siechenhauſen	=	40
	Summa	320

§. 386. Bisweilen ſiehet eine Gleichung vom erſten Grade, wie eine Gleichung vom zweyten Grade aus, weil nemlich x in der zweyten Potenz darin vorkömmt, und die doch würklich vom erſten Grade iſt. Z. E. wenn die Aufgabe gegeben wäre, man ſollte eine Zahl ſuchen, deren Quadrat ſo groß wäre, als die Zahl ſelbſt, zweymal genommen. Die Zahl ſey $= x$, alſo muß $x^2 = 2x$ ſeyn,

$$x = 2 \text{ dividirt durch } x$$

und 2 iſt auch dieſe einzige Zahl, den $2^2 = 4$, und $2 . 2 = 4$.

Es kann auch geſchehen, daß ſogar Wurzelzeichen vorkommen, und die Gleichung dennoch vom erſten Grade bleibet, alsdenn muß man ſeine Zuflucht zu der Erhebung in Potenzen nehmen, um das Wurzelzeichen dadurch wegzuſchaffen. Z. E. man ſoll eine Zahl ſuchen, die, wenn man ſie von 1000 abziehet, und die Quadratwurzel denn aus dem Reſte ziehet, dieſer Reſt zur Quadratwurzel 16 habe. Die Zahl, die geſucht wird, ſey $= x$, dieſe ſoll man von 1000 abziehen, und nachher die Quadratwurzel aus dem Reſte ziehen, das gäbe den Ausdruck $\sqrt{(1000 - x)}$; wenn dieſes geſche-

hen

hen iſt, ſo ſoll die Wurzel $= 16$ ſeyn. Alſo iſt nun die Gleichung $\sqrt{(1000 - x)} = 16$. Erhebet man beyde Seiten der Gleichung der zweyten Potenz, ſo fällt der $\sqrt{}$ weg.

Alſo:	$1000 - x = 16 \,.\, 16 = 256$
das x auf die andere Seite	$1000 = 256 + x$
die 256 auf die andere Seite	$1000 - 256 = x$
	oder
	$744 = x$

alſo, ich müßte von 1000 die 744 abziehen, ſo gäbe der Reſt diejenige Zahl, daß, wenn aus der die Quadratwurzel gezogen würde, dieſe Wurzel $= 16$ wäre; oder dieſe Zahl iſt ſelbſt 256, und der $\sqrt{}$ daraus iſt auch $= 16$.

§. 367. Es kann ſich auch zutragen, daß die unbekannte Größe, oder das x in den Exponenten einer Größe als eine Potenz kömmt, und wenn es dennoch in der erſten Potenz bleibet, ſo ſiehet man es doch als eine Gleichung an vom erſten Grade, alsdenn muß man aber ſeine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen, welches auch leicht begreiflich iſt, weil die Logarithmen würkliche Potenzexponenten ſind. Wir wollen es durch ein Paar Exempel zeigen.

Z. E. Es ſey die Gleichung:

$2^x = 512$ ſo ſind folglich, weil beyde Größen gleich,

$x L.2 = L 512$ auch ihre Logarithmen gleich, alſo:

folglich, $x = \frac{L.\ 512}{L\ \ 2}$

Wenn man die Logarithmen aufſuchet, ſo iſt alſo $x = \frac{2,7092700}{0,3010300}$ Zähler und Nenner mit 10 multiplicieret, wird dieſes $= \frac{27092700}{3010300}$ würklich dividiret $= 9$. Alſo $x = 9$, und $2^x = 2^9$. Wenn man alſo 2 zur 9ten Potenz erhebet, wird das 512 ſeyn, welches ſich auch ſo finden wird.

Es ſey gegeben. $5 . 3^{2x} - 100 = 305$: 5 alle Glieder

$$3^{2x} - 20 = 61$$

$$3^{2x} = 61 + 20 = 81$$

$$2x\,L\ 3 = L\ 81 \quad : L\ 3$$

$$2x = \frac{L\ 81}{L\ 3} \quad : 2$$

$$x = \frac{L\ 81}{2.L.3}$$

Schlägt man nun die Logarithmen auf, ſo iſt $x = \frac{1,9084850}{0,4771212.2} = \frac{1,9084850}{0,9542424}$. Zähler und Nenner

mit

mit 10 multipliciret $x = \frac{19084850}{9542424}$ würklich dividiret x=2. Daß es hinten nicht genau zutrift, kömmt daher, weil die letzte in dem L. 3 nicht richtig iſt, welche nach der Multiplikation eigentlich 5 ſeyn müßte.

Wir haben die nöthigſten Bemerkungen für Anfänger von den Gleichungen vom erſten Grade, worin nur eine unbekannte Größe vorkömmt, geſagt, wir fügen denenſelben zur Uebung noch verſchiedene Exempel bey, wobey ſich auch noch Anmerkungen werden machen laſſen, die auch hieher gehören.

§. 388. **Erſtes Exempel:** man ſoll 30 in zwey Theile zertheilen, ſo, daß der größere Theil um 8 größer ſey als der kleinere.

Auflöſung. Da man keinen Theil noch [illegible] weiß, ſo ſey der größere Theil=x. Da der größere um 8 größer ſeyn ſoll als der kleinere, ſo muß der kleinere nothwendig um 8 kleiner ſeyn als dieſer größere Theil, oder als dieſes x, es muß alſo ſeyn=x−8. Aus dieſen beyden, aus x und aus x − 8 muß nothwendig die 30 beſtehen, weil beyde Theile zuſammen 30 ſeyn ſollen. Nun hat man die Gleichung, und darf nur das x oder den größern Theil ſuchen, ſo weis man den kleinern, wenn man 8 von dem, was man für x gefunden, abzieht.

Alſo $x + x - 8 = 30$

die 8 herüber gebracht

$x + x = 30 + 8$

oder

$2x = 38$

: 2

$x = \frac{38}{2} = 19$

Alſo der größere Theil iſt 19, und da folglich der kleinere um 8 kleiner iſt, ſo iſt er $19 - 8 = 11$, und 19 und 11 machen auch 30 aus. Wenn man allgemein ſagte, man zertheilte a in zwey Theile, ſo, daß der eine Theil um c größer ſey als der andere, ſo wäre der größere Theil auch x, der kleinere $x - c$.

und $x + x - c = a$

$2x = a + c$

$x = \frac{a + c}{2}$

Alſo, da wir den Werth des größern gefunden, ſo wird der kleinere leicht beſtimmt, es iſt nun der kleinere $\frac{a + c}{2} - c = \frac{a + c}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{a + c - 2c}{2} = \frac{a - c}{2}$

§. 389. Zweytes Exempel, eine Fabel. Ein Fuchs in den Aeſopiſchen Zeiten, als noch die Thiere redeten, hatte einem Bauern viel Hüner getödtet. Der Bauer fängt ihn endlich, und will ihn wieder todt ſchlagen. Der Fuchs bittet um ſein

ſein Leben, und entſchuldiget ſich damit, daß er ſo ſehr viel Hüner nicht getödtet hätte. Wie viel haſt du denn umgebracht, ſagt der Bauer? Ich habe, ſagte er, nochmal ſo viel Hüner als Hahnen umgebracht. Hätte ich für jedes Huhn 2 Pfennig bekommen, und für jeden Hahnen 6 pf., ſo hätte ich eben 100 Thlr. Allein die 100 Thl. habe ich ohnedem, und ich gebe ſie dir für mein Leben. Der Bauer ſchenkt ihm dafür das Leben. Wie viel Hüner und wie viel Hahnen hat nun der Fuchs getödtet?

Auflöſung. Da er nochmal ſo viel Hüner als Hahnen umgebracht hat, ſo ſey die Zahl der Hühner $= x$, der Hahnen alſo wird halb ſo viel ſeyn, alſo $\frac{1}{2}x$ oder $\frac{x}{2}$; nun, wenn er von jedem Huhn 2 Pfennig bekommen hätte, ſo wären das $2x$ pf., und von jedem Hahnen 6 pf. das wäre die Zahl der Hahnen mit 6 multipliciret, oder $\frac{x}{2} . 6$ Pfennig $= \frac{6x}{2}$ Pfennig $= 3x$ Pfennig. Beydes zuſammen ſoll 100 Thlr. ausmachen, welches 28800 Pfennige ſind. Nun hat man die Gleichung.

Alſo $2x$ pf. $+ 3x$ pf. $= 28800$ pf.

die x addiret

$$5x = 28800$$

$$x = \frac{28800}{5} = 5760.$$

Da x die Hüner bedeutet, ſo hat er alſo 5760 Hüner, und halb ſo viel Hahnen, oder $\frac{5760}{2} = 2880$ Hahnen ermordet.

§. 390. Drittes Exempel. Ein Vater hinterläßt drey Söhne, dieſe ſollen ſein Vermögen auf ſolche Art unter ſich theilen. Der erſte ſoll 1000 Thlr. weniger, als die Hälfte der ganzen Verlaſſenſchaft beträgt, bekommen; der zweyte ſoll 800 Thlr. weniger, als der dritte Theil der Verlaſſenſchaft beträgt, bekommen; und der dritte ſoll 600 Thlr. weniger, als der vierte Theil der Verlaſſenſchaft beträgt, erhalten. Wie viel hat jeder bekommen, und wie groß iſt die ganze Verlaſſenſchaft geweſen?

Auflöſung. Man ſiehet bald ein, daß, wenn man die Verlaſſenſchaft wüßte, man auch wüßte, was jeder bekommen hätte. Wir wollen alſo die Verlaſſenſchaft ſuchen. Sie ſey $= x$.

Nun bekömmt der erſte die halbe Verlaſſenſchaft, weniger 1000 Thlr. Alſo $\frac{x}{2} - 1000$.

Der zweyte den dritten Theil der Verlaſſenſchaft, weniger 800 Thlr. Alſo $\frac{x}{3} - 800$.

Der dritte den vierten Theil der Verlaſſenſchaft, weniger 600 Thlr. Alſo $\frac{x}{4} - 600$.

Das alles muß nun die ganze Verlaſſenſchaft, oder das x ausmachen.

Alſo

Alſo die Gleichung iſt:

$$\frac{x}{2} - 1000 + \frac{x}{3} - 800 + \frac{x}{4} - 600 = x$$

oder

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 1000 - 800 - 600 = x$$

alles addiret

$$\frac{13}{12}x - 2400 = x$$

$$\cdot 12$$

$$13x - 2400 \cdot 12 = 12x$$

jedes auf eine Seite gebracht und die x alleine.

$$13x - 12x = 2400 \cdot 12$$

$$x = 2400 \cdot 12 = 28800.$$

Alſo die Erbſchaft iſt 28800 Thlr. geweſen, davon hat der erſte bekommen: $\frac{x}{2} - 1000 = \frac{28800}{2} - 1000 = 13400$ Thlr.

Der zweyte $\frac{x}{3} - 800 = \frac{28800}{3} - 800 = 8800$ „

Der dritte $\frac{x}{4} - 600 = \frac{28800}{4} - 600 = 6600$ „

28800 Thlr.

§. 391. **Viertes Exempel.** Man zertheile 50 Thlr. in 10 Theile, ſo, daß immer ein Theil um einen Thaler größer iſt als der andere;

 wel-

welches wird der kleineſte Theil ſeyn, und überhaupt, welches werden alle Theile ſeyn?

Auflöſung. Es ſey der kleinſte Theil = x, alſo der darauf folgende, der um 1 größer ſeyn ſoll, x + 1, der darauf folgende x + 2 u. ſ. w.

Man ſiehet gleich, das giebt eine arithmetiſche Progreſſion von 10 Gliedern, und weil das letzte Glied einer arithmetiſchen Progreſſion allgemein iſt, a + (n − 1) d §. 263. hier aber oder das erſte Glied iſt = x, die Zahl der Glieder = n = 10, und d oder die Differenz = 1. ſo wird das letzte Glied ſeyn, x + 10 − 1, oder x + 9. Alſo die ganze Summe der Progreſſion, die nach §. 265. gefunden wird, wenn man das erſte und letzte Glied addiret, und mit der halben Zahl der Glieder multipliciret, wird ſeyn (x + x + 9) . 5 = (2x + 9) . 5 = 10x + 45. Dieſes muß nun = 50 ſeyn; denn alle Glieder machten die 50 Thlr. aus. Alſo die Gleichung iſt:

$$10x + 45 = 50$$

——————— − die 45 herüber gebracht

$$10x = 50 - 45 = 5$$

——————— : 10

$$x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Alſo der erſtere bekömmt $\frac{1}{2}$ Thlr. und alle 10 bekommen in folgender Ordnung:

$\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$.

§. 392. **Fünftes Exempel.** Ein Müller hat auf ſeiner Mühle drey Gänge, der erſte Gang mahlet in 2 Stunden 6 Himbten, der zweyte

te in 3 Stunden 5 Himbten, und der dritte in 4 Stunden 3 Himbten. Nun gehen alle Gänge; in wie viel Stunden werden 130 Himbten abgemahlen ſeyn, welche zugleich auf die Mühlen geſchüttet werden, und wie viel muß der Müller auf jeden Gang ſchütten, wenn alles ſoll zugleich fertig werden?

Aufloſung. Da mir die Zeit unbekannt iſt, ſo wollen wir ſetzen, es gehen x Stunden darauf. Nun iſt es richtig, daß ich wiſſen muß, wie viel jeder Gang in den x Stunden mahlet, und wenn ich das von allen dreyen weis, ſo iſt dieſes zuſammen denen 130 Himbten gleich, denn die müſſen doch in einer gewiſſen Zeit von Stunden, die ich nun x nennen will, fertig ſeyn. Dieſes zu erfahren, gebrauche ich die Regel Detri, und ſchließe erſt von dem erſten Gange.

2 Stunden : 6 Himbten = x Stunden : $\frac{6x}{2}$ Himbten = 3x Himbten

das mahlet der eine Gang.

Ferner: 3 Stunden: 5 Himbten = x Stunden: $\frac{5x}{3}$ Himbten

das mahlet der zweyte Gang.

Ferner: 4 Stunden: 3 Himbten = x Stunden: $\frac{3x}{4}$ Himbten

das mahlet der dritte Gang.

Alles, was nun dieſe drey Gänge in den x Stunden mahlen, muß den 130 Himbten gleich ſeyn.

Alſo die Gleichung iſt:

$3x + \frac{5}{3}x + \frac{3}{4}x = 130$ die Brüche unter einer-

$3x + \frac{29}{12}x = 130$. 12 ley Benennung und add.

$36x + 29x = 1560$ oder $65x = 1560$

$x = \frac{1560}{65} = 24.$

Alſo in 24 Stunden werden auf allen dreyen Gängen die 130 Himbten abgemahlen ſeyn.

Da man x weis, welches die Zeit iſt, ſo weis man auch dadurch, was auf jeden Gang muß geſchüttet werden, wenn ſie alle zugleich anfangen, und zugleich aufhören ſollen; nemlich:

auf den erſten	$3x = 3 . 24 = 72$	Himbten
auf den zweyten	$\frac{5}{3}x = \frac{5}{3} . 24 = 40$	„
auf den dritten	$\frac{3}{4}x = \frac{3}{4} . 24 = 18$	„
	Summe 130	Himbten

Anmerkung. Man ſiehet bey dieſem Exempel, daß manches in der Aufgabe als bekannt voraus geſetzet wird, was eben nicht darin ſtehet. Hier wurde die Kenntniß der Regel Detri voraus geſetzt, und daß man daraus finden ſollte, wie die Gleichung aufzuſetzen wäre. Es gehöret alſo allerdings, bey manchen Aufgaben viel Witz und Ueberlegung, um ſie in eine Gleichung zu bringen.

Zweyte Anmerkung. Es fällt von ſelbſt in die Augen, daß, wenn auch die Zahl der Stunden gegeben wäre, man daraus die Anzahl der Himbten, die auf jeden Gang gehörten, hätte finden können, welches noch leichter geweſen wäre. Auch daß man, wenn der Gänge noch viel mehr geweſen wären, die Anzahl der Stunden und der Himbten hätte auf die Art auflöſen können.

Dritte Anmerkung. Wenn man allgemein geſagt hätte, eine Mühle hat drey Gänge, der erſte mahlet in a Stunden b Himbten; der zweyte in c Stunden d Himbten; der dritte in e Stunden f Himbten, in wie viel Stunden werden g Himbten abgemahlen seyn? ſo hätte man auf eine gleiche Art x Stunden annehmen, und ſchließen müſſen:

a Stund. : b Hbt. = x Stund. : $\frac{bx}{a}$ Hbt.

ferner: c Stund. : d Hbt. = x Stund. : $\frac{dx}{c}$ Hbt.

und e Stund. : f Hbt. = x Stund. : $\frac{fx}{e}$ Hbt.

Und die Gleichung wäre geweſen:

$$\frac{bx}{a} + \frac{dx}{c} + \frac{fx}{e} = g \quad .a$$

$$bx + \frac{adx}{c} + \frac{afx}{e} = ag \quad .c$$

$$cbx + adx + \frac{acfx}{e} = acg \quad .e$$

$$cebx + aedx + acfx = acge \quad \text{oder}$$

$$(ceb + aed + acf)x = acge$$

$$x = \frac{acge}{ceb + aed + acf}$$

Da man x allgemein gefunden hat. Hätte man dieſes allgemein auf obiges Exempel appliciret, ſo wäre $a = 2$, $b = 6$, $c = 3$, $d = 5$, $e = 4$, $f = 3$ und $g = 130$.

Alſo $x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 130 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3120}{72+40+18} = \frac{3120}{130} = 24$

Man erkennet auch leicht, daß dieſes Exempel überhaupt auch darauf paſſet, wenn verſchiedene Dinge verſchiedene Wirkungen in verſchiedener Zeit hervorbringen, was ſie hervorbringen werden, wenn ſie zuſammen wirken.

3. E. Wenn drey Maurer arbeiteten. Der eine machte nun in 1 Tage 6 Cubikſchuh, der andere in 2 Tagen 9 Cubikſchuh, der dritte in 3 Tagen 14 Cubikſchuh. Wie lange werden ſie auf 180 Cubikſchuh arbeiten, alle 3 zuſammen?

Nach der Formel iſt $x = \frac{aceg}{ceb + aed + acf}$

$a = 1$, $b = 6$, $c = 2$, $d = 9$, $e = 3$, $f = 14$, $g = 180$ und x, alſo $\frac{1.2.180.3}{2.3.6 + 1.3.9 + 1.2.14}$

$= \frac{1080}{36+27+28} = \frac{1080}{91} = 11\frac{79}{91}$ Tage, oder faſt $11\frac{8}{9}$ Tage.

§. 393. **Sechſtes Exempel.** Es hat jemand eine gewiſſe Anzahl Arbeiter zu bezahlen, die alle gleichviel bekommen. Allein, wenn er ſie alle völlig bezahlen will, ſo findet er, daß er nicht Geld genug habe. Giebt er jedem 6 Thlr. die ihm gehören, ſo fehlen ihm 20 Thlr.; er will alſo nur jedem 4 Thlr. geben, und denn behält er 12 Thlr. übrig; wie viel Geld hat er gehabt, und wie viel Arbeiter waren es?

Aufloͤſung. Ohngeachtet man hier zwey Dinge ſuchen ſoll, ſo hat man doch nur eins zu wiſſen nöthig, weil das andere ſich von ſelbſt findet. Wir wollen die Anzahl der Arbeiter ſuchen, die ſey $= x$. Da er jedem 6 Thlr. geben ſoll, ſo würde die ganze Summe des Geldes die Zahl der Arbeiter mit der Zahl der Thaler, die jedem gehörte, multipliciret, ſeyn, alſo hier $= 6x$. Aber, wenn das

das jeder bekäme, ſo fehlen ihm 20 Thlr. E hat alſo jetzt würklich 20 Thlr. weniger als dieſes Geld. oder er hat nur 6x — 20 Thlr. Er will aber jedem nur 4 Thlr. geben, alſo will er nur 4x Thlr. ausgeben, und dann hat er noch 12 Thaler übrig; alſo iſt alles, was er würklich jetzt hat, 4x + 12 Thlr. Wir haben nun zwey Werthe bekommen von dem, was er jetzt würklich hat, und die müſſen, da ſie beyde wahr ſind, alſo einander gleich ſeyn. Wir haben alſo eine Gleichung, daraus ſich x finden läßt, und es muß

$6x - 20 = 4x + 12$

———————————die x auf eine Seite

$6x - 4x - 20 = 12$

———————————oder

$2x - 20 = 12$

———————————die 20 herüber gebracht.

$2x = 12 + 20 = 32$

———————————

$x = \frac{32}{2} = 16$

Der Arbeiter ſind 16. Will man nun ſein Geld wiſſen, ſo hat man nur nöthig, in einen der erſten Werthe für x das gefundene zu ſetzen. Das war ſein Geld. Wir wollen es in $4x+12$ thun. Da $x = 16$, ſo wird dieſes $4 . 16 + 12 = 64 + 12 = 76$. Alſo 76 Thaler hatte er gehabt, und da er, wenn er alles bezahlen wollte, 6x Thaler haben mußte, ſo hätte er 96 Thaler haben müſſen.

Es iſt offenbar, daß man auch dieſes Exempel leicht allgemein hätte auflöſen können. Denn, wenn Einer einer gewiſſen Anzahl Arbeiter a Thlr. geben

geben wollte, und ihm dann b Thlr. fehlen; nun aber ſich entſchlöſſe, ihnen c Thlr. zu geben, und er denn d Thlr. überbehielte, ſo würde nach geben dieſen Schlüſſen:

$$ax - b = cx + d$$

die unbekannten u. bekannten Größen jede auf eine Seite

$$ax - cx = b + d$$

oder

$$(a - c)x = b + d$$

$$x = \frac{b + d}{a - c}$$

§. 394. **Siebentes Exempel.** Es hat jemand zweyerley Weine, von dem beſten gilt das Quartier 15 mgr. und von dem ſchlechten das Quartier 10 mgr. er will einen dritten Wein daraus machen, davon das Quartier 12 mgr. gelten ſoll; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Auflöſung. Wir wollen ſetzen, er müſſe zu einem Quartier von dem ſchlechten Weine den Theil x nehmen. Da x ein Bruch von Quartiere iſt, weil es weniger als ein Quartier ſeyn muß, ſo iſt nun noch von dem guten Weine 1 — x zum Quartiere gekommen, um das Quartier voll zu machen. Denn, wenn man von dem ganzen Quartiere das, was von dem ſchlechtern dazu gekommen, abzieht, nemlich x, ſo bleibt das noch übrig, was den guten Wein ausmachet.

Alſo

Alſo vom ſchlechten Wein = x, und vom guten = 1 − x. Der ſchlechte Wein koſtete das Quartier 10 mgr. alſo x davon, 10 . x mgr. Der gute Wein koſtete 15 mgr. alſo 1 − x davon, koſtet (1 − x) . 15, oder 15 − 15x. Alſo alles, was in dem Quartier iſt, oder das ganze Quartier koſtet 10 . x + 15 − 15 . x gr. und das ſoll nun = 12 gr. ſeyn. Daraus läßt ſich x finden. Die Gleichung iſt alſo:

$$10x - 15x + 15 = 12$$

oder die x auf die andere Seite gebracht, wie auch die 12

$$15 - 12 = 15x - 10x$$

$$3 = 5x$$

$$\frac{3}{5} = x$$

Alſo muß von dem ſchlechten Wein $\frac{3}{5}$ dazu, und folglich von dem guten $\frac{2}{5}$, denn $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$. Es verſieht ſich von ſelbſt, daß man ſtatt des Quartiers, Anker, Ochshöſt, was man will, ſetzen kann.

Wenn alſo ein Quartier des ſchlechten Weins 10 mgr. galt, ſo gilt $\frac{3}{5}$ Quartier $\frac{3.10}{5}$ mgr. = 6 mgr. und da der gute Wein 15 mgr. galt, ſo gilt $\frac{2}{5}$ Quartier $\frac{2.15}{5}$ = 6 mgr. alſo kommen die 12 mgr. heraus.

Anmerkung. Wenn man das Exempel allgemein betrachtet, und ſagte, zu einer gewiſſen Größe ſollen zwey Dinge von gegebenem Werthe vermiſcht werden. Das eine Ding ſoll a Werth haben, das andere Ding ſoll b Werth haben, und

das;

das, was aus beyder Vermiſchung entſtehen ſoll, ſoll c Werth haben; ſo wird gleichfalls in einer beſtimmten Größe von dem ſchlechten x und von dem beſten $1 - x$ ſeyn. Der Werth des ſchlechtern in dieſer Größe wäre der ax, und des beſſern $(1 - x)b = b - bx$, und beydes müßte c ſeyn.

$$\text{Alſo: } ax + b - bx = c$$
$$ax - bx = c - b$$
$$(a - b)x = c - b$$
$$x = \frac{c - b}{a - b}$$

Dieſes iſt die allgemeine Formel für die Alligationsregel, die in den Rechenbüchern vorkömmt, und die wir nur angeführet haben. Sie iſt nützlich bey allen Vermiſchungen von Silber, Gold ꝛc. zu gebrauchen. Z. E. es ſoll 15 löthiges und 9 löthiges Silber vermiſcht werden, ſo, daß 13 löthiges heraus kömmt, wie viel muß man zu einer gewiſſen Größe als zu 1 Mark nehmen, oder auch 2, 3 oder 4 nehmen, die aber denn immer als die Einheit angeſehen werden. Wir wollen hier mal zu einer Mark nehmen. Das Löthige beym Silber iſt ſein Werth. Daher wird die Formel $x = \frac{c - b}{a - b}$ alſo angewendet werden können. Es ſoll a das ſchlechte, b das beſte ſeyn, c iſt der Werth des vermiſchten. Alſo $a = \frac{9}{16}$ löthig, $b = \frac{15}{16}$ löthig, und $c = \frac{13}{16}$ löthig. Alſo was vom ſchlech-

ten

ten geſucht wird, oder wie viel man davon neh-men muß, oder $x = \frac{\frac{13}{16} - \frac{15}{16}}{\frac{9}{16} - \frac{15}{16}} = \frac{-\frac{2}{16}}{-\frac{6}{16}}$ oder $= \frac{-2}{-6} = + \frac{1}{3}$, nemlich Mark, und alſo das beſſere $\frac{2}{3}$ Mark, weil $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ Mark iſt. Da nun die Mark = 16 Loth, ſo wird von dem ſchlechtern $5\frac{1}{3}$ Loth, und von dem beſſern $10\frac{2}{3}$ Loth genommen werden müſſen.

§. 395. Achtes Exemp. A————————C. Es geht ein Bote von A nach C, welches 80 Meilen weit ſeyn ſoll, und leget jeden Tag 6 Meilen zurück, nach Verfließung von 4 Tagen wird ihm ein anderer zu Pferde nachgeſchickt, der alle Tage 10 Meilen zurückleget, es iſt die Frage, in wieviel Tagen er den erſten einholen wird.

Aufloͤſung. Auch bey dieſem Exempel muß man die Regel Detri anwenden. Es ſeyn die Tage, in welchen ihn der zweyte einholet, =x. Nun war der erſte Bote ſchon 4 Tage gegangen, und da er in jedem Tage 6 Meilen gehet, ſchon 4 . 6 oder 24 Meilen voraus. Während der x Zeit, daß ihn der zweyte einholet, gehet er doch aber auch noch fort, und da er einen Tag 6 Meilen gehet, ſo wird er in x Tagen 6x Meilen gehen, denn 1 Tag : 6 Meilen = x Tage : 6x Meilen, alſo der ganze Weg des erſten Boten, ehe er eingeholet wird, iſt 24 + 6x Meilen. Der zweyte reitet in einem Tage 10 Meilen, alſo in x Tagen 10x Meilen. Und weil er alsdenn den erſten eingeholet hat ſo müſſen ihre Wege gleich ſeyn.

Alſo

Alſo es muß $24 + 6x = 10x$

$$24 = 10x - 6x = 4x$$

$$\frac{24}{4} = x$$

oder $6 = x$

in 6 Tagen wird er ihn einholen, und alſo der ganze Weg wird 60 Meilen ſeyn, von dem Orte, wo ſie beyde ausgiengen.

Anmerkung. Wenn man die Tagreiſe des erſten Boten $= a$ nennet, des zweyten $= b$, die Zeit, die der erſte voraus iſt, $= c$ ſetzet, ſo iſt des erſten Boten Weg, erſtlich $= ca$ und noch ax, denn c Tage war er voraus, und x Tage gieng er noch. Des zweyten Boten Weg iſt alsdenn $= bx$, und alſo, da beyde Wege gleich:

$$ac + ax = bx$$

$$ac = bx - ax = (b - a)x$$

$$\frac{ac}{b - a} = x$$

Dieſes x iſt nun die Zeit, da er ihn einholet. Geſetzt, es wäre die Zeit, da er ihn einholen ſollte, beſtimmet, alſo x gegeben, und man wollte wiſſen, wie viel Meilen der andere Bote täglich machen müßte, um den erſten einholen zu können, ſo iſt alſo x bekannt, und b wird geſucht, welches ſchon aus dieſer Gleichung ſich finden läßt.

Denn wenn $\frac{ac}{b-a} = x$

——————— . b − a.

$ac = bx - ax$

——————— die ax herüber

$ac + ax = bx$

———————

oder $(c + x)a = bx$

——————— : x

$\frac{(c + x)a}{x} = b$

oder auch da hier $ac + ax = bx$

——————— : x

$\frac{ac + ax}{x} = b$

———————

$\frac{ac}{x} + a = b.$

Alſo in dem vorigen Exempel, da $a = 6$, $c = 4$, und $x = 6$ iſt, alſo b die Tagreiſe des zweyten Boten, welche geſucht wird. Sie muß, wenn unſere Rechnung richtig iſt, = 10 ſeyn. Aber $\frac{6.4}{6} + 6 = 10$, welches die allgemeine Formel in Werthen iſt. Man wird nach einiger Ueberlegung bald finden, daß ſich bey dieſem Exempel noch viele Umſtände verändern oder anbringen ließen.

§. 396. Neuntes Exempel. Ein Kaufmann verzehret alle Jahr in ſeiner Haushaltung 100 Ldor, und verdienet doch ſo viel, daß er das

übrige

übrige Vermögen um den dritten Theil deſſelben vermehret. Nach drey Jahren beym Durchſehen ſeiner Bücher iſt er nochmal ſo reich als im Anfange. Wie viel hat er im Anfange gehabt, und wie viel hat er jetzt?

Auflöſung. Ohngeachtet dieſes Problem eben nicht ſehr ſchwer iſt, ſo hat es doch viele Umſtände, ehe man die Gleichung bekömmt, darum wollen wir die Bedingungen deſſelben Schritt vor Schritt verfolgen, dies wird uns bey Auflöſung der Gleichungen ſehr nützlich ſeyn.

Es wird gefraget, wie ſtark das Vermögen des Kaufmanns im Anfange geweſen ſey? Das iſt uns unbekannt, es ſey alſo $= x$ Ldor, er nimmt nun davon im Anfange des erſten Jahrs 100 Ldor, er hat alſo noch $x - 100$, er vermehret dieſen Reſt um ein Drittel, das Drittel von $x - 100 = \frac{x - 100}{3}$, er hat alſo nach dem erſten Jahre zuſammen $x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ unter einerley Benennung gebracht $= \frac{3x - 300 + x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$, davon nimmt er im Anfange des zweyten Jahrs wieder 100 Ldor, und hat alſo noch $\frac{4x - 400}{3} - 100$ das unter einerley Benennung $= \frac{4x - 400 - 300}{3} = \frac{4x - 700}{3}$. Dieſen Reſt vermehret er wieder

um $\frac{1}{3}$. Der dritte Theil hievon iſt $\frac{4x-700}{3} \cdot \frac{1}{3}$ $= \frac{4x-700}{9}$. Er hatte alſo am Ende des zweyten Jahrs zuſammen $\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9}$, unter einerley Benennung $= \frac{12x-2100+4x-700}{9}$ $= \frac{16x-2800}{9}$ Davon nimmt er im Anfange des dritten Jahrs wieder 100 Ldor. Er hat alſo noch $\frac{16x-2800}{9} - 100$, unter einerley Benennung $= \frac{16x-2800-900}{9} = \frac{16x-3700}{9}$ Dieſen Reſt vermehret er im dritten Jahre wieder um $\frac{1}{3}$. Ein Drittel von dieſem Reſt iſt $\frac{16x-3700}{27}$. Er hat alſo am Ende des dritten Jahrs $\frac{16x-3700}{9}$ $+ \frac{16x-3700}{27}$, unter einerley Benennung $= \frac{48x-11100+16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$. Das iſt ſein Vermögen am Ende des dritten Jahrs. Nach der Aufgabe ſoll dieſes nun nochmal ſo viel ſeyn, als er im Anfange hatte. Da

hatte

hatte er aber x, alſo muß dieſes =2x ſeyn. Daher folgt nun die Gleichung.

$$\frac{64x-14800}{27}=2x \quad \cdot 27$$

$$64x-14800=54x$$

$$64x=54x+14800$$

$$64x-54x=10x=14800 \quad :10$$

$$x=\frac{14800}{10}=1480$$

Alſo 1480 Ldor hat er im Anfange gehabt, und da er nach drey Jahren zweymal ſo viel hatte, ſo hat er alsdenn gehabt 2960 Ldor.

§. 397. Zehntes Exempel. Eine Dame hat eine große runde Perle, die 150 rthl. werth iſt, ſie hat dabey eine diamantene Halsſchleiſe, und einen Coulant. Hängt ſie die Perle an die Halsſchleiſe, ſo iſt dieſes Kleinod nebſt der Perle ſiebenmal ſo viel werth, als der Coulant alleine. Hängt ſie ſelbige an den Coulant, ſo iſt er dreymal ſo viel werth als die Schleiſe alleine. Es iſt die Frage, wie viel iſt jedes, ſowol die Schleiſe als der Coulant werth geweſen?

Auflöſung. Es ſey der Werth der Halsſchleiſe =x Thaler, ſo iſt ſie, wenn die Perle daran hängt, werth x+150 rthl., da dieſes ſiebenmal ſo viel ſeyn ſoll, als der Coulant alleine, ſo muß der Coulant nur den ſiebenten Theil hievon werth

 ſeyn,

ſeyn, alſo ſein Werth iſt $\frac{x + 150}{7}$. Hängte man nun die Perle an den Coulant, ſo wäre deſſen Werth $\frac{x + 150}{7} + 150 = \frac{x + 150 + 1050}{7}$ $= \frac{x + 1200}{7}$, und dann wäre er dreymal ſo viel werth als die Schleife, nach der Aufgabe alſo wäre er alsdenn 3x werth. Hier haben wir nun zwey Werthe für den Coulant, die einander gleich ſind, und woraus ſich x oder der Werth der Schleiſe finden läßt.

$$\text{Alſo } \frac{x + 1200}{7} = 3x$$

$$\overline{} \cdot 7$$

$$x + 1200 = 21x$$

$$\overline{} \text{ das eine x herüber gebracht.}$$

$$1200 = 21x - x = 20x$$

$$\overline{}$$

$$\tfrac{1200}{20} = 60 = x$$

Die Schleiſe iſt alſo 60 rthlr. werth, und der Coulant, der $\frac{x + 150}{7}$ werth war, iſt, für x das gefundene ſubſtituiret, $\frac{60 + 150}{7} = \frac{210}{7} = 30$ Thaler werth. Wenn alſo die Perle an der Schleiſe hieng, ſo war beydes $60 + 150 = 210$ rthlr. werth, welches eben 7 . 30 iſt, alſo ſiebenmal ſo viel

viel als der Werth des Coulants, und hieng ſie an den Coulant, ſo war er 30 + 150 = 180 rthlr. werth, welches eben 3 . 60 oder dreymal ſo viel als der Werth der Schleifeiſt. Die Aufgabe iſt alſo aufgelöſet.

Wir wollen noch ein Paar Exempel mit Umſtänden hinzufügen. Ein Herr verſpricht ſeinem Bedienten für das erſte Jahr 40 rthlr. Lohn und in jedem folgenden Jahre 10 rthlr. mehr. Auch ſoll er noch ein Weihnachtsgeſchenk haben, das auch in jedem folgenden Jahre um 2 rthlr. beſſer seyn ſoll. Nach 5 Jahren ſchaft er ihn ab, weil er ihn nicht mehr erhalten kann. Unter der Zeit hat der Bediente 100 rthl. aufgenommen, und 235 rthlr. hat er noch zu fordern. Es wird gefragt 1) was beträgt in dieſen 5 Jahren das Lohn, 2) was beträgt das Weihnachtsgeſchenk? Da der Bediente überhaupt verlangen konnte 100+235 thl. = 335 rthlr., wie aus obigem erhellet, und ſein Lohn laut Bedingung 40 + 50 + 60 + 70 + 80 = 300 rthlr beträgt, ſo müſſen die Weihnachtsgeſchenke in den noch reſtirenden 35 rthlr. ſtecken. Es ſey alſo das Weihnachtsgeſchenke x, ſo iſt laut Bedingung folgende Reihe von Weihnachtsgeſchenken

$$x \quad x+2 \quad x+4 \quad x+6 \quad x+8 = 5x+20 = 35$$

$$5x = 35 - 20 = 15$$

$$x = \tfrac{15}{5} = 3 \text{ rthlr.}$$

Das wäre der Werth des 1ten 3 rthl.
des 2ten 5 "
des 3ten 7 "
des 4ten 9 "
des 5ten 11 "

35 rthl.

Einem Bedienten werden jährlich 35 rthl. Lohn, und jährlich eine Livree verſprochen. Weil er ein Taugenichts iſt, jägt ihn der Herr nach 5 Monaten weg, giebt ihm keinen Lohn, läßt ihn aber die Livree, wie hoch hat er die gerechnet?

Der Kerl mußte jährlich haben, wenn die Livree fur x rthl. angeſchlagen wird, $x+35$ rthl. und nach 5 Monaten alſo: 12 M. : 5 Monat $= x+35 : \left(\frac{x+35}{12}\right)5 = \frac{5x+175}{12}$, das muſte er nach 5 Monaten zuſammen haben. Da er nun die Livree nur bekommen hat, ſo muß die Livree ſo viel werth ſeyn, das iſt nun x

Alſo $\frac{5x+175}{12} = x$

$\quad \cdot 12$

$5x+175 = 12x$

$175 = 12x - 5x = 7x$

$\frac{175}{7} = x = 25$ rthl., ſo viel hat die Livree gekoſtet.

Es thut jemand eine Erbſchaft an Silbergeſchirr, Juwelen, Linnen und baarem Gelde, alles zu-

zuſammen beträgt 1800 rthl. Nun ſind die Juwelen 3mal ſo viel werth als das Silbergeſchirr, das baare Geld iſt 30 rthl. weniger an Werth, als die Hälfte des Werths des Silbergeſchirrs und der Juwelen zuſammen, und das Linnen iſt um 10 rthl. weniger werth als die Hälfte des baaren Geldes. Gefragt, was jedes werth ſey?

Wir ſehen nach einiger Ueberlegung, daß es am beſten ſey, mit dem Silbergeſchirr anzufangen. Alſo nach den Bedingungen der Aufgabe. Das Silbergeſchirr x rthl., da die Juwelen 3 mal ſo viel Werths, ſo iſt ihr Werth 3x rthl. Da das Geld 30 rthl. weniger als der Werth der Hälfte beyder vorhergehenden zuſammen, ſo iſt ſein Werth $\frac{x+3x}{2} - 30 = \frac{4x}{2} - 30 = 2x - 30$, und das Linnen 10 rthl. geringer iſt als die Hälfte des baaren Geldes, ſo iſt ſein Werth $= \frac{2x - 30}{2} - 10 = x - 15 - 10 = x - 25$.

Nun der Werth von allen

$$x+3x+2x-30+x-25=1800$$

oder beſſer geordnet

$$7x - 55 = 1800$$

$$7x = 1800 + 55 = 1855$$

$$x = \frac{1855}{7} = 265 \text{ rthl.}$$

alſo das Silbergeſchirr werth $= x = 265$ rthlr.
die Juwelen $3x = \quad = 795$ „
das baare Geld $2x - 30 = 530 - 30 = 500$ „
das Linnen $x - 25 = 265 - 25 = 240$ „

1800 rthlr.

Ein Fleiſcher kauft 3 Ochſen, der 2te Ochſe koſtet 12 rthlr. mehr als der erſte, und der dritte koſtet 2 rthlr. mehr als der 2te, alle 3 Ochſen zuſammen wägen Hakenreine 1789 Pfund. Nach der Berechnung findet ſich, beym erſten Ochſen hat er $16\frac{1}{2}$ Pfund für einen Thlr., beim 2ten $14\frac{5}{6}$ ℔ für einen Thlr. beym 3ten $15\frac{1}{4}$ ℔ für einen Thlr., gefragt, was hat jeder Ochſe gekoſtet und was hat jeder gewogen? Der wohlfeilſte war der erſte, ſein Preis ſey $= x$, ſo koſtet der 2te $x + 12$ und der 3te $x + 14$.

Erſt vom erſten Ochſen folgende Proportion, woraus ſich nachher ſein Gewicht finden wird. 1 rthlr. : $16\frac{1}{2}$ ℔ $= x$ rthlr. : $\frac{33x}{2}$ ℔, vom 2ten Ochſen 1 rthlr. : $14\frac{5}{6}$ ℔ $= x + 12$ rthl. : $\frac{89x + 1068}{6}$
$\frac{89}{6}$

vom 3ten 1 rthl. : $15\frac{1}{4}$ ℔ $= x + 14$ rthl. : $\frac{61x + 854}{4}$
$\frac{61}{4}$

alſo

alſo ſämmtliches Gewicht

$$\frac{33x}{2}+\frac{89x+1068}{6}+\frac{61x+854}{4}=1789 \quad .2$$

$$33x+\frac{89x+1068}{3}+\frac{61x+854}{2}=3578 \quad .3$$

$$99x+89x+1068+\frac{183+2562}{2}=10734 \quad .2$$

$$198x+178x+2136+183x+2562=21468$$

$$559x+4698=21468$$

$$559x=21468-4698=16770$$

$$x=\frac{16770}{559}=30.$$

Der erſte Ochſe 30 rthlr., der 2te 42 rthlr., der 3te 44 rthlr.

der erſte hat gewogen $\frac{33x}{2}$ ℔ $=\frac{33\cdot30}{2}=495$ ℔

der andere $\frac{89x+1068}{6}=\frac{89\cdot30+1068}{6}=623$ ℔

der dritte $\frac{61x+854}{4}=\frac{61\cdot30+854}{4}=671$ ℔

§. 398. Wir haben bey der Auflöſung dieſer Aufgaben allezeit eine Antwort mit ſolchen Zeichen

chen nun auf die Art bekommen, als wir erwarten konnten. Es können aber auch Aufgaben gegeben werden, wo ſolche Antwort nicht kömmt, oder auch nicht mit ſolchen Zeichen, als man vermuthen konnte, und hat man vorher richtig gerechnet, ſo iſt das eine Anzeige, daß die Aufgabe unter den angegebenen Bedingungen unmöglich ſey, ſie kann aber oft möglich gemacht werden, wenn man die Bedingungen ändert. Z. E. Man ſoll 32 in zwey Theile theilen, und zwar auf die Art, daß, wenn man den größern Theil mit 8 dividire, und den kleinern mit 6, beyder Theile Quotienten zuſammen 4 ausmachen. Wir wollen den größern Theil $= x$ ſetzen, ſo iſt der kleinere $= 32 - x$, der größere Theil ſoll durch 8 dividiret, alſo $\frac{x}{8}$ ſeyn, und der kleinere $32 - x$ ſoll durch 6 dividiret werden, alſo $\frac{32-x}{6}$ ſeyn; beyder Quotienten ſollen $= 4$ ſeyn. Alſo die Gleichung:

$$\frac{x}{8} + \frac{32 - x}{6} = 4 \quad \cdot 8$$

$$x + \frac{256 - 8x}{6} = 32 \quad \cdot 6$$

$$6x + 256 - 8x = 192$$

$$6x - 8x = 192 - 256$$

$$-2x = -64 \quad \text{alſo auch}$$

$$2x = 64$$

$$x = 32$$

Alſo die große Zahl wäre ſchon 32, und da die kleine 32−x, ſo wäre ſie alſo 32 − 32 = 0, folglich wäre gar keine kleine Zahl, es ſoll aber eine da ſeyn, alſo iſt die Aufgabe auf die gegebene Art unmöglich.

§. 399. Es kömmt aber auch öfters vor, daß auch in einer Aufgabe vom erſten Grade zwey, drey oder auch mehr unbekannte Größen vorkommen, welche man finden ſoll. Iſt die Frage durch die Bedingungen derſelben gehörig beſtimmt, ſo muß man bey dieſen Aufgaben aus der Frage ſo viel Gleichungen herleiten können, als man unbekannte Größen ſuchet, und dabey muß keine der unbekannten Größen mit einander multipliciret ſeyn, weil man ſonſt keine einfache Gleichungen

mehr

mehr erhält, wenn ſich auch die Frage auflöſen läßt. Man gebraucht dabey verſchiedene Methoden, man löſet ſie auf, indem man, wenn man den Werth der einen unbekannten gefunden, man ihn in den andern Gleichungen ſubſtituiret. Oder auch, wenn man aus zwey Gleichungen den Werth für eine unbekannte Größe gefunden, man dieſe beyden Werthe nun zu einer neuen Gleichung macht. Oder man kann auch manchmal ein Paar Gleichungen addiren oder ſubtrahiren, und dadurch oft ganz geſchwind ſeinen Endzweck erreichen, welches bey den andern Arten gemeiniglich viel weitläuftiger iſt. Exempel werden dieſes, was wir geſagt haben, ganz gut erläutern, deren wir aber, um nicht zu weitläuftig zu werden, nur einige geben wollen.

§. 400. Wenn zwey unbekannte Größen in der Aufgabe ſind. Erſtlich die bekannte und nützliche Aufgabe. Es ſind von zwey Zahlen die Summe und die Differenz gegeben, man ſoll die Zahlen ſelbſt finden. Die beyden Zahlen ſollen x und y heißen, weil ſie unbekannt ſind, und zwar die große Zahl x und die kleine y. Ihre Summe iſt gegeben, ſie ſey $= a$, auch ihre Differenz, ſie ſey $= b$. Daraus kann man nun folgende zwey Gleichungen machen: alſo $x+y=a$ und $x-y=b$. Dieſe wollen wir nach den verſchiedenen Wegen auflöſen.

1) Durch die Subſtitution eines gefundenen Werths einer unbekannten Größe in die andere Gleichung, alſo $x+y=a$. Dieſen Werth für x

$$x=a-y$$

ſetze

ſetze man in die andere Gleichung $x-y=b$; anſtatt des x, und die wird alſo werden

$$a-y-y=b$$

oder $a-2y=b$

die $2y$ auf die andre Seite $a=b+2y$

die b herüber gebracht $a-b=2y$

$$2:\quad \frac{a-b}{2}=y$$

Da man y weiß, ſo weiß man auch x, denn weil laut der erſten Gleichung $x=a-y$, ſo darf man für y nur das ebengefundene ſubſtituiren, ſo wird $x=a-\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{2a-(a-b)}{2}=\frac{2a-a+b}{2}$ $=\frac{a+b}{2}$. Alſo die große Zahl $x=\frac{a+b}{2}$, und die kleine oder $y=\frac{a-b}{2}$.

2) Daß man aus jeder Gleichung den Werth eben derſelben unbekannten Größe ſucht, und ſie als eine neue Gleichung anſiehet. Dieſer Weg iſt der natürlichſte, man bekömmt in der zweyten Gleichung nur alsdenn eine unbekannte Größe. Alſo $x+y=a$. Ferner $x-y=b$, beyde Werthe für x ſind doch gleich.

$$x=a-y \qquad x=y+b$$

Alſo:

Alſo $a - y = b + y$

$$a = b + 2y$$
$$a - b = 2y$$
$$\frac{a - b}{2} = y$$

Und x auf die Art zu finden:

$x + y = a$ ferner $x - y = b$

$y = a - x$ $\quad -y = b - x$

$x - b = + y$

Folglich iſt wieder $a - x = x - b$

$$a = 2x - b$$
$$a + b = 2x$$
$$\frac{a + b}{2} = x$$

3) Durch die Addition der Gleichungen, die hier gut angehet.

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$
$$2x = a + b$$
$$x = \frac{a + b}{2}.$$

Wollte man y finden, ſo müßte es durch die algebraiſche Subtraktion ſeyn.

$x + y$

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$
$$+ \quad -$$
$$2y = a - b$$
$$y = \frac{a - b}{2}$$

Wir ſehen auf alle Fälle. Die große Zahl x iſt die halbe Summe plus der halben Differenz, und die kleine Zahl die halbe Summe minus der halben Differenz. Wir haben bey dieſem Exempel nur alle verſchiedene Methoden zeigen wollen. Dieſes Exempel in Zahlen. Die Summe zweyer Zahlen ſey 24, ihre Differenz $= 6$, was werden die Zahlen ſeyn? Hier iſt $a = 24$ und $b = 6$, alſo $x = \frac{24 + 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$, und $y = \frac{24 - 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$. Alſo die große Zahl 15, und die kleine 9.

§. 401. Ein anderes Exempel. Zwey Leute haben jeder eine gewiſſe Anzahl Aepfel in ihren Tragkörben, man frägt den einen, wie viel ſie beyde haben, dieſer antwortet, wenn man von meinen Aepfeln 100 nehme, und zu meines Cameraden ſeinen legte, ſo wären in ſeinem Tragkorbe dreymal ſo viel als in meinem; nähme man aber von ſeinem Haufen 100, und legte ſie zu meinem, ſo wäre in beyden Tragkörben gleich viel.

Auflöſung. Hier ſind zwey unbekannte Größen, aber auch zwey Gleichungen dafür, da keine unbekannte Größe mit der andern multipliciret iſt.

In dem erſten Tragkorbe ſollen x Aepfel, und in dem zweyten y Aepfel ſeyn. Nimmt man von dem erſten Haufen 100 Aepfel, ſo ſind da noch x − 100, nun wären die zu des Cameraden Aepfel geleget, ſo werden das y + 100. Dieſe ſollen aber dadurch dreymal ſo viel geworden ſeyn, als des andern ſeine nun ſind. Alſo es muß ſeyn y + 100 = (x − 100) . 3 = 3x − 300, das iſt die erſte Gleichung. Ferner, wenn man von den y Aepfeln 100 nehme, ſo wären das y − 100, die zu den x Aepfeln zugelegt, wäre x + 100, alsdenn ſollen aber laut der Aufgabe beyde Haufen gleich ſeyn. Alſo y − 100 = x + 100. Wir haben alſo zwey Gleichungen. y + 100 = 3x − 300 und y − 100 = x + 100. Dieſes Exempel läßt ſich leicht durch die Subtraktion beyder Gleichungen auflöſen, man ſiehet gleich, daß alsdenn das y aus den Gleichungen wegkömmt.

Alſo: $y + 100 = 3x - 300$
und $y - 100 = x + 100$
$\quad + \qquad\quad -$
ſubtrah.
iſt alsdenn $+ 200 = 2x - 400$

$$200 + 400 = 600 = 2x$$

$$\frac{600}{2} = 300 = x.$$

Nun anſtatt des x in einer der Gleichungen den Werth davon geſetzet, ſo hat man y. Es ſey in der letzten y − 100 = x + 100.

Alſo

Alſo: $\underline{y - 100 = 300 + 100 = 400}$

$y = 400 + 100 = 500$

Alſo in dem einen Tragkorbe, wo die x Aepfel waren, befanden ſich 300, und in dem andern 500 Aepfel. Nimmt man auch von den 300 hundert weg, und legt ſie zu den 500, ſo ſind da dreymal ſo viel, weil $600 = 200 . 3$ iſt. Nimmt man von den 500 ein hundert weg, und legt ſie zu den andern, ſo werden beyder Anzahl gleich, und beydes forderte die Aufgabe.

§. 402. Wenn drey unbekannte Größen in einer Gleichung auch nur vom erſten Grade ſich befinden, und man kann alsdenn aus der Aufgabe drey Gleichungen herleiten, ſo läßt ſie ſich allerdings auf die gezeigte Arten auflöſen, obſchon ihre Auflöſung alsdenn wegen der vielen Gleichungen mühſam wird, und man daher leicht in Gefahr ſtehet ſich zu verrechnen. Sie kommen ſo häufig nicht vor. Wir wollen doch eine leichtere auflöſen, welche für dieſe erſte Gründe genug ſeyn mag. Eine weitere und längere Uebung, und die Leſung guter Schriften lehret manche Kunſtgriffe, die Rechnung zu verkürzen, welches man, wenn mehr unbekannte Größen als drey vorkommen, noch mehr nöthig hat, von denen wir aber hier nicht reden wollen.

§. 403. Exempel: Man ſoll drey Zahlen finden, die ſo beſchaffen ſind, daß die Summe der erſten und zweyten Zahl $= a$, die Summe der erſten und dritten $= b$, die Summe der zweyten und dritten $= c$ iſt, welches ſind die Zahlen?

Aufloͤſung: Sie moͤgen x, y und z ſeyn. Nach der Aufgabe iſt die Summe der erſten und zweyten, alſo $x + y = a$, ferner die Summe der erſten und dritten, alſo $x + z = b$, und die Summe der zweyten und dritten oder $y + z = c$. Man hat alſo folgende drey Gleichungen:

$$x + y = a$$
$$x + z = b$$
$$y + z = c.$$

Dieſes iſt nun noch ziemlich leicht aufzuloͤſen, und kann man hier durch die Addition und Subtraktion etwas ausrichten.

Wir wollen erſtlich die zweyte von der erſten ſubtrahiren, alſo:

$$x + y = a$$
$$x + z = b$$

ſubtrahiret

$$y - z = a - b$$

hiezu wollen wir die 3te add. $y + z = c$

$$2y = a + c - b.$$

Nun haben wir eine Gleichung bekommen, in welcher nur eine unbekannte Groͤße iſt. Alſo:

$$\frac{2y = a + c - b}{y = \frac{a + c - b}{2}}$$

Nun kann man dieſen fuͤr y gefundenen Werth in die erſte oder in die dritte Gleichung ſtatt y ſubſtituiren, ſo bekoͤmmt man x und z.

Die

Die erſte Gleichung wird alsdenn:

$$x + \frac{a+c-b}{2} = a$$

$$\text{———————— } . \, 2$$

$$2x + a + c - b = 2a$$

$$2x = 2a - a - c + b$$

oder $2x = a - c + b$

$$\text{———————— } : 2$$

$$x = \frac{a-c+b}{2}$$

Die dritte Gleichung wird alsdenn:

$$\frac{a+c-b}{2} + z = c$$

$$\text{———————— } . \, 2$$

$$a + c - b + 2z = 2c$$

$$2z = 2c - c - a + b = c - a + b$$

$$\text{———————— } : 2$$

$$z = \frac{c-a+b}{2}.$$

Exempel in Zahlen: es ſey nun $x + y = 16$
$x + z = 24$
$y + z = 32$

Alſo $a = 16$; $b = 24$; $c = 32$, ſo wird nach den gefundenen allgemeinen Werthen für die unbekannten Größen:

$$y = \frac{16 + 32 - 24}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

$$x = \frac{16 - 32 + 24}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$z = \frac{32 - 16 + 24}{2} = \frac{40}{2} = 20.$$

Es iſt alſo: $x + y = 4 + 12 = 16$
$x + z = 4 + 20 = 24$
$y + z = 12 + 20 = 32$

Wir beſchließen hiemit die Gleichungen vom erſten Grade, bei welchen allerdings noch ſehr viel zu bemerken und zu lernen iſt, was wir aber hier nicht vortragen dürfen.

Das zwanzigſte Kapitel.

Von den Gleichungen vom zweyten Grade, ſowol den reinen als den unreinen Gleichungen.

§. 404. Gleichungen vom zweyten Grade oder quadratiſche Gleichungen ſind ſolche Gleichungen, darin die unbekannte Größe ſich in der zweyten Potenz befindet, ſie mag nun alleine in dieſer Potenz ſich befinden, oder es mag auch eben die unbekannte Größe in der erſten Potenz ein

oder

oder etlichemal mit in der Gleichung ſeyn, ſie mag ſich mit einem Coefficienten oder ohne demſelben in der Gleichung befinden, oder ſtehen wo ſie will. Wenn die höchſte Potenz der unbekannten Größe in der zweyten Potenz ſtehet, ſo heißt ſie eine quadratiſche Gleichung, oder eine Gleichung vom zweyten Grade. Z. E. $x^2 = 3a + b$ oder $3x^2 - c = 5ab + \frac{d}{2}$, oder $x^2 - px = 3pq - \frac{3}{4}d$, oder $5x^2 - 3px + qx = 2cx + d$ ſind alles quadratiſche Gleichungen.

§. 405. Es gilt bey den quadratiſchen Gleichungen vieles, was wir von den Gleichungen vom erſten Grade bemerket haben, und was wir daher nicht nöthig haben weitläuftig zu wiederholen, ſondern nur anzeigen dürfen. Es kömmt allerdings erſtlich vorzüglich darauf an, daß man nach den Bedingungen der Aufgabe die Gleichung aufſetzet, da es ſich denn bald zeiget, ob es eine Gleichung vom erſten, vom zweyten oder von mehrern Graden iſt. Man ſchließet alſo darüber, um ſie aufzuſetzen, wie wir bey den Gleichungen vom erſten Grade durch Exempel gezeiget haben, und wie wir auch bey dieſen durch Exempel zeigen werden. Man muß ferner die Glieder, worin die unbekannte Größe vorkömmt, auf eine Seite bringen, und die Glieder, die nur bekannte Größen enthalten, auch auf eine, welches, wie bekannt iſt, durch die Addition und Subtraktion, oder vielmehr ganz leicht durch die Veränderung der Zeichen geſchiehet.

Hätte man z. E. die Gleichung $3x^2+5xc-c=15x+q$ ſo müſte man die Gleichung ſo ſetzen:

$$3x^2+5xc-15x=q+c.$$

Man kann auf die Art nicht nur die bekannten und unbekannten Glieder auf eine Seite bringen, ſondern auch wenn man will, auf die eine Seite gar null hinbringen, welches heißt, die Gleichungen auf 0 bringen, und welches oft ſehr nützlich iſt, und vorzüglich bey Gleichungen von höherer Art erfordert wird, wie wir unten zeigen werden. Wenn man z. E. dieſe Gleichung $3x^2+5cx-15x=q+c$ auf 0 bringen wollte, ſo ſetzet man $q+c$ nur mit entgegengeſetzten Zeichen herüber. Denn wenn man auf beyden Seiten $-q-c$ addiret, ſo kömmt es auf der einen Seite unter dem Minuszeichen zu ſtehen, und auf der andern Seite kömmt 0. Z. E. $3x^2+5cx-15x=\quad q+c$

addirt $\qquad -q-c=-q-c$

$$3x^2+5cx-15x-q-c=0$$

Wenn man ferner auf der einen Seite noch ſo viele x^2 hätte, und auch noch ſo viele x, die mit oder ohne Coefficienten wären, und deren Zeichen auch beſchaffen wären, wie ſie wollten, ſo gienge es doch leicht an, und es muß auch geſchehen, daß man nun ein x^2 und ein x bekäme, denn man darf ja nur in den verſchiedenen Gliedern das x^2 oder x als den gemeinſchaftlichen Faktor anſehen, und die Glieder in Klammern zuſammen ſetzen, dahinter man den gemeinſchaftlichen Faktor von x^2 oder x ſetzet. Eben ſo wird man, wenn man auch noch ſo viel Glieder von bekannten Größen hat, dieſelbe

nur als ein Glied betrachten dürfen, weil man ſie durch die Addition oder Subtraktion ja zu einem Gliede machen kann. Man hätte die Gleichung $3x^2 + 6cx - x = x^2 + 5ax - c + dn$, ſo wäre das $= 3x^2 - x^2 + 6cx - 5ax - x + c - dn = 0$, und dieſes $= (3-1)x^2 + (6c - 5a - 1)x + c - dn = 0$. $= 2x^2 + (6c - 5a - 1)x + c - dn = 0$.

Weil nun die letzten bekannten Glieder doch auf alle Fälle durch die Addition oder Subtraktion zu einem Gliede gemacht werden können, ſo wollen wir dieſes einmal allgemein $= q$ nennen, alſo hier ſtatt $c - dn$ die q ſetzen, und die Gleichung könnte denn ſo geſchrieben werden:

$$2x^2 + (6c - 5a - 1)x \pm q = 0.$$

Wir haben $\pm q$ geſetzet, das heißt, dem q zwey verſchiedene Zeichen gegeben, um dadurch anzuzeigen, daß das letzte Glied eine Plus- oder Minusgröße ſeyn kann, und man wird nach einer kurzen Ueberlegung bald einſehen, daß das auch durch die Addition oder Subtraktion der bekannten Größen würklich geſchehen kann. Ferner wird man leicht begreifen, daß die Coefficienten der unbekannten Glieder, wenn man ſie auf die eben gezeigte Form gebracht hat, auch als eine Größe können angeſehen werden. Denn z. E. hier $6c - 5a - 1$, das lauter bekannte Dinge ſind, werden ja als eine Größe betrachtet werden können, die entweder eine Plus- oder Minusgröße iſt. Gleichfalls, wenn ein oder mehr x^2 Coefficienten haben, ſo kann man dieſe auch als eine Größe betrachten, (die wir aber aus gleich anzuzeigenden Gründen immer als $+$ anſehen wollen). Nun wollen wir das, was

aus den verſchiedenen Coefficienten des x^2 entſtehen kann, wenn die Coefficienten zu einer Größe durch die Addition oder Subtraktion gebracht werden, = a nennen, was durch die Coefficienten des x entſtehen kann, = b ſetzen, und die bekannten Größen zuſammen, = q nennen. So werden alſo alle mögliche quadratiſche Gleichungen, wenn ſie auf Null gebracht ſind, alſo ausſehen können:

$$ax^2 \pm bx \pm q = 0.$$

Wir haben bey den Coefficienten des x^2 eine poſitive Größe geſetzt, weil man das allezeit unter das Pluszeichen ſetzet. Denn geſetzt, es machten die verſchiedenen Coefficienten der verſchiedenen x^2, wenn ſie zu einem würden, das Minuszeichen, ſo darf man nur x^2 auf die andere Seite bringen, und die andern Größen auch. Alsdenn verändern ſie alle ihr Zeichen, und x^2 bekömmt alsdenn das Pluszeichen. Es iſt nöthig, das x^2 das Pluszeichen bekömmt, wegen nachheriger Ausziehung der Wurzel, wenn man die Gleichung auflöſet.

Z. E. Man hätte $4 - 3x^2 = 5x - 6$, das gäbe die Glieder, wo ſich x^2 mit befindet, auf die andere Seite gebracht, und die Gleichung auf Null reduciret:

$3x^2 + 5x - 10 = 0$, oder man hätte folgende Gleichung $-5x^2 + 10x - 8 = 0$. ſo wäre das

zu addiret auf beyden Seiten $+5x^2 - 10x + 8 = +5x^2 - 10x + 8$

$$0 = 5x^2 - 10x + 8$$

oder die Zeichen aller Glieder würden nur verwechſelt, um das Zeichen vor x^2 zur Plusgröße zu machen.

§. 406. Die allgemeine Gleichung, wie eine quadratiſche Gleichung ausſehen könnte, war nach dem vorigen Paragraphen $ax^2 \pm bx \pm q = 0$. Es kann der Fall kommen, daß man Gleichungen bekömmt, worin ſich Brüche befinden, ſo kann doch die Gleichung allezeit auf dieſe Form, die nur aus drey Gliedern beſtehet, gebracht werden, wenn auch ſchon die unbekannte Größe ſich in dem Nenner der Brüche befindet.

Man hätte z. E. die Gleichung:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$$

So müßten die Brüche durch die Multiplikation gehoben werden, alſo multipliciret mit cx + d

$$ax+b = \frac{cex^2+fcx+dex+fd}{gx+h} \cdot gx+h$$

$$agx^2 + bgx + ahx + hb = cex^2 + fcx + dex + fd$$

$$agx^2 - cex^2 + bgx + ahx - fcx - dex = fd - hb$$

$$(ag - ce)x^2 + (bg + ah - fc - de)x = fd - hb$$

$$(ag - ce)x^2 + (bg + ah - fc - de)x - fd + hb = 0.$$

Hier ſtellet nun aus der allgemeinen Gleichung $ax^2 \pm bx \pm q = 0$, die $(ag - ce)$ das a vor, die $(bg + ah - fc - de)$ das b, und $- fd + hb$, ſtellet das q vor. Alſo ſind nun die Coefficienten aller Glieder zu ganzen Größen geworden, die

die alle Zahlen, auch 1 bedeuten können. Indeſſen man thut das nicht allezeit, wie wir weiter zeigen werden. Eine ſolche Gleichung, darin nun x^2 und auch x iſt, und noch eine bekannte Größe, wie dieſe ausſiehet, heißet eine vollſtändige quadratiſche Gleichung, ſie heißt auch eine **unreine** quadratiſche Gleichung (adfecta, impura, fehlet aber das mittlere Glied, das nur mit x multipliciret iſt, nemlich hier allgemein das $\pm bx$, alſo daß nur bleibet $ax^2 \pm q = 0$, ſo iſt es eine **reine** quadratiſche Gleichung, (aequato pura). Man könnte ſie zwar auch durch das vorige Chifret vorſtellen, da denn der Coeffient b im zweyten Gliede $= 0$ iſt, alſo das Glied wegfällt. Fehlte die bekannte Größe $\pm q$ in einer Gleichung, und x^2 und x wären mit Coefficienten darinnen, daß ſie ſo ausſähe $ax^2 \pm bx = 0$, ſo wäre es gar nur eine Gleichung vom erſten Grade, denn alsdenn wäre $ax^2 = \pm bx$

————————————dividiret durch x

$$ax = \pm b$$

————————: a

$$x = \pm \frac{b}{a}.$$

§. 407. Der Ausdruck für eine **reine** Gleichung vom zweyten Grade iſt alſo ganz allgemein $ax^2 \pm q = 0$, oder $ax^2 = \pm q$. Weil man aber bey der unbekannten Größe den Coefficienten nicht läßt, und nicht laſſen kann, indem man das x^2 alleine haben will, weil man den Werth für x ſuchet,

chet, ſo ſiehet man gleich, daß man den leicht durch die Diviſion wegſchaffen kann.

$$\text{Alſo: } ax^2 = \pm q$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : a$$
$$x^2 = \pm \frac{q}{a}$$

Statt des Bruchs $\frac{q}{a}$ wollen wir eine andere Größe ſetzen. Indem doch x^2 nicht allezeit einen Coefficienten hat, oder auch, wenn es einen hat, und man durch die Diviſion ihn wegſchaft, er ſo beſchaffen ſeyn kann, daß auf der andern Seite doch eine ganze Zahl kömmt, wenn nemlich die Zahl ſich dadurch theilen läßt, oder wenn das auch nicht iſt, nun $\frac{q}{a}$ ein wirklicher Bruch iſt, ſo können wir ihn doch mit einem Zeichen vorſtellen.

Wir wollen alſo allgemein $\frac{q}{a} = f$ nennen.

Alſo der allgemeinſte Ausdruck für alle quadratiſche reine Gleichungen iſt $x^2 = \pm f$, da f eine ganze Zahl, oder auch ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch verneint und bejaht ſeyn kann. Will man nun ſolche Gleichung auflöſen, oder x finden, ſo muß man aus beyden den $\surd$ ziehen. Der $\surd x^2$ iſt aber $= x$. Alſo iſt hier $x = \surd \pm f$. Hiebey iſt verſchiedenes zu merken.

Erſtlich, wenn die bekannte Größe auf der andern Seite unter dem Pluszeichen ſtehet, ſo läßt ſich nur ein quadratiſcher Radix daraus ziehen, oder der

der $\sqrt{+f}$ iſt nur eine würkliche Größe, weil der $\sqrt{}$ aus einer Minusgröße, oder der $\sqrt{-f}$ eine **unmögliche** oder **imaginäre** Größe iſt, §. 336. Alſo, wenn man auf ſolchen Ausdruck im Calculiren bey quadratiſchen Rechnungen kömmt, ſo iſt das ein Beweis, daß die Aufgabe unmöglich wäre. Z. E. $x^2 = -18$

$$x = \sqrt{-18}$$

das iſt eine unmögliche Größe §. 340. Es bleibet alſo für würklich mögliche quadratiſche **reine** Gleichungen die Formel $x^2 = \sqrt{f}$.

Zweytens muß man bemerken, daß, wenn nun f eine poſitive Größe iſt, doch darum nicht allezeit der $\sqrt{}$ kann völlig ausgezogen werden, ſondern man ſich öfters mit der **Annäherung** bey der Ausziehung begnügen muß. Nur alsdenn kann er würklich völlig ausgezogen werden, wenn f eine würkliche Quadratzahl iſt, die durch die Multiplikation einer ganzen oder gebrochenen Zahl mit ſich ſelbſt entſtanden iſt, alsdenn erhält man einen genauen rationalen Werth für x.

Z. E. $x^2 = 144$ —————— den $\sqrt{}$ aus beyden

$x = \sqrt{144} = 12$. Weil die 144 durch 12 . 12 entſtanden war. Eben ſo:

$x^2 = \frac{16}{25}$

—————— den $\sqrt{}$ aus beyden

$x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

denn $\frac{16}{25}$ war durch $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$ entſtanden.

Allein

Allein $\underline{x^2 = 18}$

$x = \sqrt{18}$ da bekömmt man keinen ratio-nalen Werth, weil ſich $\sqrt{18}$ nicht genau finden läßt. Wir wiſſen, daß, wenn wir den $\sqrt{}$ aus Brüchen ziehen, wir ihn aus Zählern und Nennern ziehen müſſen, da kann es denn nun kommen, daß er bey quadratiſchen Gleichungen ſich würklich aus einem ausziehen läßt, und daß alſo Zähler oder Nenner rational werden, und vor dem andern Theil des Bruchs nur das Wurzelzeichen bleibet, oder man ihn nur durch Näherungen ſuchet.

Z. E. $x^2 = \frac{24}{25}$

——————————den $\sqrt{}$ aus beyden, weil $x = \sqrt{\frac{24}{25}}$ ſich im Nenner der $\sqrt{}$ aus-

oder———————— ziehen läßt.

$x = \frac{\sqrt{24}}{5}$

§. 408. Drittens muß man bemerken, daß, da freylich, weil ſich aus einer negativen Größe kein qua-dratiſcher Radix ziehen läßt, alſo nur für mögliche Gleichungen der reinen quadratiſchen Gleichungen die Formel $x = \sqrt{f}$ bleibet, doch dieſer $\sqrt{f}$ einen poſitiven und negativen Werth erhalten könne. Denn man nehme dieſen $\sqrt{f}$ mit dem $+$ oder $-$ Zeichen, ſo wird doch f allezeit poſitiv werden. Denn $-\sqrt{f} \cdot -\sqrt{f} = +f$ und $+\sqrt{f} \cdot +\sqrt{f}$ auch $= +f$; oder in Zahlen, wenn $x^2 = 49$

ſo iſt $x = \sqrt{49} = 7$

da mag man nun 7 poſitiv oder negativ nehmen, es kommt allezeit durch die Multiplikation mit ſich ſelber 49 heraus. Denn $+7 \cdot +7 = 49$, und

-7

$-7 \cdot -7$ auch $= 49$. Man ſetzet daher für das Wurzelzeichen bey quadratiſchen Gleichungen alle beyde Zeichen, und alſo allgemein $x^2 = f$

$$x = \pm \sqrt{f}$$

welches eine mögliche Gleichung andeutet, und dieſes iſt nun eigentlich die wahre allgemeine Formel für mögliche reine quadratiſche Gleichungen. In vielen Fällen fällt der negative Werth von ſelbſt weg, obſchon manche eine doppelte Auflöſung zulaſſen.

§. 409. Man ſiehet leicht ein, daß, wenn man wollte, man ſich bey der Auflöſung der reinen quadratiſchen Gleichungen der Logarithmen bedienen könnte.

Denn, wenn $x^2 = f$

ſo iſt $2L. x = L. f$ §. 365

$$: 2$$

$$L. x = \frac{L. f}{2}$$

Da man, wenn man L. f durch zwey dividiret, nur alsdenn für den neuen, durch die Diviſion erhaltenen Logarithmen die Zahl aufſucht, man dadurch den Werth für x bekömmt. Man thut dieſes aber eben nicht bey quadratiſchen Gleichungen, ob es ſchon bey reinen Gleichungen von höhern Potenzen recht gut kann gebraucht werden. Wir wollen es durch ein Exempel erläutern.

$$x^2 = 148$$
$$2 L. x = L. 148$$
$$L. x = \frac{L. 148}{2}$$

nun iſt der $L. 148 = \frac{2, 1702617}{2}$
dividiret mit 2

giebt 1,0851308. Dieſen Logarithmen unter den höhern Zahlen aufgeſucht, und dann nach der Charakteriſtik den Werth der Zahlen geſetzet, zeiget, daß die Zahl zwiſchen 12, 16 und 12, 17 falle, das iſt alſo x. Wenn ich nun nach der gewöhnlichen Art verfahre, da $x^2 = 148$

$x = \pm\sqrt{148}$ und den $\sqrt{148}$ ausziehe, der irrational iſt, und alſo nur durch Näherung kann angegeben werden, ſo iſt dieſer Radix oder x = 12, 165.

§. 410. Wir wollen nun dieſe vorgetragenen Lehren mit einigen Exempeln, die mit individuellen Umſtänden begleitet ſind, erläutern, damit man ſehe, wie man ſolche Gleichung aufſetzen müſſe.

Erſtes Exempel: Man ſuche eine Zahl, deren Hälfte mit ihrem vierten Theil multipliciret, und alsdenn von dieſem Produkt 10 abgezogen, 152 zum letzten Facit gäbe.

Auflöſung. Es ſey die Zahl = x, ſo iſt die Hälfte dieſer Zahl = $\frac{x}{2}$ dieſe Hälfte ſoll mit $\frac{1}{4}$ der zu ſuchenden Zahl, alſo mit $\frac{x}{4}$ multipliciret

wer-

werden. Alſo es ſoll multipliciret werden $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4}$, das iſt $\frac{x^2}{8}$, hievon ſoll 10 abgezogen werden, dann bleibt es noch $\frac{x^2}{8} - 10$, und das ſoll alsdenn $= 152$ ſeyn. Nun haben wir die Gleichung

$$\frac{x^2}{8} - 10 = 152$$

$$\frac{x^2}{8} = 152 + 10 = 162 \quad \cdot 8$$

$$x^2 = 162 \cdot 8 = 1296$$

oder wenn der $\sqrt{}$ würklich ausgezogen

$$x = \pm \sqrt{1296}$$

$$x = \pm 36$$

und bey dieſer Zahl trift das auch alles ein, was in den Bedingungen der Aufgabe geſagt war. Denn $\frac{x}{2} = 18$ $\frac{x}{4} = 9$. Alſo 18

$$\frac{9}{162}$$

davon abgezogen 10

$$152$$

§. 411. Zweytes Exempel. Es iſt die Summe zwoer Zahlen gegeben, die $= a$ ſeyn ſoll, es iſt auch die Summe ihrer Quadrate gegeben, die ſoll b heißen, daraus die Zahlen ſelbſt zu finden.

Auflöſung. Im Anfang ſcheinet, als ob in der Aufgabe mehr als eine unbekannte Größe zu ſuchen wäre, aber in der That iſt nur eine zu ſuchen, denn, wenn man eine hat, findet ſich die andere von ſelbſt.

Wir haben §. 400 geſehen, daß, wenn von zwey Zahlen die Summe und die Differenz gegeben iſt, man die Zahlen ſelbſt dadurch finden kann, ſo, daß, wenn a die Summe der Zahlen, und b die Differenz bedeutet, die große Zahl $= \frac{a+b}{2}$ die kleine $\frac{a-b}{2}$.

Hier in dieſer Aufgabe iſt nun erſtlich gegeben, die Summe beyder Zahlen = a, aber nicht die Differenz, die ſoll alſo y ſeyn, alſo die große Zahl wäre $\frac{a+y}{2}$, und die kleine $\frac{a-y}{2}$. Nun iſt ferner die Summe des Quadrats beyder Zahlen gegeben, die war = b. Wir müſſen alſo beyde Werthe für die zu ſuchenden Zahlen, oder die große und kleine Zahl quadriren, und alsdenn addiren, wie die Aufgabe fordert. Aber $\left(\frac{a+y}{2}\right)^2$ $= \left(\frac{(a+y).(a+y)}{4}\right) = \frac{a^2+2ay+y^2}{4}$ und $\left(\frac{a-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a-y).(a-y)}{4}\right) = \frac{a^2-2ay+y^2}{4}$

Alſo, wenn dieſe beyden Quadrate addiret ſind, ſo muß dieſes das uns gegebene b ſeyn.

Man

Man addire ſie

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ay + y^2 \\ a^2 + 2ay + y^2 \\ \hline 2a^2 \quad + 2y^2 \end{array}$$

Alſo $\frac{2a^2 + 2y^2}{4} = b$ oder

$$\frac{a^2 + y^2}{2} = b$$

$$\cdot 2$$

$$a^2 + y^2 = 2b$$

$$y^2 = 2b - a^2$$

$$y = \pm\sqrt{(2b - a^2)}$$

Die große Zahl iſt alſo $\frac{a+y}{2}$, nun, wenn man für y das gefundene mit dem Pluszeichen ſetzet, $= \frac{a + \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$ und die kleine $\frac{a - y}{2}$, hier nun $= \frac{a - \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$. Hier ſiehet man, wie beyde Werthe der Wurzel ſowol plus als minus gebraucht werden.

Exempel in Zahlen hierüber: Wenn die Summe beyder Zahlen = 10 wäre, und die Summe ihrer Quadrate wäre 58; was wären nun die beyden Zahlen? Hier iſt alſo a = 10 und b = 58.

Alſo die große Zahl $= \frac{10 + \sqrt{(2 \cdot 58 - 10^2)}}{2}$

nun die kleine $= \frac{10 - \sqrt{(2 \cdot 58 - 10^2)}}{2}$

oder die große $= \frac{10 + \sqrt{(116 - 100)}}{2}$

$= \frac{10 + \sqrt{16}}{2}$ den $\sqrt{}$ aus 16 ausgezogen

$= \frac{10 + 4}{2} = 7$

und die kleine $\frac{10 - \sqrt{(116 - 100)}}{2} = \frac{10 - \sqrt{16}}{2}$

$= \frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

Von dieſen Zahlen trift auch dieſes ein, denn ihre Summe iſt $3 + 7 = 10$, hier a, die Summe ihrer Quadrate iſt $49 + 9 = 58$, hier $= b$.

§. 412. Drittes Exempel. Eine Geſellſchaft von Kaufleuten haben ein Capital zuſammen geleget, jeder von ihnen hat zehnmal ſo viel Thaler eingeleget, als Perſonen in der Geſellſchaft ſind. Sie gewinnen mit jedem 100 Thlr. noch zweymal ſoviel, als Perſonen in der Geſellſchaft ſind. Wenn man nun den hundertſten Theil des Gewinnſtes mit $2\frac{2}{9}$ multipliciret, ſo kömmt die Anzahl der Perſonen in der Geſellſchaft heraus. Wie viel ſind ihrer geweſen, was haben ſie gewonnen, und was hat jeder eingelegt?

Auf-

Auflöſung. Wenn wir den Gewinſt wüſten, ſo ſiehet man leicht, daß wir auch bald die Anzahl der Perſonen erfahren müßten. Allein ſelbſt der Gewinn hänget, wie man beym Anfange der Aufgabe ſiehet, von der Zahl der Perſonen ab.

Wir wollen alſo hiemit anfangen. Es ſind x Perſonen geweſen, jeder hat 10mal ſoviel Thaler eingeleget, als Perſonen da waren, alſo 10x Thlr. ein jeder. Wie viel ſie nun alle eingelegt haben, folgt aus der gemeinen Regel Detri, denn 1 Perſon: 10x Thlr. = x Perſonen: $10 . x^2$ Thlr. Alſo alle haben eingelegt $10 . x^2$ Thlr. Nun haben ſie mit jeden 100 Thlr. von dieſem Capital zweymal ſo viel gewonnen, als Perſonen in der Geſellſchaft ſind. In der Geſellſchaft ſind x Perſonen, ſie haben alſo von jeden 100 Thlr. gewonnen 2x Thlr. Was ſie nun vom ganzen Capital gewonnen haben, findet ſich wieder durch folgende Proportion.

100 Thlr.: 2x Thaler Gewinnſt, $= 10x^2$ Thlr.: $\frac{10x^2 . 2x}{100} = \frac{20x^3}{100} = \frac{x^3}{5}$, das iſt der ganze Gewinnſt. Den hunderteſten Theil dieſes Gewinnſtes, welcher alſo $\frac{x^3}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{x^3}{500}$ iſt, ſoll man mit $2\frac{2}{9} = \frac{20}{9}$ multipliciren, und das Produkt davon ſoll die Anzahl der Compagnons ſeyn. Die Anzahl der Compagnons war aber auch = x.

Alſo: $\frac{x^3}{500} \cdot \frac{20}{9} = x$

——————————— würklich multiplicirt

$\frac{20x^3}{500 \cdot 9} = x$

——————————— oder

$\frac{x^3}{225} = x$

——————————— . 225

$x^3 = 225x$

——————————— : x

$x^2 = 225$

———————————

$x = \pm\sqrt{225}$ den $\surd$ ausgezogen $= 15$.

Alſo der Compagnons ſind 15, denn das iſt x was wir ſuchten. Eines jeden Einlage $= 10x$ iſt alſo $10 \cdot 15 = 150$ Thlr. Die Einlage von allen $= 10x^2$ Thlr. $= 10 \cdot 15^2 = 10 \cdot 225 = 2250$ Thlr. Von jedem Hundert haben ſie 2x Thaler gewonnen, oder 30 Thlr. Der ganze Gewinnſt war $\frac{x^3}{5}$ oder $\frac{15^3}{5} = \frac{3375}{5} = 675$ Thlr.

§. 413. **Unreine** quadratiſche Gleichungen ſind ſolche, wo zwar die unbekannte Größe ſich in der zweyten Potenz befindet, wo aber, außer dieſer Potenz, auch die unbekannte Größe noch in der erſten Potenz erſcheinet, und endlich noch eine Größe, welche bekannt iſt. Wir haben ſchon von ihnen §. 406 geredet. Sie heißen unreine Gleichungen, weil ſie noch nicht ein völliges Quadrat ent-

hal-

halten, wie wir nachher ſehen werden. So wäre z. E. $x^2+px=q$, eine unreine quadratiſche Gleichung, wo p und q bekannte Größen ſind. Es ſchadet nicht, und bleibet doch immer eine quadratiſche Gleichung, wenn auch ſchon das x^2 in mehr als einem Gliede, und mit verſchiedenen Zeichen bey einem gegebenen Aufſatze vorkömmt. Wenn dieſes auch mit dem x geſchiehet, ſo kann man doch, wenn man die Gleichung ordnet, ſie alle auf die Form bringen, daß ein Glied ſich befindet, worin ſich x^2 befindet, eines, worin x iſt, und eines, welches die bekannten Größen enthält, wie wir ſchon etwas ähnliches gezeigt haben §. 405.

§. 414. Das erſte, was man thut bey ſolchen unreinen quadratiſchen Gleichungen, iſt, daß man, wenn etwa die Größe, worin ſich x^2 mit befindet, unter dem Minuszeichen ſtünde, ſelbige durch Herüberſchaffung auf die andere Seite zu einer Plusgröße macht, da man denn das Glied, worin x iſt, auch herüber bringen muß, das mag alsdenn ein Minus- oder Pluszeichen bekommen, und die bekannte Größe auch auf eine Seite bringet. Alsdenn muß man die höchſte Potenz der unbekannten Größe, oder das x^2 von ſeinem Coefficienten befreyen, ſo, daß es alleine zu ſtehen kömmt, welches durch die Diviſion aller Glieder mit dem Coefficienten, den x^2 hat, geſchiehet. Wir werden nachher ſehen, wozu das gut iſt.

Z. E. man hätte die Gleichung $6x^2+4x=48$. Man dividire alle Glieder durch den Coefficien-

ficienten von x^2, alſo hier durch 6, ſo bekömmt man $x^2 + \frac{4x}{6} = \frac{48}{6}$ oder $x^2 + \frac{2}{3}x = 8$.

Wenn man das gethan hat, ſo iſt die Gleichung gehörig geſetzet, und man kann nun unter folgender, ganz allgemeinen Formel ſich eine quadratiſche unreine Gleichung vorſtellen, $x^2 \pm px = \pm q$. Erſtlich ſiehet man, daß ſolche Gleichung niemals aus mehr als drey Gliedern beſtehet, und beſtehen kann. Zweytens, haben wir darum bey px und q verſchiedene Zeichen geſetzet, weil dieſe Glieder Plus- oder Minusgrößen ſeyn können. Drittens, kann ſowol p als q alle mögliche bekannte Größen vorſtellen. Es können ganze Zahlen, ächte und unächte Brüche, auch 1 darunter vorgeſtellet werden, wie ſich denn das auch bey Gleichungen findet. Wenn man dieſe Gleichungen nach §. 405 auf 0 bringen will, weis man, daß man die Größen auf der andern Seite mit veränderten Zeichen zu addiret, und ganz allgemein wäre, alſo: $x^2 \pm px \pm q = 0$.

§. 415. Wenn wir die Gleichung $x^2 \pm px = \pm q$ nochmal betrachten, ſo ſehen wir bald, daß, wenn $x^2 + px$ oder $x^2 - px$ ein würkliches Quadrat wäre, alsdenn der Werth von q ſich gleich fände, man hätte nur nöthig, aus beyden Seiten die Quadratwurzel zu nehmen. Aber das iſt es nicht. Wir müſſen alſo hiezu einen andern Weg ſuchen.

Wir wiſſen, daß man doch alle Größen betrachten kann, als ob ſie aus zwey Theilen beſtün-

ſtünden, und daß daher das Binomium entſtände §. 301, nach dieſem wiſſen wir, daß $(a+b)^2=$ iſt, $a^2+2ab+b^2$, und $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ſey. Ein vollkommenes Quadrat des Binomii beſtehet alſo in drey Gliedern. Nun ſind in $x^2 \pm px$, auch zwey Größen, x und p, wenn auch p nur 1 bedeutete, aber nur zwey Glieder, alſo iſt es gewiß noch kein Quadrat. Wie werden wir es aber zum Quadrate machen?

Wenn wir ſowol $a^2+2ab+b^2$ als $a^2-2ab+b^2$ betrachten, welches doch höchſt allgemeine Formeln ſind, und alſo für alle mögliche Fälle gelten: ſo finden wir, daß das dritte Glied, oder das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel entſtehen kann, wenn man im zweyten Gliede das, was nur außer dem erſten Theil der Wurzel ſich darin befindet, welches man den Coefficienten nennet, halbiret, und dieſe halbirte Größe quadriret, oder mit ſich ſelbſt multipliciret, das iſt das dritte Glied. In $+2ab$. iſt außer a noch 2b befindlich, dieſe halbiret giebt $+b$, das quadriret giebt b^2, das iſt das dritte Glied; eben ſo in $-2ab$, die $-2b$ halbiret, giebt $-b$, das quadriret, giebt $+b^2$, gleichfalls das dritte Glied. Wenn wir das bey dem Coefficienten der unbekannten Größe im zweyten Gliede der quadratiſchen Gleichung anwenden, ſo bekommen wir auch ein drittes Glied, und auf der einen Seite alſo ein vollkommenes Quadrat, das aus einer zweytheilichten Größe beſtehet. Es muß alsdenn allerdings auf der andern Seite auch dieſes dritte Glied addiret werden, damit die Gleichung äqual bleibet. Dieſes auf beyden Seiten addirte

Glied

iſt allezeit eine bekannte Größe, weil es aus den Coefficienten des x, die bekannte Größen ſind, entſtehet. Z. E. $x^2 + px = q$, nun halbiret man die p als den Coefficienten von x, halbiret iſt ſie $\frac{p}{2}$, man quadriret ſie, da iſt ſie $\frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = + \frac{p^2}{4}$ addire ſie zu beyden Seiten, ſo wird die Gleichung $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \pm q + \frac{p^2}{4}$ und noch hier auf beyden Seiten gleich; eben ſo, wenn man $x^2 - px = \pm q$ hätte $- p$, halbiret, iſt $- \frac{p}{2}$; quadriret $= - \frac{p}{2} \cdot - \frac{p}{2} = + \frac{p^2}{4}$, addiret $x^2 - px + \frac{p^2}{4} = \pm q + \frac{p^2}{4}$.

Nunmehro hat man auf der Seite, wo x ſtehet, ein vollkommenes binomiſches Quadrat, deſſen Wurzel man auch weis, denn es iſt erſtlich die erſte Potenz der unbekannten Größe, der eine Theil der Wurzel: Ferner, der halbe Coefficiente von x im zweyten Gliede mit dem Zeichen, worunter ſich dieſes x befindet, der zweyte Theil der Wurzel. So iſt z. E. von $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \pm q + \frac{p^2}{4}$, die Wurzel der einen Seite $x + \frac{1}{2}p$. Man multiplicire es nun, ſo wird es die Erfahrung auch lehren, ſo wie die vorige Entſtehungsart

art uns davon überzeugt haben muß, von $x^2 - px + \frac{p^2}{4} = \pm q + \frac{p^2}{4}$ iſt alſo die Wurzel der einen Seite $x - \frac{p}{2}$. Wenn man aus einer Seite die Wurzel ausziehet, ſo muß man ſie auch aus der andern ausziehen, wenn die beyden Seiten der Gleichungen äqual bleiben ſollen.

Alſo bey der erſten Gleichung:

$$x^2 + px + \frac{p}{4} = \pm q + \frac{p^2}{4}$$

würde

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\pm q + \frac{p^2}{4}\right)}$$

und folglich $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\pm q + \frac{p^2}{4}\right)}$

Wenn man x alleine haben will, ſo bringet man das andere Glied herüber auf die andere Seite. Und bey der andern $x^2 - px + \frac{p^2}{4} = \pm q + \frac{p^2}{4}$

würde alsdenn $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(-q + \frac{p^2}{4}\right)}$

alſo x alleine $x = + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\pm q + \frac{p^2}{4}\right)}$

Wir haben aber hiebey überhaupt noch zu merken, daß, da eine jede Quadratwurzel eben ſo, wie bey rei-

nen

nen quadratiſchen Gleichungen, ſowol poſitiv als negativ genommen werden kann, man vor dem Wurzelzeichen, beyde Zeichen, ſowol + als − ſetzet.

$$\text{Alſo } x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\pm q+\frac{p^2}{4}\right)}$$

folglich

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\pm q+\frac{p^2}{4}\right)}$$

und eben ſo auch auf den andern Fall:

$$x=+\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\pm q+\frac{p^2}{4}\right)}$$

Da denn einmal der Werth der Wurzeln plus genommen, zu $\frac{p}{2}$ addiret, den einen Werth giebet, und einmal minus dazu addirt genommen, den andern Werth giebt. So wäre alſo z. E. bey der letzten Gleichung, einmal $x=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\pm q+\frac{p^2}{4}\right)}$, das andere mal $x=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\pm q+\frac{p^2}{4}\right)}$.

Ferner verſteht es ſich, daß alles, was hinter der Wurzelgröße ſtehet, erſtlich zu einer Größe gemacht, und dann die Wurzel ausgezogen werden, endlich haben wir q unter dem Plus- und Minuszeichen zugleich geſetzet, weil ſie eins von

beyden

beyden ſeyn kann, da $\frac{p^2}{4}$ allezeit plus iſt. Wir bemerken noch, daß, wenn dieſe erſte bekannte gegebene Größe, oder die q eine Minusgröße iſt, und größer als $\frac{p^2}{4}$ iſt, alsdenn $\sqrt{\left(-q+\frac{p^2}{4}\right)}$ der Radix aus einer unmöglichen Größe wird, der ſich nicht ausziehen läßt, §. 337, 340 und das alſo anzeiget, daß die Aufgabe unter den Bedingungen unmöglich ſey.

§ 416. Aus allen dieſen laſſen ſich die Regeln für die Auflöſung der unreinen quadratiſchen Gleichungen geben.

Nemnich: Wenn die Gleichung nach den vorhergehenden Lehren in Ordnung gebracht iſt, ſo halbiret und quadriret man den Coefficienten des x, alsdenn addirt man auf beyden Seiten dieſen Coefficienten des x, man ziehet aus beyden Seiten die Wurzel aus, da ſie ſich auf der einen Seite, wo die unbekannten Größen ſind, leichte findet. (vorhergehender Paragraph) Endlich, man bringet den zweyten Theil der Wurzel, die bey dem x ſich befindet, mit veränderten Zeichen auf die andere Seite, ſo hat man x alleine, und ſeinen doppelten Werth in lauter bekannten Größen.

§. 417. Wir wollen nun das, was wir bis daher geſetzt haben, durch Exempel, die mit individuellen Umſtänden begleitet ſind, erläutern, damit

mit man lerne, aus den Umſtänden eine Gleichung aufzuſetzen.

Erſtes Exempel. Es werden zwey Zahlen geſucht, die eine iſt um 12 größer als die andere, und wenn ſie mit einander multipliciret werden, ſo macht ihr Produkt zuſammen 220 aus, welches ſind die Zahlen?

Auflöſung. Es mag die kleinere $= x$ ſeyn, ſo iſt die größere $x + 12$, dieſe ſollten beyde mit einander multipliciret werden. Alſo $x . (x + 12) = x^2 + 12x$, alsdenn ſoll ihr Produkt $= 220$ ſeyn.

Alſo nun iſt die Gleichung:

Den Coefficienten	$x^2 + 12x = 220$	
von x halbirt, quadriret und auf beyden Seiten addirt,	$x^2+12x+36=220+36=256$	
beyderſeits den √ ausgezogen, und	$x+6=\pm\sqrt{256}=\pm 16$	welcher der ausgezogene √ iſt.
die unbekannte Größe allein gebracht.	$x=-6\pm 16$	

Es hat alſo x zwey Werthe, die beyde möglich ſind, nemlich: $x = -6 + 16 = 10$
und $-x = -6 - 16 = -22$.

Alſo wird auf den erſten Fall die andere oder größere Zahl $= 10 + 12 = + 22$, und auf den andern Fall $= - 22 + 12 = - 10$. Auf beyde Fälle kömmt auch das Produkt der Aufgabe heraus, denn $10 . 22$ iſt $= + 220$, und $- 22 . - 10$.
iſt

iſt auch = + 220. Indeſſen wird man die Auflöſung annehmen, wo von Plusgrößen die Rede iſt, wenn Plusgrößen ſind gefodert worden. Wollte man die Auflöſung allgemein machen, und alſo überhaupt zwey Zahlen finden, deren eine um eine gewiſſe Größe größer wäre, ſo mag die kleinere Zahl gleichfalls = x ſeyn. Der Unterſchied zwiſchen beyden = b, alſo die größere Zahl x + b. Das Produkt von beyden ſey = c, ſo iſt folglich:

$$x \cdot (x+b) = c$$

oder

$$x^2 + bx = c$$

das Quadrat ſupplirt.

$$x^2 + bx + \tfrac{1}{4}b^2 = c + \tfrac{1}{4}b^2 = \frac{4c + b^2}{4}$$

den √ ausgezogen

$$x + \tfrac{1}{2}b = \pm\sqrt{\frac{4c + b^2}{4}}$$

und weil √ ſich aus dem Nenner ziehen läßt.

$$x + \tfrac{1}{2}b = \pm\frac{\sqrt{(4c + b^2)}}{2}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}b \pm \frac{\sqrt{(4c + b^2)}}{2}$$

§. 418. Zweytes Exempel. Man ſoll drey Zahlen ſuchen, die ſich in einer continuirlichen geometriſchen Proportion befinden, und alſo beſchaffen ſind, daß die Summe der erſten und zweyten

= 10 ſey, und die Differenz der beyden letztern = 24.

Auflöſung. Es ſey die erſte Zahl = x. Da die Summe der erſten und zweyten = 10 ſeyn ſoll, ſo muß die zweyte um ſo viel kleiner als 10 ſeyn, wie dieſe erſte groß iſt, ſie muß alſo 10 − x ſeyn. Denn 10 − x + x, das iſt = 10. Da ferner die beyden letzten Zahlen um 24 verſchieden ſeyn ſollen, hier aber eine continuirliche geometriſche Proportion ſeyn ſoll, wo die zweyte und dritte Zahl gleich iſt, alſo hier auch die dritte Zahl = 10 − x iſt, ſo muß die vierte Zahl, welches unſere dritte geſuchte iſt, = 34 − x ſeyn. Denn der Unterſchied ſoll noch 24 ſeyn, von der vorhergehenden, und wenn man 10 − x von 34 − x abziehet, ſo bleibt die Differenz 24.

Die ganze Proportion wäre alſo:

$$x : 10 - x = 10 - x : 34 - x$$

Wenn man die beyden äußerſten und die beyden mittlern Glieder mit einander multipliciret, ſo hat man folgende Gleichung:

$$34x - x^2 = x^2 - 20x + 100$$

kommt jedes auf eine Seite

$$-100 = 2x^2 - 54x$$

das x^2 vom Coefficienten befreyet $:2$

$$-50 = x^2 - 27x$$

das Quadrat ſuppliret §. 416

$$-50 + \left(\tfrac{27}{2}\right)^2 = x^2 - 27x + \left(\tfrac{27}{2}\right)^2$$

oder ausgedrückt

$$-50 + \tfrac{729}{4} = x^2 - 27x + \tfrac{729}{4}$$

oder

$$\tfrac{529}{4} = x^2 - 27x + \tfrac{729}{4}$$

den $\sqrt{}$ ausgezogen

$$\pm\sqrt{\tfrac{529}{4}} = x - \tfrac{27}{2} \quad \text{§. 415}$$

oder wenn der $\sqrt{}$ würklich ausgezogen:

$$\pm\frac{23}{2} = x - \frac{27}{2}$$

$$\frac{27}{2} \pm \frac{23}{2} \text{ oder } \frac{27 \pm 23}{2} = x$$

Alſo iſt x einmal $= \frac{27+23}{2} = \frac{50}{2} = 25$

und das andere mal $= \frac{27-23}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Alſo auf den erſten Fall ſind die drey Zahlen x; $10 - x$; $34 - x$, folgende, $+25$ -15 und $+9$, und das gäbe den folgende Proportion:

$$25 : -15 = -15 : 9$$

 Auf

Auf den andern Fall wären die 3 Zahlen: 2, 8, 32; und die Proportion $2 : 8 = 8 : 32$. Auf beyde Fälle iſt hier auch die Summe des erſten und zweyten Gliedes $= 10$, weil, ſowol $25 - 15$, als auch $2 + 8 = 10$ iſt, und die Differenz der beyden letztern Glieder $= 24$, wie die Aufgabe fordert.

Drittes Exempel. Man ſoll 2 Zahlen ſuchen, deren Summe 15 und deren Produkt 54 ſey. Es ſcheinet dieſes beym erſten Anblick eine Gleichung, darin ſich zwey unbekannte Größen x und y befinden, aber wir werden in der Folge ſehen, daß ſie ſich leicht auf **eine** unbekannte Größe reduciren läßt. Die beyden Zahlen mögen x und y ſeyn. Alſo nach der Aufgabe $x + y = 15$, und $x.y = 54$.

Da $x + y = 15$ iſt, ſo iſt das nun für x in die

$$x = 15 - y$$

Gleichung in die $xy = 54$ geſetzt

$$\text{alſo } (15 - y)y = 54$$

$$15y - y^2 = 54$$

oder

$$-54 = y^2 - 15y$$

$$\text{quadr.compl.} -54 - (\tfrac{15}{2})^2 = y^2 - 15y - (\tfrac{15}{2})^2$$

$$-54 + \tfrac{225}{4} = y^2 - 15y + \tfrac{225}{4}$$

$$\text{oder } -\tfrac{216}{4} + \tfrac{225}{4} = \tfrac{9}{4} = y^2 - 15y + \tfrac{225}{4}$$

$$\text{alſo } \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{3}{2} = \sqrt{(y^2 - 15y + \tfrac{225}{4})} = y - \tfrac{15}{2}$$

$$\tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{2} = \tfrac{18}{2} = 9 = y.$$

Nun

Nun war $x + y = 15$
———————— aber
$y = 9$ alſo $x = 6$

§. 419. Viertes Exempel. Ein Frauenzimmer wird gefragt, wie alt ſie ſey. Sie antwortet: meine Mutter war 24 Jahr alt, als ſie mich gebahr, wenn man nun meiner Mutter jetziges Alter mit meinem jetzigen Alter multipliciret, ſo kommen eben 756 Jahr heraus. Wie alt iſt die Tochter, und wie alt iſt die Mutter?

Aufloͤſung. Wir wollen ſetzen, die Tochter ſey x Jahr alt, ſo iſt die Mutter $24 + x$ Jahre alt, denn ſie war 24 Jahr alt, als ſie die Tochter gebahr, wozu noch die jetzigen x Jahre der Tochter kommen. Dieſer beyden Jahre ſollen mit einander multipliciret werden.

Alſo $(24 + x) \cdot x = 24x + x^2$, das ſoll $=$ ſeyn 756;

Alſo die Gleichung iſt:

$$x^2 + 24x = 756$$

den Coefficienten von x halbirt, quadrirt und auf beyden Seiten addirt.

$$x^2 + 24x + 144 = 756 + 144$$

oder

$$x^2 + 24x + 144 = 900$$

den √ ausgezogen auf beyden Seiten

$$x + 12 = \pm\sqrt{900} = \pm 30$$

$$x = -12 \pm 30$$

Dies iſt das Alter der Tochter. Man ſiehet aber gleich, daß da nun ein Werth für x kann gebraucht werden, nemlich $x = -12 + 30 = 18$. Alſo die Tochter iſt 18 Jahr alt, und da die Mutter 24 Jahr alt war, da ſie mit ihr niederkommen, ſo iſt die $24 + 18 = 42$ Jahr alt, und $42 . 18$ iſt auch $= 756$, welches die Aufgabe forderte.

§. 420. Fünftes Exempel. Es hat jemand für 200 Thaler Schaafe gekauft, hätte er für dieſes Geld 20 Schaafe mehr bekommen, als er würklich bekommen hat, ſo wäre jedes Schaaf einen halben Thaler wohlfeiler geweſen, als es jetzt iſt; wie viel ſind der Schaafe geweſen?

Auflöſung. Wir wollen ſetzen, es ſollen y Schaafe geweſen ſeyn, als da alle Schaafe 200 Tha

Thaler koſten, ſo koſtet jedes Stück $\frac{200}{y}$ Thaler.

Denn y Schaafe : 200 Thlr. = 1 Schaaf : $\frac{200}{y}$

zwanzig Schaafe mehr, als er bekommen hat, wären $y + 20$ Schaafe; und alsdenn koſtete das Stück $\frac{200}{y+20}$ Thaler. Dieſes iſt aber einen halben Thaler wohlfeiler das Stück, als was die vorigen das Stück koſteten. Alſo, wenn ich von dem, was der vorige Preis eines Schaafs war, $\frac{1}{2}$ Thaler abziehe, ſo muß er dieſem Preiſe gleich ſeyn. Folglich hat man die Gleichung:

$$\frac{200}{y+20} = \frac{200}{y} - \frac{1}{2}$$

oder die Brüche unter einerley Benennung.

$$\frac{200}{y+20} = \frac{400-y}{2y}$$

die Brüche durch die Multiplikation weggeſchaft.

$$400y = 400y - y^2 + 8000 - 20y$$

die unbekannten auf eine Seite.

$$y^2 + 20y = 8000$$

das Quadrat ſupplirt

$$y^2 + 20y + 100 = 8100$$

den $\sqrt{}$ ausgezogen

$$y + 10 = \pm\sqrt{8100} = \pm 90$$

$$y = -10 \pm 90$$

Man ſieht gleich, daß man -90 nicht gebrauchen kann, alſo bleibt ein Werth für y, und $y = -10 + 90 = 80$, er hat alſo 80 Schaafe für 200 rthlr. bekommen, und jedes Schaaf koſtet $\frac{200}{80} = 2\frac{1}{2}$ rthlr. Hätte er zwanzig Schaafe mehr bekommen, ſo hätte er 100 bekommen, und dann hätte das Stück 2 rthlr. gekoſtet, alſo $\frac{1}{2}$ Thaler weniger, wie jetzt das Stück koſtet, und wie auch die Aufgabe ſagte.

Sechſtes Exempel. Drey Leute A B und C wollen auf dem Markte ein Pferd kaufen, welches ſie (obſchon nicht viel gutes dabey herauskommt) mit einander in Compagnie halten wollen. Es wird für das Pferd 120 rthlr. accordirt. Nun unterſuchen ſie erſt, weil ſich einer auf den andern verlaſſen hatte, ob ſie auch ſo viel Geld bey ſich haben. Es findet ſich auch, daß, wenn ſie alle ihr Geld zuſammen legen, ſie 121 rthlr. haben. Alſo iſt Geld genug vorhanden. Bey fernerer Unterſuchung findet ſich, daß B 1 rthlr. mehr hat als A, und C ſo viel, als wenn A die Zahl der Thaler, die er bey ſich hat, mit ſich ſelber multiplicirte, oder das Quadrat von A Gelde. Wie viel hat jeder gehabt?

Alſo A hat x, B hat $x + 1$, C hat $x . x = x^2$ alles das ſoll 121 ſeyn, alſo:

$$x^2 + x + 1 . + x = 121$$

oder

$$x^2 + 2x + 1 = 121$$

daraus läßt ſich gleich die

$$x + 1 = \pm\sqrt{121} = \pm 11$$

Radix ziehen.

$$x = -1 \pm 11$$

Man

Man ſiehet, daß man hier den + werth nehmen muß, alſo $x = -1 + 11 = 10$. Alſo A hat 10 rthlr. gehabt, B 11 rthlr., und C 100 rthlr.

Hätte man die Wurzel -11 genommen, ſo wäre $x = -12$ und $x + 1 = -11$ und $x^2 = +144$, da denn $-12 - 11$ und $+144$ ebenfalls 121 ſind. Man ſiehet, daß man das hier nicht gebrauchen konnte.

§. 421. Man findet auch wol Aufgaben, die zu quadratiſchen Gleichungen führen, in welchen zwey, drey und mehr unbekannte Größen vorkommen. Wenn man eben ſo viel Gleichungen dafür bekommen kann, ſo iſt die Frage beſtimmt; und es giebt alſo zwey beſtimmte Werthe, die man auf eben die Art, wie wir bey den Gleichungen vom erſten Grade gelehret haben, §. 399 und folgende findet. Wir wollen ein Paar leichte Exempel hinſetzen.

§. 422. Siebentes Exempel. Eine Geſellſchaft von Männern und Frauen haben eine Anzahl Quartier Wein zuſammen getrunken, und zwar halb ſo viel Quartier als die Zahl der Frauens iſt. Als es ſoll bezahlet werden, findet ſich die Rechnung 3 rthlr. 20 mgr. groß. Sie werden mit einander einig, darum zu würfeln, ob die Männer oder die Frauen die Rechnung bezahlen ſollen. Verlieren die Männer, ſo muß jeder viermal ſo viel Pfennige geben, als ihrer zuſammen ſind. Verlieren die Frauen, ſo muß jede eben ſo viel Pfennige geben, als ihrer ſind. Wie viel ſind der Männer und der Frauen geweſen? Wie viel

Quartier Wein haben ſie getrunken, und was ko-ſtet das Quartier?

Auflöſung. Die letzten beyden Fragen werden, wie man aus der Aufgabe ſiehet, durch die Auflöſung der erſten beſtimmet. Alſo wollen wir uns nicht gleich darum bekümmern. Es mögen y Männer und x Weiber geweſen ſeyn. Wenn die Männer verlieren, ſo ſoll jeder **viermal** ſo viel geben als ihrer ſind, daraus läßt ſich die ganze Summe finden, was alle Männer bezahlen müſſen; nemlich 1 Mann : $4y$ = y Männer : $4y^2$, alſo $4y^2$ Pfennige geben alle Männer. Und wenn die Weiber verlieren, ſo wäre laut der Bedingung; 1 Weib : x Pfennige = x Weiber : x^2 Pfennige. Alſo x^2 Pfennige geben alle Weiber. Da beydes gleich iſt, ſo iſt alſo $x^2 = 4y^2$

$$x = \sqrt{4y^2} = 2y.$$

Alſo nochmal ſo viel Weiber als Männer. Ferner war x^2 Pf. die Summe, die alle Weiber zu bezahlen hatten. Das waren 3 rthl. 20 mgr., wie die Aufgabe uns geſaget hat, welches 1024 Pfennige ausmachet. Alſo $x^2 = 1024$

$$x = \sqrt{1024} \text{ würklich ausgezogen } = 32$$

Alſo es ſind 32 Weiber, und weil folgl. $x = 2y$, ſo $\frac{x}{2} = y$ ſind $\frac{32}{2} = 16$ Männer geweſen. Sie hatten halb ſo viel Wein getrunken, als die Zahl der Frauen waren, alſo $\frac{x}{2}$ Quartier $\frac{32}{2}$ oder 16 Quartier,

und

und weil alle 16 Quartier 3 rthlr. 20 mgr. koſteten, ſo koſtet das Quartier 8 mgr. Verlieren alſo die Männer, ſo muß jeder 4y Pfennige oder 4 . 16 pf. = 8 mgr. geben; verlieren die Weiber, ſo bezahlet jede x Pfennige oder 32 Pfennige = 4 mgr. Auf beyde Fälle kommt 3 rthl. 20 mgr. heraus.

§. 423. Achtes Exempel. Man ſuche zwo Zahlen, x und y, bey welchen Produkt und Summe derſelben, und auch der Unterſchied ihrer Quadrate gleich ſind.

Auflöſung. Das Produkt dieſer Zahlen iſt alſo $= xy$, ihre Summe $x + y$. Die Differenz ihrer Quadrate iſt $= x^2 - y^2$. Alſo weil alles dieſes einander gleich ſeyn ſoll, ſo iſt folglich: I.) $x + y = xy$. II.) ferner auch $x^2 - y^2 = xy$. Alſo iſt auch $x + y = x^2 - y^2$, aber $x^2 - y^2$ iſt auch $= (x + y) . (x - y)$ als aus deren Multiplikation es entſtehet, alſo, wenn

$$x + y = x^2 - y^2$$

——— ſo kann man auch ſetzen

$$x + y = (x + y) . (x - y)$$

——— $: x + y$

$$\frac{x + y}{x + y} = x - y$$

——— oder

$$1 = x - y.$$

——— alſo

$$1 + y = x.$$

Weil nun in I.) $x + y = xy$, ſo dürfen wir nur, was wir für x gefunden, in dieſer Gleichung ſubſtitui-

ſtituiren, alſo ſtatt x die $1 + y$ geſetzt. So wird nun

$$1+y+y=(1+y).y$$

oder

$$2y+1=y^2+y$$

$$1=y^2+y-2y=y^2-y$$

den Coefficienten von y der $= 1$ iſt, halbirt, quadriret, und auf beyden Seiten addirt

$$1+\tfrac{1}{4}=y^2-y+\tfrac{1}{4}$$

den √ ausgezogen.

$$\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}}=y-\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}}=y$$

und weil ſich aus 4 der √ ziehen läßt.

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=y.$$

Da nun laut vorhergehender Gleichung $1+y=x$, ſo iſt, ſtatt y das gefundene ſubſtituirt, $x = 1 + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ oder $\frac{2}{2}+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=x.$

Alſo wären die beyden Zahlen gefunden, deren Produkt, Summe und Differenz ihrer Quadrate gleich ſind, und hat jede Zahl zwey Werthe, von welchen man die beyden + Größen bey den Wurzelzeichen oder die beyden − Größen gebrauchen kann. Wir wollen die + Größen, in denen 1) das Produkt beyder Zahlen iſt, einmal gebrauchen:

xy oder yx, alſo $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

das multipliciret $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$+\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{5}{4}$$

$$+\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{4\sqrt{5}}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}+\sqrt{5}=2+\sqrt{5}.$$

Die Summe beyder Größen oder $x+y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{4}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$

Die Differenz beyder Quadrate oder x^2-y^2

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ Wenn man nun y quadriret

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$+\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{5}}{4}+\frac{5}{4}=\frac{6}{4}+\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=y^2$$

$$\begin{array}{l} \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \hline + \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} \\ + \frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4} \\ \hline \frac{9}{4} + \frac{6\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \frac{14}{4} + \frac{6\sqrt{5}}{4} = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

und nun auch x quadriret

Alſo $x^2 - y^2 = \left(\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{7-3}{2} + \frac{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} = x^2 - y^2.$

Alſo der Aufgabe iſt Genüge geleiſtet.

§. 424. Wir beſchließen dieſe Lehre von den quadratiſchen Gleichungen noch mit einigen Anmerkungen, welche uns von ihrer Natur und Auflöſung noch allgemeinere Begriffe geben werden. Wir haben geſehen, daß die quadratiſchen Gleichungen eine doppelte Auflöſung zulleßen, und daß dieſes daher geſchahe, weil vor dem Radix beyde Zeichen $\pm$ zu ſtehen kamen, weil, man mochte den quadratiſchen Radix poſitiv oder negativ nehmen, doch allezeit durch die Multiplikation der Wurzel mit ſich ſelbſt ein poſitives Quadrat herauskam.

Wenn

Wenn man nun den andern Theil der Wurzel, der bey x ſtehet, noch, wie man thun muß, wenn man x alleine haben will, auf die andere Seite bringet, ſo ſehen wir daher, daß das x, oder eigentlich die Wurzel der Gleichung, zweyerley Werthe bekommen kann, und in den mehrſten Gleichungen würklich auch bekömmt, die beyde poſitiv, beyde negativ, oder einer poſitiv und einer negativ ſeyn können. Es kann aber auch kommen, daß es nur einen Werth erhält, ja auch wol, daß man zween unmögliche Werthe bekömmt. Exempel werden dieſes erläutern.

Die Gleichung $x^2 - 12x + 36$ giebt, wenn man ſie gehörig auflöſet, $x = +6 + \sqrt{0}$, oder weil der $\sqrt{}$ aus $0 = 0$, ſo iſt $x = +6$. Alſo hat es nur einen Werth, denn wenn $x^2 - 12x + 36 = 0$, ſo iſt $x^2 - 12x = -36$ und alſo $x^2 - 12x + 36 = -36 + 36 = 0$, alſo $x - 6 = \sqrt{0}$, alſo $x = +6 + \sqrt{0}$, und die Gleichung $x^2 + 10x + 48 = 0$, giebt für einmal $x = -5 + \sqrt{-23}$; der andere Werth iſt $x = -5 - \sqrt{-23}$, welches beydes unmögliche Werthe ſind. Es iſt leicht begreiflich, daß, wenn man auch Werthe für x bekommen hat, man auch dieſe Gleichungen für das $x = 0$ machen kann, und dieſes geſchiehet, wenn man den oder die gefundenen Werthe für x oder für die Wurzel ſelbſt zu dem x mit entgegengeſetzten Zeichen ſetzet. Wenn wir zum Exempel aus der Gleichung $x^2 + x - 20 = 0$, die Werthe fanden, $x = -5$ und $x = +4$, ſo muſte, wenn wir bey den erſten die 5 mit entgegengeſetzten Zeichen zum x ſetzten,

die

die Gleichung für $x = 0$ werden. Wenn $x = -5$, ſo muß $x + 5 = 0$ ſeyn, weil $-5 + 5 = 0$. Hier ſind nun beyde x verſchieden, und man ſollte gedenken, ſie könnten alſo nicht, mit einander multipliciret, x^2 hervorbringen, aber man erinnere ſich jezt und in der Folge beſtändig, daß dadurch die Wurzel der Gleichung verſtanden werden. Wenn alſo $x = + 3$, ſo muß $x - 3 = 0$ ſeyn, oder allgemein, wenn $x = - a$, ſo iſt $x + a = 0$, und wenn $x = + a$, ſo iſt $x - a = 0$.

Wenn man aber zwey ſolche Werthe für x, die man nun auf 0 gebracht hat, oder auch nur einen Werth von x, wenn es nur einen Werth hat, mit einander multipliciret, ſo muß gleichfalls eine quadratiſche Gleichnng herauskommen, die aber $= 0$ iſt, oder deren Werthe der Glieder ſich unter einander aufheben, wenn man nemlich den gefundenen Werth von x anſtatt des x in die Gleichung ſetzet, und die ganze Gleichung zu Null machet. Ferner muß auch eine ſolche Gleichung herauskommen, die, wenn man ſie nachher auflöſet, eben dieſe Werthe für x giebet, aus deren Multiplikation ſie entſtanden war. Dieſes, was ganz einleuchtend iſt, muß auch die Probe beſtätigen. In der Gleichung $x^2 + 8x + 15 = 0$ oder $x^2 + 8x = - 15$ iſt der eine Werth für $x = - 5$, der ander $x = - 3$. Alſo iſt $x + 5 = 0$, und auch $x + 3 = 0$, die wollen wir nun mit einander multipliciren,

$$\begin{array}{l} x+5=0 \\ x+3=0 \\ \hline +3x+15 \\ x^2+5x \\ \hline \end{array}$$

$x^2+8x+15=0$ oder $x^2+8x=-15$, denn 0 mit 0 multipliciret giebt Null.

Eben das geſchiehet auch, wenn die Werthe unmöglich ſind, welches allezeit beyde Werthe ſeyn müſſen. Denn wenn ich den Werth für x bey unmöglichen Wurzeln allgemein ſetze $x=a\pm\sqrt{-b}$ ſo ſiehet man, daß $a+\sqrt{-b}$ ſowol als $a-\sqrt{-b}$ unmögliche Größen ſind. Allein werden ſie mit einander multipliciret, ſo müſſen ſie doch die Gleichung hervorbringen, deren Werthe ſie ſind. Z. E. die Gleichung $x^2-6x+12=0$ giebt Werthe für x. Einmal $x=+3+\sqrt{-3}$, und einmal $x=+3-\sqrt{-3}$, alſo iſt $x-3-\sqrt{-3}=0$, und auch $x-3+\sqrt{-3}=0$, das wollen wir nun mit einander multipliciren:

$$\begin{array}{l} x-3-\sqrt{-3}=0 \\ x-3+\sqrt{-3}=0 \\ \hline +x\sqrt{-3}-3\sqrt{-3}+3 \\ -3x+9+3\sqrt{-3} \\ x^2-3x-x\sqrt{-3} \\ \hline x^2-6x+9+3 \qquad =0 \end{array}$$

$=x^2-6x+12=0.$

§. 425. Wenn man alſo die Werthe für x weiß, und einen davon in die auf 0 gebrachte Gleichung ſetzet, ſo muß dadurch die Gleichung auch 0 werden. Und es folget daher auch ferner,

daß, wenn die Gleichung durch eine in dieſelbe anſtatt x geſetzte Zahl o wird, dieſe Zahl ein Werth für x ſeyn müſſe. Z. E. in der Gleichung $x^2 + 8x + 15 = 0$ war einmal $x = -5$, und auch $x = -3$. Man ſetze ſtatt x die -5 in die Gleichung, ſo wird ſie $+25 - 40 + 15 = +40 - 40 = 0$, und ſetzt man ſtatt x die -3, ſo wird ſie $+9 - 24 + 15 = +24 - 24 = 0$, welches auch nicht anders ſeyn kann.

§. 426. Aus allem dieſen kann man den Schluß machen, daß ſich eine jede auf o gebrachte quadratiſche Gleichung als ſolche betrachten läßt, die durch die Multiplikation zweyer Faktoren, die auf o gebracht ſind, entſtanden ſey. Man nennet dieſe beyden Werthe des x, woraus nun eine ſolche Gleichung entſtanden iſt, die **Wurzeln der Gleichung**. Es iſt auch begreiflich, daß eine quadratiſche Gleichung nicht mehr als zwey ſolche Werthe für x, oder zwey Wurzeln haben kann, denn hätte ſie drey oder mehrere, ſo würde das x ſich in der cubiſchen, oder noch einer höhern Potenz darin finden, und dann wäre es nicht mehr eine quadratiſche Gleichung.

§. 427. Wir wollen nochmals dieſe quadratiſche Gleichung ganz allgemein betrachten. 1) **Wenn wir beyde Werthe des x poſitiv nehmen**, alſo $x = a$ und $x = b$ ſetzen, folglich $x - a = 0$ und $x - b = 0$, und nun dieſe mit einander multipliciren, ſo bekommen wir $x^2 - bx - ax + ab = x^2 - (a + b)x + ab = 0$. 2) **Wenn wir beyde negativ nehmen**, und alſo $x = -a$ und $x = -b$ ſetzen, folglich $x + a = 0$ und $x + b = 0$,

und das mit einander multipliciren, ſo bekommen wir $x^2 + (a+b)x + ab = 0$. 3) **Wenn wir einen poſitiv und einen negativ ſetzen**, alſo $x = +a$ und $x = -b$, folglich $x - a = 0$ und $x + b = 0$, und nun beydes mit einander multipliciren, ſo bekommen wir $x^2 + (b-a)x - ab = 0$.

Wir bemerken hier **erſtlich**, daß auf alle drey Fälle im dritten Gliede ſich das Produkt der Werthe des x befinde, und wenn die quadratiſchen Gleichungen nicht ohnedem leicht aufzulöſen wären, könnte man ſolches in ſeine Faktoren auflöſen, und einen Faktor nach dem andern, anſtatt x, in die Gleichung ſetzen, bis durch einen die Gleichung $= 0$ würde, das wäre dann ein Werth für x, welches aber doch auch herzlich mühſam wäre, wenn der Werth für x keine ganze Zahl wäre, indeſſen gebraucht man doch dieſes Mittel bey höhern Gleichungen.

Zweytens, im zweyten Gliede finden wir allezeit die Summe der Wurzeln zum Coefficienten des x, bey dem erſten Fall war im mittlern Gliede der Coefficient $-(a+b)$, beym zweyten $+(a+b)$ und beym dritten $+(b-a)$, welches letztere auch, doch algebraiſch addirt, die Summe der Wurzeln iſt. Man kann alſo auch hieraus ſchon die Wurzeln ſchließen, wenn man die Coefficienten des zweyten Gliedes in Theile zerfället, und ſiehet, ob aus deren Multiplikation das dritte Glied herkömmt.

Drittens bemerken wir, daß, wenn beyde Wurzeln oder beyde Werthe des x poſitiv waren, alsdenn in einer auf 0 gebrachten Gleichung

das mittlere Glied negativ und die beyden andern poſitiv ſind. Wenn beyde Wurzeln negativ waren, ſo waren alle Glieder der auf o gebrachten Gleichung poſitiv. Und wenn eine Wurzel poſitiv und eine negativ iſt, ſo kann zwar das zweyte Glied poſitiv, auch negativ ſeyn, nachdem in $+ (b - a)$ die b oder a größer iſt, aber das dritte Glied iſt allezeit negativ, das erſte Glied aber iſt allezeit poſitiv. Man kann daher aus den Zeichen der Glieder der Gleichung gleich ſchließen, ob ſie poſitive oder negative Wurzeln haben. So hat z. E. in der Gleichung $x^2 - 24x + 108 = 0$, da ſind beyde Wurzeln poſitiv; ſie ſind $+ 18$ und $+ 6$. In der Gleichung $x^2 + 16x + 55 = 0$ ſind beyde Wurzeln negativ; ſie ſind $- 5$ und $- 11$. In der Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$ iſt eine Wurzel negativ und eine poſitiv; ſie ſind $- 2$ und $+ 1$; und in der Gleichung $x^2 - 5x - 6 = 0$ iſt auch eine Wurzel poſitiv, die andere negativ; ſie ſind $+ 6$ und $- 1$.

Man ſiehet viertens, daß man auch auf die Art leicht Geeichungen machen kann, darinnen zwey gegebene Werthe befindlich ſind, nemlich man addirt die zwey gegebenen Werthe, das giebt den Coefficienten des zweyten Gliedes, oder den Coefficienten des x, und multipliciret ſie mit einander, das giebt das dritte Glied. Die Zeichen finden ſich von ſelbſt, wenn man addiret und multipliciret. Z. E. man ſoll eine quadratiſche Gleichung machen. Da die Werthe von x ſind $- 8$ und $+ 3$, alſo iſt $x + 8 = 0$ und $x - 3 = 0$. Nun addire man $- 3$ und $+ 8$, welches $+ 5$ giebt, und $+ 8$

multipliciret mit -3 giebt -24. Wenn man nun die Summe der Wurzeln zu Coefficienten des zweyten Gliedes, und das Produkt zum dritten Gliede ſetzet, ſo iſt die Gleichung $x^2 + 5x - 24 = 0$.

§. 428. Endlich bemerken wir noch, daß, wenn man einen Werth für x in einer quadratiſchen Gleichung hätte, man den andern auch durch die Diviſion der Gleichung mit dieſem Werthe finden könnte, nemlich, daß man die auf 0 gebrachte Gleichung durch das auf 0 gebrachte bekannte x dividirte, da denn, weil dieſes der eine Faktor iſt, der andere durch die Diviſion herausgebracht werden, und zum Quotienten werden muß, wie das aus der Lehre von der Diviſion bekannt iſt. Z. E. von der Gleichung $x^2 + 9x - 36 = 0$ iſt die eine Wurzel $= +3$, alſo $x = +3$, folglich $x - 3 = 0$. Wenn man dieſe Gleichung mit $x - 3$ dividiret, ſo muß der Quotient die andere Wurzel ſeyn, weil die ganze Gleichung durch die Multiplikation beyder Wurzeln entſtanden war. Wir wollen es einmal machen.

$$
\begin{array}{lll}
x-3=0) & x^2 + 9x - 36 = 0 & | \; x + 12 = 0 \\
 & \underline{x^2 \pm 3x \qquad\quad} & \\
 & \quad +12x - 36 & \\
 & \quad \underline{+12x - 36} & \\
 & \qquad 0 \quad\; 0 &
\end{array}
$$

Alſo iſt $x + 12$ auch $= 0$, folglich $x = -12$, und das iſt die andere Wurzel.

Alle dieſe Betrachtungen kommen uns bey der Natur und Eigenſchaften der höhern Gleichungen vortreflich zu ſtatten. Aus dieſer Urſache haben wir auch hier etwas davon erwähnen wollen, da wir ſonſt dieſe Betrachtung bey bloßen quadratiſchen Gleichungen eben nicht nöthig gehabt hätten. Wir reden nun in dem folgenden Kapitel noch etwas von den höhern Gleichungen.

Das ein und zwanzigſte Kapitel.

Etwas von cubiſchen Gleichungen und von den höhern Gleichungen überhaupt.

§. 429. Wir werden in dieſem Kapitel uns nur kurz faſſen, weil wir überhaupt nur in dieſer Schrift die erſte Anleitung zur reinen Mathematik geben, und unſere Leſer nicht überhäufen dürfen. Wir werden das mehreſte dieſes Kapitels nur hiſtoriſch vortragen. Wir reden erſt etwas von reinen cubiſchen Gleichungen. Reine cubiſche Gleichungen ſind ſolche, wo ſich nur der Cubus der unbekannten Größe alleine findet, ſo daß dieſer einer bekannten Größe kann gleich geſetzet werden; überhaupt eine Gleichung, darin x^3 iſt, und ſonſt keine unbekannte Größe. Iſt auch x^3 noch mit einem Coefficienten verbunden, ſo kann es doch, wie wir oben verſchiedentlich gezeiget haben, allein, und

auf

auf eine Seite gebracht werden, ſo iſt z. E. $x^3 = 343$ eine reine cubiſche Gleichung, oder auch $3x^3 + 15 = 549$ eine reine cubiſche Gleichung, denn ſie kann zu dieſer werden. $3x^3 = 549 - 15$ oder $3x^3 = 534$, und alsdenn $x^3 = \frac{534}{3} = 178$ oder ganz allgemein $x^3 = a$, da a eine ganze Zahl, einen Bruch, oder was man will, nur eine bekannte Größe vorſtellet.

§. 430. Wenn man ſolche Gleichungen auflöſen will, ſo ziehet man aus beyden Größen die Cubikwurzel aus, welches man aus dem vorigen gelernet hat, die einen beſtimmten Werth für x giebt, welcher nun eine Plus- oder eine Minusgröße iſt, nachdem das Zeichen iſt, welches ſich vor der bekannten Größe befindet, weil die Cubikwurzel eine Plus- oder Minusgröße, aber nur eins von beyden ſeyn kann. Z. E. $x^3 = 343$ da

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{343}$$
$$x = 7$$

welches der $\sqrt[3]{}$ aus der 343 iſt.

Hätte man folgende Gleichung $x^3 = \frac{64}{125}$

ſo wäre $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}}$

und dann ausgezogen $x = \frac{4}{5}$

denn $\sqrt[3]{64}$ iſt $= 4$ und $\sqrt[3]{125} = 5$. Ueberhaupt allgemein $x^3 = a$

$$x = \sqrt[3]{a}.$$

§. 431. Hier finden wir nur eine Wurzel von der unbekannten Größe, und bey den quadrati-

ſchen Gleichungen, ſowol reinen als unreinen, finden wir zwey. Dieſes bringet uns aber auf die Gedanken, ob hier nicht auch mehr als eine Wurzel, oder ein Werth für x ſich befinde, und das iſt ſo allerdings. Man kann aber auch die übrigen beyden Wurzeln leicht finden, wenn man hier die ganze Gleichung durch x um die gefundene Wurzel vermindert dividiret, da man denn eine quadratiſche Gleichung bekömmt, die man auf die gewöhnliche Art auflöſet. Wir wollen es durch ein Exempel zeigen.

Es ſey $x^3 = 64$

$$x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Da alſo $x = 4$, ſo iſt $x - 4 = 0$, und weil $x^3 = 64$, ſo iſt auch $x^3 - 64 = 0$. Nun muß ſich $x^3 - 64 = 0$ durch $x - 4 = 0$ dividiren laſſen, weil ein Werth von $x = 4$ iſt, und wenn man den in der Gleichung $x^3 - 64 = 0$ ſtatt x ſubſtituiret, alsdenn auch würklich die Gleichung null iſt. Wir wollen einmal dividiren:

$$
\begin{array}{l|l}
x - 4)\quad x^3 - 64 & x^2 + 4x + 16 \\
\quad x^3 - 4x^2 & \\
\hline
\quad + 4x^2 - 64 & \\
\quad + 4x^2 - 16x & \\
\hline
\quad + 16x - 64 & \\
\quad + 16x - 64 & \\
\hline
\quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Die erhaltene quadratiſche Gleichung iſt nun $x^2 + 4x + 16 = 0$. Sie muß $= 0$ ſeyn, weil Diviſor und Dividendus $= 0$ war, dieſe wollen wir nun auflöſen.

x^2

$$x^2 + 4x + 16 = 0$$
$$x^2 + 4x = -16$$
$$x^2 + 4x + 4 = -16 + 4 = -12$$
$$x + 2 = \pm\sqrt{-12}$$
$$x = -2 \pm \sqrt{-12}$$

Da haben wir noch die andern beyden Werthe für x, und wir finden alſo, daß 1) $x = +4$. 2) $x = -2 + \sqrt{-12}$. 3) $x = -2 - \sqrt{-12}$. Die beyden letzten Werthe für x ſind nun freylich unmögliche Größen, und alſo unbrauchbar, aber wenn man doch eine dreymal mit ſich ſelbſt multipliciret, ſo muß doch auch die Gleichung $x^3 = 64$ herauskommen. Wir wollen es verſuchen. Der eine Werth für x war $-2 + \sqrt{-12}$
das mit einand. mult. $-2 + \sqrt{-12}$

$$-2\sqrt{-12} - 12$$
$$+4 - 2\sqrt{-12}$$
$$+4 - 4\sqrt{-12} - 12 = -8 - 4\sqrt{-12}$$

dieſes Produkt $-4\sqrt{-12} - 8$
wieder multipliciret $-2 + \sqrt{-12}$

$$+48 - 8\sqrt{-12}$$
$$+8\sqrt{-12} + 16$$

alſo das Prod. $+8\sqrt{-12} + 64 - 8\sqrt{12} = +64$.

Eben ſo iſt es auch mit der andern Wurzel $-2 - \sqrt{-12}$, die dreymal mit einander multipliciret auch $+64$ zum Produkte giebet. Und alle drey Wurzeln auf 0 gebracht und mit einander

multipliciret werden die Gleichung $x^3 = 64$ wieder geben.

§. 432. Hier haben wir gefunden, daß die andern beyden Wurzeln aus $x^3 = 64$ unmögliche Größen waren, allein das ſind ſie auch auf alle Fälle bey allen reinen cubiſchen Gleichungen, es findet ſich nur eine mögliche Wurzel darin, ſie iſt nun eine Plus- oder Minusgröße, die andern beyden ſind allezeit unmöglich, und wir haben in dem vorherigen § geſehen, wie ſie ſich finden laſſen. Es ließe ſich dieſes, daß die andern beyden Wurzeln unmöglich ſind, auch leicht durch ein allgemeines Exempel beweiſen, wenn es unſere Abſicht wäre, uns ſo weit einzulaſſen. Wir bemerken nur noch, daß, wenn man eine reine cubiſche Gleichung hat, woraus ſich der $\sqrt[3]{}$ nicht genau angeben läßt, man ſelbigen, wie wir bey Ausziehung der Wurzel gelehret haben, durch Näherung ſuchen muß, die Wurzel iſt dann wie wir wiſſen, irrational, und nicht völlig anzugeben.

Z. E. wenn $x^3 = 148$

ſo iſt $x = \sqrt[3]{148} = 5,289 \ldots$

Wir geben hierüber noch ein Paar mit Umſtänden begleitete Exempel. Man ſuche eine Zahl, deren halbes Quadrat mit der Zahl ſelbſt multipliciret, 256 zum Produkte gebe.

Auflöſung. Es ſey die Zahl $= x$, ſo iſt ihr Quadrat $= x^2$, und ihr halbes Quadrat $= \frac{x^2}{2}$, dieſes halbe Quadrat ſoll mit der Zahl ſelbſt multipliciret werden, und das ſoll 256 ſeyn.

Alſo

Alſo $x \cdot \frac{x^2}{2} = 256$

——————————— oder

$\frac{x^3}{2} = 256$

——————————— . 2

$x^3 = 512$

$x = \sqrt[3]{512}$ dann ausgezogen, giebt 8.

Es iſt daher $\frac{x^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$, und da $x = 8$, ſo iſt den Bedingungen der Aufgabe Genüge geſchehen $32 \cdot 8 = 256$.

Zweytes Exempel. Eine Bäurinn hat Käſe, welche ſie gegen Hüner vertauſchet. Sie bekömmt für 2 Käſe 3 Hüner. Dieſe Hüner legen Eyer, jedes Huhn $\frac{1}{3}$ ſo viel Eyer, als überhaupt die Zahl der Hüner ſind. Dieſe Eyer verkauft ſie und giebt 9 Eyer für ſo viel Pfennige, als jedes Huhn Eyer gelegt hat. Sie löſet daraus 72 Pfennig. Wie viel hat ſie nun Käſe, Hüner und Eyer gehabt?

Auflöſung. Wir müſſen hier die Zahl der Käſe ſuchen, weil dadurch das andere beſtimmt wird. Sie mag x Käſe gehabt haben. Sie bekömmt für 2 Käſe 3 Hüner; alſo giebt die Regel Detri, wie viel ſie Hüner bekommen hat, nemlich:

2 Käſe : x Käſe = 3 Hüner : $\frac{3}{2}x$ Hüner.

Sie hat alſo $\frac{3}{2}x$ Hüner bekommen. Jedes Huhn legt $\frac{1}{3}$ ſo viel Eyer als der Hüner ſind. Alſo

die

die Zahl der Hüner mit $\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt die Zahl der Eyer von einem Huhne. Die Zahl der Eyer iſt alſo von einem Huhne:

$$\tfrac{3}{2}x \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{6}x = \tfrac{1}{2}x.$$

Hieraus läßt ſich nun finden, wie viel Eyer alle Hüner zuſammen gelegt hatten; durch folgende Proportion:

1 Huhn : $\frac{1}{2}x$ Eyer $=$ $\frac{3}{2}x$ Hüner : $\frac{3}{4}x^2$ Eyer, nemlich, $\frac{3}{4}x^2$ Eyer haben ſie alle gelegt. Von dieſen giebt ſie 9 Stück um ſo viel Pfennige, als von jedem Huhne Eyer gelegt waren. Eyer waren von jedem Huhne $\frac{1}{2}x$. Alſo 9 Stück koſten $\frac{1}{2}x$ Pfennige. Nun läßt ſich abermals durch die Regel Detri finden, was alle Eyer gekoſtet hatten; nemlich:

$$9 \text{ Stück} : \tfrac{1}{2}x \text{ Pf.} = \tfrac{3}{4}x^2 \text{ Stück} : \frac{3x^3 \text{ Pf.}}{8.9} = \frac{x^3}{24}$$

Das haben alle Eyer gekoſtet: Allein in der Aufgabe ſteht, das wären 72 Pfennige geweſen, denn ſo viel hätte ſie gelöſet.

$$\text{Alſo: } \frac{x^3}{24} = 72$$

$$\cdot\, 24$$

$$x^3 = 1728$$

$$x = \sqrt[3]{1728} \text{ den ausgez. giebt } 12.$$

Da x die geſuchte Zahl der Käſe war, ſo hat die alſo 12 Käſe gehabt. Sie bekam $\frac{3}{2}x$ Hüner $= \frac{3.12}{2} = 18$ Hüner; jedes Huhn legte $\frac{1}{2}x$ Eyer $= \frac{1.12}{2} = 6$ Eyer; alle Eyer waren $\frac{3}{4}x^2 = \frac{3.12.12}{4}$ $= 108$ Eyer. Sie gab 9 Eyer für $\frac{1}{2}x$ Pfennig, oder

oder für $\frac{1 \cdot 12}{2} = 6$ Pfennig. Alſo muſten nothwendig 108 Eyer 72 Pfennige oder 9 Mgr. gelten.

§. 433. Vollſtändige cubiſche Gleichungen ſind ſolche, wenn außer dem Cubus der unbekannten Größe, noch das Quadrat derſelben, und die unbekannte Größe ſelbſt, und noch eine bekannte Größe vorkommen. So wäre z. E. $x^3 + 9x^2 + 20x = -12$ eine vollſtändige cubiſche Gleichung, und ſie auf o gebracht wäre. Alſo $x^3 + 9x^2 + 20x + 12 = 0$, oder allgemein $x^3 \pm px^2 \pm qx \pm b = 0$. Da p, q und b bekannte verneinte, oder bejahte Zahlen, (denn darum haben wir ſie mit doppelten Zeichen geſchrieben), auch Brüche vorſtellen können. Man hat nun verſchiedene Wege erdacht, um ſolche Gleichungen aufzulöſen, worunter auch die Art mit gehöret, die Cardan, oder vielmehr Scipio Fereus erfunden, welche wir aber hier nicht erklären werden, weil ſie von ſehr wenigem Gebrauche, und mit manchen Schwierigkeiten umgeben ſind, ob man ſchon ſonſt die Wurzeln der Gleichung dadurch finden kann. Wir wollen nur einen Weg angeben, wodurch man dieſe Art Gleichungen auflöſen kann.

§. 434. Wir bemerken erſtlich, daß, wie wir ſchon bey den reinen Gleichungen vom dritten Grade geſagt haben, auch dieſe vollſtändige cubiſche Gleichungen drey Werthe für x, oder drey Wurzeln haben, da aber nicht allezeit wie bey den reinen Gleichungen von dieſem Grade zwey Wurzeln immer unmöglich ſind, ſondern es können alle drey Wurzeln recht gut möglich ſeyn, und ſind ſehr oft

möglich

möglich. Z. E. $x^3 + 9x^2 + 20x + 12 = 0$, hat drey mögliche Wurzeln, ſie ſind $x = -1$, $x = -2$, $x = -6$, und die Gleichung iſt durch die Multiplikation aller dreyen Faktoren, die auf 0 gebracht waren, nemlich: $(x+1).(x+2).(x+6)$ entſtanden. Man kann auch jede cubiſche Gleichung alſo anſehen, als ob ſie aus der Multiplikation dreyer Faktoren, da die Werthe von x auf 0 gebracht ſind, entſtanden ſey, ob es ſchon geſchehen kann, daß alle dieſe drey Werthe von x nur einerley ſind. Z. E. in der Gleichung:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0,\ \text{iſt}\ x = 2.$$

Allein die Gleichung iſt doch durch die dreymalige Multiplikation $x-2=0$ entſtanden.

Wir wollen nun mal einen allgemeinen dreyfachen Werth für x, oder vielmehr für jede Wurzel der Gleichung, welche man mit x anzeiget, ob ſie ſchon alle drey verſchieden ſeyn können, hinſetzen, und ſehen, wie alsdenn eine Gleichung ausſiehet, wenn dieſer dreyfache Werth wird mit einander multipliciret ſeyn. Es ſoll $x = -p$, ferner, $x = -q$, und $x = -r$ ſeyn. Alſo iſt $x + p = 0$, ferner $x + q = 0$, und $x + r = 0$. Das wollen wir nun multipliciren:

$$\begin{array}{l}
\quad x + p = 0 \\
\quad x + q = 0 \\
\hline
\quad + qx \quad + pq \\
x^2 + px \\
\hline
x^2 + px + qx + pq \\
\qquad\quad x + r \\
\hline
\quad + rx^2 + rpx + rqx + rpq \\
\quad + qx^2 \qquad\quad + pqx \\
x^3 + px^2 \\
\hline
x^3 + (p + q + r)x^2 + (rq + pq + rp)x + rpq = 0
\end{array}$$

Hier waren alle drey Werthe für x, oder alle drey Wurzeln negativ. Wären ſie alle drey poſitiv geweſen, ſo wäre das Produkt aus allen dreyen:

$$x^3 - (r + p + q)x^2 + (rq + pq + rp)x - rpq = 0.$$

§. 435. Wenn wir dieſe allgemeine Gleichungen genauer betrachten, ſo finden wir an denſelben verſchiedene merkwürdige Eigenſchaften, wenn nemlich die Wurzeln möglich ſind, wie wir denn hier nur mögliche Wurzeln genommen haben.

1) Wenn alle Wurzeln negativ ſind, ſo ſind alle Glieder der auf 0 gebrachten Gleichung poſitiv, oder haben das Zeichen +.

Wenn alle Wurzeln poſitiv ſind, ſo wechſeln die Zeichen ab Hieraus hat man ferner den Schluß gemacht, den wir aber hier nicht aus einander ſetzen wollen, daß, ſo oft die Zeichen in der auf 0 gebrachten Gleichung abwechſeln, auch ſo viel poſitive Wurzeln, ſo vielmal aber gleiche

Zei-

Zeichen, es mögen + oder − Zeichen ſeyn, auf einander folgten, auch ſo viel negative Wurzeln ſich in ſelbigen befänden. So werden z. E. in der Gleichung: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, alle drey Wurzeln poſitiv ſeyn, denn die Zeichen wechſeln dreymal ab, und ſie ſind es auch; ſie ſind nemlich + 1, + 2 und + 3; in der Gleichung $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$, werden alle drey Wurzeln negativ ſeyn, weil dreymal gleiche Zeichen auf einander folgen.

Es ſind eben dieſelben, nemlich −1, −2 und −3. In der Gleichung $x^3 - x^2 - 10x - 8$ iſt eine Abwechſelung der Zeichen. Gleich vorne iſt die Abwechſelung der Zeichen, denn $x^3 - x^2$ iſt eine Abwechſelung von + und −, und dann ſind noch zwey Folgen der Zeichen. Es werden alſo nur eine poſitive und zwey negative Wurzeln ſich darinnen befinden, ſie ſind auch − 1, −2 und +4.

Wir haben dieſes zu merken, weil es uns nachher zu ſtatten kommen wird.

2) Haben wir zu merken, daß im zweyten Gliede dieſer Gleichungen ſich die Summe aller Wurzeln, oder vielmehr die Summe der den Wurzeln entgegengeſetzten Größen befindet, und das iſt auch allezeit, nur, wenn die Wurzeln verſchiedene Zeichen haben, ſo muß man die Summe auch algebraiſch betrachten, weil auch durch die Addition der Plus- und Minusgrößen eine Summe entſtehet.

3) Finden wir im dritten Gliede die Summe der Wurzeln, aber Paarweiſe genommen.

4) Und endlich bemerken wir im vierten oder letzten Gliede das Produkt aus allen drey Wurzeln

zeln. Dieſer letzte Umſtand iſt vorzüglich recht merkwürdig, weil er uns zur Auflöſung dieſer Art Gleichungen, und auch zur Auflöſung höherer Gleichungen helfen ſoll, denn auf alle Fälle befindet ſich im letzten Gliede das Produkt aus allen Wurzeln.

§. 436. Indeſſen hilft uns dieſes nur vors erſte. Wenn nemlich die Gleichung ſo beſchaffen iſt, daß x^3 vorn alleine ſtehet, und die Coefficienten der andern Größen mit dem letzten Gliede ſind ganze Zahlen, ſo iſt es ganz begreiflich, daß eine ſolche cubiſche Gleichung, wenn ſie Rationalwurzeln hat, keine andere Rationalwurzeln haben kann, als deren Multiplikation zuſammen das letztere Produkt ausmacht. Man zerfälle alſo das letztere Produkt in die Faktores, worin es ſich zerfällen läßt, und ſetze dieſe Faktores negativ und poſitiv, (welches man ſchon aus den Zeichen der Gleichung ſiehet, wie wir eben gezeigt haben), in die Gleichung anſtatt des x, ſo, daß bey x^3 dieſer Faktor cubiret, bey x^2 quadriret, und mit dem Coefficienten multipliciret wird, bey x blos mit dem Coefficienten multipliciret wird. Man addirt dann dazu die bekannte Größe des letzten Gliedes, ſo müſſen durch den Faktor, welcher eine Wurzel iſt, alle Glieder der Gleichung ſich aufheben, nemlich daß ſich dann gleichviel Plus-als Minusgrößen finden, oder die Gleichung muß Null werden. Thut es dieſes mit keinem einzigen Faktor nicht, ſo zeigt dieſes an, daß keine rationale Wurzel darin befindlich iſt. Hat man erſt eine Wurzel, ſo laſſen ſich die andern beyden bald finden, indem man die Glei-

chung durch einen Faktor der Gleichung dividiret, welchen man erhält, wenn man das, was als eine Wurzel gefunden, zu x mit entgegengeſetzten Zeichen herüber ſetzet, und alsdenn eine quadratiſche bekömmt, die ſich leicht auflöſen läßt. Wir wollen ein Paar Exempel geben. Man hätte die Gleichung $x^3+4x^2-4x-16=0$. Hier ſind zwey Folgen gleicher Zeichen, und eine Abwechſelung, denn $+x^3$ und $+4x^2$ iſt eine Folge gleicher Zeichen, und $-4x$ und -16 iſt auch eine Folge gleicher Zeichen, und $+4x^2$ und $-4x$ iſt eine Abwechſelung der Zeichen. Es ſind alſo zwey Wurzeln negativ, und eine nur poſitiv. Wir wollen nun 16 in ſeine Faktores zerlegen, und einen nach dem andern für den Werth von x annehmen, und da die mehreſten Wurzeln negativ ſind, nur die negativen Werthe. In beyſtehender Tabelle befindet ſich die Rechnung davon.

Faktores des letzten Gliedes	Was aus der Gleichung heraus kömmt, wenn der Werth der Faktoren ſtatt x geſetzt wird, und die Minusgrößen gegen die Plusgrößen gehoben werden.
± 1	für -1 kömmt heraus -9
± 2	für -2 „ „ 0
± 4	für -4 „ „ 0
± 8	für -8 „ „ -240
± 16	für -16 „ „ -3024

Wir hätten hier nun ſchon zwey Wurzeln gefunden, nemlich -2 und -4, weil dadurch die Glei-

Glei-

Gleichung Null geworden iſt. Aber man iſt bey cubiſchen Gleichungen gleich zufrieden, wenn man nur eine hat, weil man die andern alsdenn bald findet. Wir wollen alſo auch ſo verfahren, als ob wir nur eine hätten.

Es ſey die -2. Alſo wenn $x = -2$, ſo iſt $x + 2 = 0$. Mit dieſem Faktor der Gleichung wollen wir die Gleichung dividiren.

$$
\begin{array}{lll}
x+2) & x^3 + 4x^2 - 4x - 16 & x^2 + 2x - 8 \\
 & \underline{x^3 \pm 2x^2} & \\
 & + 2x^2 - 4x & \\
 & \underline{\pm 2x^2 \pm 4x} & \\
 & -8x - 16 & \\
 & \underline{\mp 8x \mp 16} & \\
 & 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Die quadratiſche Gleichung iſt nun:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 2x = + 8$$

$$x^2 + 2x + 1 = + 8 + 1 = 9$$

$$x + 1 = \pm \sqrt{9} = \pm 3$$

$$x = -1 \pm 3$$

Alſo iſt x einmal $= -1 + 3 = + 2$, und einmal $= -1 - 3 = -4$.

Die Wurzeln ſind alſo nebſt der erſt gefundenen -2. $+2$ und -4, und die Gleichung iſt durch die Multiplikation folgender Größen $x + 2 = 0$, und $x - 2 = 0$, und $x + 4 = 0$ entſtanden.

 Man

Man ſuche die Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

Man ſiehet gleich, daß alle Wurzeln poſitiv ſind, weil die Zeichen dreymal abwechſeln. Nun läßt ſich 30 in folgende Faktores zerlegen, in 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15.

Wir wollen die erſten davon verſuchen, das zweyte Glied läßt uns ſchon muthmaßen, daß es keine große Faktores ſeyn werden, wir dürfen ſie nur poſitiv nehmen, weil wir ſchon wiſſen, daß alle Wurzeln poſitiv ſind.

Nimmt man für $x = +1$, ſo kömmt aus der Gleichung heraus -8. Das 1 iſt alſo keine Wurzel.

Nimmt man $x = +2$, und ſetzet die $+2$ anſtatt des x; ſo hebet ſich alles und wird 0, alſo $+2$ iſt gewiß eine Wurzel. Folglich $x - 2 = 0$. Dadurch die Gleichung dividiret.

$$\begin{array}{lll}
x-2) & x^3 - 10x^2 + 31x - 30 & \big| \; x^2 - 8x + 15. \\
 & x^3 \mp 2x^2 & \\
\hline
 & -8x^2 + 31x & \\
 & \mp 8x^2 \pm 16x & \\
\hline
 & +15x - 30 & \\
 & +15x - 30 & \\
\hline
 & 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Alſo

Alſo $x^2 - 8x + 15 = 0$

$$x^2 - 8x = -15$$

$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16 = +1$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x = +4 \pm 1.$$

Alſo iſt x einmal $= 4 + 1 = 5$

und einmal $4 - 1 = 3$

Die Wurzeln ſind alſo $+2$, $+3$, $+5$, oder die Gleichung iſt durch die Multiplikation von $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$, entſtanden.

§. 437. Wir haben geſagt, daß man auf dieſe Art die rationalen Wurzeln der Gleichungen ſuchen kann, wenn x^3 oder auch überhaupt, denn es gilt auch für Gleichungen von höhern Graden, die höchſte unbekannte Größe alleine ſteht, und die Coefficienten der andern Glieder keine Brüche ſind. Allein man kann auch die Brüche wegſchaffen, und dieſes geſchiehet dadurch, wenn man die Gleichung in eine andere von gewiſſer Art verwandelt. Dieſes bringt uns überhaupt darauf, von den Verwandlungen der Gleichungen, ſo viel ſich für unſere Abſicht ſchicket, etwas weniges zu reden. Man kann die vier Rechnungsarten, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Diviſion bey den Gleichungen anbringen, und dadurch neue Gleichungen bekommen, und da, wenn man die Wurzeln der neuen Gleichungen weiß, die Wurzeln der alten gegebenen auch leicht finden kann. Das ganze Kunſtſtück beruhet darauf, daß man ſich bemühet, in Subſtituiren, oder Glei-

ches für Gleiches zu ſetzen, eine Fertigkeit zu bekommen. Man bringet dieſe Rechnungsarten an, je nachdem man es zur bequemen Findung der Wurzel der Gleichung für nöthig befindet. Will man die Addition anbringen, ſo ſetzet man zu dem x noch eine andere bekannte Größe, und dieſes zuſammen einer andern unbekannten gleich, wie man es nach den Umſtänden für nöthig findet, und bey der Subtraktion ziehet man ſelbige davon ab. Man hätte die Gleichung $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$, man wollte ſie durch die Addition verändern, ſo ſetze man zu x noch eine andere bekannte Zahl, und dieſes alles dem y gleich. Es ſey zum Exempel $x + 3 = y$, welches man allerdings thun kann, denn x ſey was es wolle, ſo wird, wenn man noch etwas hinzu ſetzet, es einer andern unbekannten Größe gleich werden. Es ſey alſo $x + 3 = y$, ſo iſt folglich $x = y - 3$. Nun ſubſtituire man ſtatt x allerwärts die $y - 3$. Alſo wird aus der Gleichung

ſtatt x^3 die $(y - 3)^3$	$=$	$y^3 - 9y^2 + 27y - 27$
$-7x^2 = (y - 3)^2 \cdot -7 =$		$-7y^2 + 42y - 63$
$+7x = (y - 3) \cdot 7$	$=$	$+7y - 21$
$+15 =$	$=$	$+15$
$0 =$		
man addire die Glieder der neuen Gleichung alſo:		$y^3 - 16y^2 + 76y - 96$

Man ſiehet hier, wie man $y - 3$ erſt cubiret und hingeſetzet habe, nachher quadriret, und alle Glieder dieſes Quadrats mit dem Coefficienten der vorigen Gleichung multipliciret habe; ferner

$y - 3$

$y - 3$ blos mit dem Coefficienten des x multipliciret, und endlich die bekannte Größe auch hingeſetzet habe; ferner: wie man gleiche Potenzen unter gleiche Potenzen geſetzet, und dann alles addiret habe. Eine Wurzel dieſer neuen Gleichung, oder ein Werth für y iſt nun $= + 2$, da nun $x + 3 = y$, oder weil $y = 2$, alſo $x + 3 = 2$, ſo iſt $x = 2 - 3 = - 1$, alſo ein Werth für $x = - 1$, darnach man hier die andern bald findet. Sie ſind $+ 5$ und $+ 3$. Wir haben zwar bey dieſer Verwandlung keinen Vortheil gehabt, weil d. letzte Produkt größer geworden war, allein ſehr oft hat man, wenn man es nach den Umſtänden einrichtet, große Vortheile; davon unten §. 440. Wenn man ſie durch Subtraktion verändert, ſo ziehet man von der unbekannten Größe eine bekannte Zahl ab, und machet dann auf eben dieſe Art eine neue Gleichung. Wir wollen eben die vorige nehmen. $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$. Es ſey nun $x - 3 = y$. So iſt alſo $x = y + 3$. Nun daraus auf die vorige Art die neue Gleichung gemacht.

$$\begin{array}{lll}
\text{Alſo ſtatt } x^3 \text{ die } (y+3)^3 & = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 \\
-7x^2 = (y+3)^2 - 7 & = -7y^2 - 42y - 63 \\
+7x = (y+3) \cdot 7 & = +7y + 21 \\
+15 = & +15 \\
\hline
0 = & y^3 + 2y^2 - 8y \quad 0
\end{array}$$

Hier haben wir nur $y^3 + 2y^2 - 8y$, und das letzte Glied iſt durch die Veränderung der Gleichung gar weggefallen. Dieſes giebt uns Gelegenheit

zu einer guten Anmerkung. Wenn das geſchiehet, ſo iſt es ein ſicherer Beweis, daß eine der Wurzeln $= 0$ iſt, denn weil das dritte Glied das Produkt aller Wurzeln iſt, ſo muß nothwendig daher das Glied wegfallen, wenn es mit 0 multipliciret wird. Alſo $y = \pm 0$, es iſt gleichviel, was man ſetzet, weil $+0$ und -0 einerley, nemlich nichts iſt. Nun war $x - 3 = y$, oder ſtatt y die 0 geſetzt, alſo $x - 3 = 0$.

Folglich: $x = 0 + 3 = 3$. Alſo eine Wurzel von x muß $= 3$ ſeyn. Die andern finden ſich bald durch die Diviſion der alten Gleichung mit $x - 4 = 0$. Bey der Veränderung der Gleichung durch die Multiplikation verfähret man auf eine ähnliche Art. Man ſollte eben dieſe Gleichung $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ durch 2 multipliciren, das hieße, die unbekannte Größe x ſollte durch 2 multipliciret werden, und dieſes ſetzte man nun einer neuen unbekannten Größe gleich. Alsdenn wäre alſo $2x = y$. Folglich $x = \frac{y}{2}$ nun in der Gleichung anſtatt x die $\frac{y}{2}$ ſubſtituiret.

Alſo

Alſo anſtatt x^3 die $\left(\frac{y}{2}\right)^3 = \frac{y^3}{8}$

$$-7x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \cdot -7 = -\frac{7y^2}{4}$$

$$+7x = \frac{y}{2} \cdot 7 = \qquad +\frac{7y}{2}$$

$$+15 = \qquad +15$$

$$0 = \frac{y^3}{8} - \frac{7y^2}{4} + \frac{7y}{2} + 15$$

Und wenn nun allgemein eine ſolche Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c$ durch d ſollte multipliciret werden, ſo wåre:

$$dx = y, \text{ alſo } x = \frac{y}{d}$$

$$\text{folglich } x^3 = +\frac{y^3}{d^3}$$

$$+ax^2 = \quad +\frac{ay^2}{d^2}$$

$$+bx = \quad +\frac{by}{d}$$

$$+c = \quad +c$$

$$0 = \frac{y^3}{d^3} + \frac{ay^2}{d^2} + \frac{by}{d} + c.$$

Wenn man nun in dieſer Gleichung alle Glieder mit d^3 multipliciret.

$$o = \frac{y^3}{d^3} + \frac{ay^2}{d^2} + \frac{by}{d} + c \quad . \, d^3$$

ſo wird ſie $o = y^3 + day^2 + d^2by + d^3c$

Man ſiehet daraus, daß, wenn man die Wurzel einer Gleichung mit einer gegebenen Zahl zu multipliciren hat, man auch alſo verfahren kann, daß man nur jedes Glied der Gleichung mit den Potenzen dieſer Zahl zu multipliciren hat, welche aus einer geometriſchen Progreſſion entſtehen, deren erſtes Glied = 1 iſt, das zweyte die Zahl, das dritte ihr Quadrat, das vierte ihr Cubus u. ſ. w. Z. E. ich hätte die Wurzel der auf o gebrachten Gleichung $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$, mit 2 zu multipliciren, ſo ſetze ich darunter unter jedes Glied eine geometriſche Progreſſion, deren erſtes Glied 1, die andern die Potenzen dieſer Glieder, und multiplicire jedes Glied der Gleichung mit dem Gliede der Progreſſion, welches darunter ſtehet. Alſo, wenn $2x = y$, ſo ſetze ich eben ſo, wie hier, die Gleichung hin:

Geometriſche Pro- $y^3 - 7y^2 + 7y + 15 = o$ darunter
greſſion der Poten-
zen der 2 $\quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8$

damit die oberſten
Glieder multipli- $y^3 - 14y^2 + 28y + 120 = o$
ciret.

Auf

Auf eine ähnliche Art verändert man auch die Gleichungen durch die Diviſion. Es ſoll eben dieſe Gleichung $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ dadurch verändert werden. Alſo da $\frac{x}{2} = y$ iſt, ſo iſt alſo $x = 2y$, nun ſubſtituiret.

$$\begin{array}{ll} \text{Folglich } x^3 = (2y)^3 & = 8y^3 \\ -7x^2 = (2y)^2 . -7 = & -28y^2 \\ +7x = (2y) . 7 = & +14y \\ +15 = & +15 \\ \hline 0 & 8y^3 - 28y^2 + 14y + 15 \end{array}$$

und allgemein $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Wenn man $\frac{x}{d} = y$ ſetzet, ſo wird alſo $x = dy$, alſo ſubſtituiret.

$$\begin{array}{ll} x^3 = (dy)^3 = & + d^3y^3 \\ + ax^2 = (dy)^2 a & + d^2y^2a \\ + bx = (dy) b & + dyb \\ + c = & + c \\ \hline 0 = & d^3y^3 + d^2y^2a + dyb + c \end{array}$$

Man ſiehet hier, daß man das Verkehrte der vorigen Operation verrichtet hat. Nemlich, man hätte nur die geometriſche Reihe umkehren, und unter das hinterſte Glied 1, und unter die andern immer von rückwärts die Potenzen der gegebenen Zahl ſetzen dürfen, und alsdenn die darüber ſtehenden Glieder damit multipliciren können, ſo hätte man eben das verrichtet.

Wir

Wir wollen eben dieſe Gleichung nehmen, wo x durch d ſollte dividiret werden, und alſo verfahren. Alſo $\frac{x}{d} = y$, und alſo $x = yd$.

Man ſetze nur blos die Gleichung hin, und ſtatt der x die y in eben der Potenz, alſo:

$y^3 + ay^2 + by + c$	darunter die Potenzen der d,
$d^3 \quad d^2 \quad d \quad 1$	von 1 angefangen, aber rückwärts, damit jedes
$d^3y^3 + d^2ay^2 + dby + c$	Glied multipliciret.

Alſo, wenn man eine Gleichung durch die Diviſion zu verändern hat, ſo ſetzet man nur anſtatt x die y, und unter y die Zahl, womit x ſoll dividiret werden, in einer Reihe von Potenzen rückwärts darunter, welche Reihe mit 1 anfängt, und bey jedem Gliede um eine Potenz ſteiget, und multipliciret die darüber ſtehenden Glieder damit.

Z. E. $x^3 + 2x^2 + x - 12 = 0$.

Es ſoll die Gleichung durch die Diviſion verändert werden, und $\frac{x}{2} = y$ ſeyn, alſo $x = 2y$. Nun ſetze man die Reihe hin, nur ſtatt x die y in eben der Potenz.

Alſo:

Alſo $y^3 + 2y^2 + y - 12 = 0$ darunter von rückwärts die Potenzen der 2 nach der Reihe, aber das erſte Glied mit 1 angefangen.

$$\begin{array}{cccc} 8 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

jedes oberſte mit dem unter ihm ſtehenden multipliciret.

$$8y^3 + 8y^2 + 2y - 12 = 0$$

Man bemerke aber wohl nachfolgendes. In einer Gleichung kömmt es oft vor, daß ein oder das andere Glied fehlet, deren Platz man dann mit einem Sterne bezeichnet, zum Zeichen, daß da nichts iſt. Bey der Veränderung der Gleichung durch die Multiplikation und Diviſion muß aber doch auch unter dieſem fehlenden Platz das gehörige Glied der darunter ſtehenden geometriſchen Progreſſion geſetzt werden, ob er ſchon nachher nicht mit dem über ihm ſtehenden kann multipliciret werden, weil da o oder nichts iſt, alſo auch unter den Strich kein Produkt dafür kömmt. Z. E. man ſoll die Gleichung $x^3 + 3x - 6 = 0$ durch die Multiplikation mit 3 verändern, ſo daß $3x = y$, alſo $x = \frac{y}{3}$, ſo ſetze man ſie alſo:

$$y^3 * + 3y - 6 = 0$$

nun darunter die Potenzen der 3 von 1 angefangen, damit die obern multipliciret.

$$1,\ 3,\ 9,\ 27$$

$$y^3 * + 27y - 162 = 0.$$

Und

Und wenn in eben dieſer Gleichung $\frac{x}{3} = y$, alſo $x = 3y$ wäre, ſo ſetzte man ſie auch ſo:

$$y^3 * + 3y - 6 = 0$$
$$27,\ 9,\ 3,\ 1,$$

$$\overline{27y^3 * + 9y - 6 = 0}$$ und alſo

Will man y^3 alleine haben, ſo werden durch ſeinen Coefficienten alle Glieder der Gleichung dividiret. Sie wird alsdenn $y^3 * + \frac{y}{3} - \frac{2}{9}$.

Oder wenn allgemein die Gleichung wäre

$$d^3y^3 + d^2ay^2 + dby + c = 0$$

ſo wird ſie durch d^3 dividiret.

$$\frac{y^3}{1} + \frac{ay^2}{d} + \frac{by}{d^2} + \frac{c}{d^3}$$

Auf ſolche Art pflegt man auch wol die durch die Diviſion veränderte Gleichungen vorzuſtellen.

§. 438. Nun können wir einige Dinge anbringen, die uns bey Auflöſung der Gleichungen ſehr nutzbar ſeyn werden, wovon wir etwas im Anfange des vorigen §. ſagten. Man kann, wenn in einer Gleichung Brüche vorkommen, ſie davon befreyen. Es geſchiehet dieſes durch die Multiplikation der Gleichungen (voriger §.) Man ſuchet nemlich eine Größe, welche der gemeinſchaftliche Faktor aller Nenner der Brüche iſt, die ſich in der Gleichung befinden, ſetzet die alsdenn als den Coefficienten von x. Z. E. ax, und denn dieſes $= y$,

$= y$, ſo wird man $x = \frac{y}{a}$, oder y durch dieſe Zahl dividiret bekommen, dieſes ſubſtituiret man in der Gleichung, ſo bekömmt man eine neue Gleichung, worinnen keine Brüche befindlich ſind. Man muß aber auch einen ſolchen Faktor wählen, daß, wenn nun das neue $\frac{y}{a}$ zur höchſten Potenz erhoben iſt, alsdenn auch unter y zur höchſten Potenz erhoben der höchſte Nenner aller Glieder der Gleichung kömmt, ſo kann man nachher durch die Multiplikation der Glieder mit dieſer Größe alle Brüche wegſchaffen. Haben alle dieſe Nenner der Brüche keinen gemeinſchaftlichen Faktor, ſo ſetzet man das Produkt aller dieſer Nenner zum Coefficienten von x. Z. E. man hätte die Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{16}x + 20 = 0.$$

Es iſt der gemeinſchaftliche Faktor der Nenner, den man nehmen kann, $= 4$, alſo ſetze man $4x = y$, folglich $x = \frac{y}{4}$, und nun mache man die neue Gleichung

$$x^3 = \frac{y^3}{64}$$

$$-\tfrac{3}{4}x^2 = -\frac{3y^2}{64}$$

$$+\tfrac{3}{16}x = +\frac{3y}{64}$$

$$+20 = +20$$

$$0 = \frac{y^3}{64} - \frac{3y^2}{64} + \frac{3y}{64} + 20$$

multipliciret mit 64. $0 = y^3 - 3y^2 + 3y + 1280$

Man hätte die Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 + \tfrac{11}{4}x - \tfrac{3}{4} = 0$$

Hier ſetze man $2x = y$, weil 2 der gemeinſchaftliche Faktor aller Nenner aller Brüche in dieſer Gleichung iſt, alſo $x = \frac{y}{2}$, und nun ſubſtituiret

alſo:

$$x^3 = \frac{y^3}{8}$$

$$-3x^2 = -\frac{3y^2}{4}$$

$$+\tfrac{11}{4}x = +\frac{11y}{8}$$

$$-\tfrac{3}{4} = -\tfrac{3}{4}$$

alſo $0 = \frac{y^3}{8} - \frac{3y^2}{4} + \frac{11y}{8} - \tfrac{3}{4}$

das multipliciret mit 8, $0 = y^3 - 6y^2 + 11y - 6$

Die

Die Wurzeln von dieſer letzten Gleichung ſind $y=+1$, $y+=2$, $y=+3$, und da das $x=\frac{y}{2}$, ſo iſt alſo $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $x=\frac{3}{2}$. Nun allgemein $x^3+\frac{ax^2}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{c}{f}=0$. Man ſetze alle Nenner der Brüche zu x oder $bdf.x=y$, ſo wird $x=\frac{y}{bdf}$.

Folglich: $x^3=+\frac{y^3}{b^3d^3f^3}$

$$+\frac{ax^2}{b}= \quad +\frac{ay^2}{b^3d^2f^2}$$

$$+\frac{cx}{d}= \quad +\frac{cy}{bd^2f}$$

$$+\frac{e}{f}= \quad +\frac{e}{f}$$

$$0=\frac{y^3}{b^3d^3f^3}+\frac{ay^2}{b^2d^2f^2}+\frac{cy}{bd^2f}+\frac{e}{f}$$

multiplicirt mit $b^3d^3f^3$. $0=y^3+adfy^2+b^2cdf^2y+b^3d^3f^2e$

worunter alſo keine Brüche ſich befinden.

§. 439. Es kann aber auch durch dieſe Veränderungen der Gleichungen durch die Multiplikation oder Diviſion geſchehen, daß, wenn in einer Gleichung einige von den Coefficienten der Größen irrational ſind, dadurch einige oder auch zuweilen alle rational gemacht werden können.

Z. E. in folgender Gleichung: $x^3 + x^2\sqrt{5} - 3x - 3\sqrt{5} = 0$.

Man ſetze nun $x\sqrt{5} = y$

$x = \frac{y}{\sqrt{5}}$ und man kann ſich allerdings x ſo vorſtellen, weil y darnach eingerichtet ſeyn muß. Nun ſubſtituiret, folglich:

$$x^3 = \left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^3 = + \frac{y^3}{5\sqrt{5}}$$

$$+ x^2\sqrt{5} = \left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \sqrt{5} = + \frac{y^2\sqrt{5}}{5} = \frac{y^2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{y^2}{\sqrt{5}}$$

$$- 3x = \frac{y}{\sqrt{5}} \cdot - 3 = \qquad - \frac{3y}{\sqrt{5}}$$

$$- 3\sqrt{5} = \qquad - 3\sqrt{5}$$

$$0 = \frac{y^3}{5\sqrt{5}} + \frac{y^2}{\sqrt{5}} - \frac{3y}{\sqrt{5}} - 3\sqrt{5}$$

multipliciret mit $5\sqrt{5}$

$$0 = y^3 + 5y^2 - 15y - 75$$

Hievon ſind die Wurzeln, weil zwey Folgen der Zeichen und eine Abwechſelung iſt, zwey negative und eine poſitive, nemlich -5, ferner $+\sqrt{15}$ und $-\sqrt{15}$, und weil $x = \frac{y}{\sqrt{5}}$, ſo iſt, wenn man für y die gefundene Werthe ſetzet, $x = - \frac{5}{\sqrt{5}} = - \frac{\sqrt{5} \cdot + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = - \sqrt{5}$.

Ferner;

Ferner: $x = +\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = +\sqrt{3}$ und noch $x = -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{3}$. Die drey Werthe für x alſo: $-\sqrt{3}$, $+\sqrt{3} - \sqrt{5}$.

§. 440. Wenn in einer Gleichung das letzte Glied, worin das Produkt der Wurzeln ſich befindet, ſehr groß iſt, und ſehr viele Faktores hat, ſo iſt es ſehr mühſam, durchs Verſuchen den Faktor zu finden, wodurch die Glieder der Gleichung ſich aufheben, und welches alſo die Wurzel iſt. Man hat daher eine Methode erdacht, die Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche ein kleiners letztes Glied hat, und wo es alſo nicht ſo mühſam iſt, dieſes in ſeine Faktores aufzulöſen, und alſo die Wurzel der Gleichung zu finden. Es geſchiehet dieſes durch die Veränderung der Gleichung, durch die Addition oder Subtraktion, die wir §. 437. gelehret haben, wo wir es auch ſchon ſagten, daß wir hier den Nutzen dieſer Verwandlungen in etwas berühren wollten. Man gebrauchet eine von dieſen Methoden, nachdem die Zeichen der Größen beſchaffen ſind. Man ſetze nemlich ſtatt x eine willkührliche Zahl, die wir allgemein a nennen wollen, in die Gleichung mit dem Plus- oder Minuszeichen, welches man beydes verſuchen kann, und ſiehet, was alle Glieder der Gleichung nach dieſer Vorausſetzung zuſammen gerechnet geben, wenn dieſes eine Zahl iſt, die weniger Faktoren hat, als vorher das letzte Glied hatte, ſo ſetze man nach den Umſtänden $x = y \pm a$, ſo bekömmt man eine neue Gleickung, wo

man, weil das letzte Glied weniger Faktoren hat, die ganzen Werthe von y auch weit leichter finden, und daraus die Werthe von x beſſer beſtimmen kann. Z. E. $x^3 + 2x^2 - 56x - 192 = 0$. Es läßt ſich 192 in ſehr viele Faktores zertheilen. Z. E. 1, 2, 3, 4, 6, 8 ꝛc. und auch in die Faktoren, die auch noch zum Theil aus der Multiplikation zweyer ſolcher Faktoren entſpringen. Setzet man nun -3 ſtatt x ſo kömmt -33 heraus, welche Zahl weit weniger Faktoren als -192 hat. Man ſetze alsdenn $x + 3 = y$, folglich $x = y - 3$, nun ſubſtituiret man

$$\begin{aligned} \text{alſo } x^3 &= (y-3)^3 &&= y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ +\ 2x^2 &= (y-3)^2 . +2 = &&+ 2y^2 - 12y + 18 \\ -\ 56x &= (y-3). -56 = && -56y + 168 \\ -192 &= && -192 \\ \hline 0 &= && y^3 - 7y^2 - 41y - 33 \end{aligned}$$

Nun hat -33 weit weniger Faktores als -192. Sie ſind: 1, 3, 11, und weil hier in der Gleichung zwey Folgen der Zeichen und eine Abwechſelung iſt, ſo ſind gewiß zwey Wurzeln negativ, und eine poſitiv. Wir wollen alſo ſie verſuchen, und erſt die negativen Größen nehmen. Wenn man -1 ſtatt y in die Gleichung ſetzet, ſo wird ſie ſchon $=0$, alſo iſt $y = -1$ und $y + 1 = 0$, wenn man damit die Gleichung dividiret, ſo findet man $y^2 - 8y - 33 = 0$, und die aufgelöſet giebt $y = +4 \pm 7$, alſo einmal $y = +11$, einmal $y = -3$; daraus findet man, weil $x = y - 3$, die Werthe von $x = -4$ $x = +8$ und $x = -6$, welches auch die Werthe für x ſind.

Noch

Noch ein Exempel. Man hätte die Gleichung:

$$x^3 + 19x^2 + 94x + 120 = 0.$$

Hier hat 120 ſehr viele Faktores. Setzet man nun mal willkührlich -4 ſtatt x in die Gleichung, ſo kömmt -16 heraus, nachdem man die Plus- und Minusgrößen addirt hat, welches weit weniger Faktores hat. Man ſetze alſo $x + 4 = y$ oder $x = y - 4$, und ſubſtituiret anſtatt x die $y - 4$, ſo wird

$$\begin{array}{lrrrr} x^3 = & y^3 & -12y^2 & +48y & -64 \\ +19x^2 = & & +19y^2 & -152y & +304 \\ +94x = & & & +94y & -376 \\ +120 = & & & & +120 \\ \hline 0 = & y^3 & +7y^2 & -10y & -16 \end{array}$$

Die Faktores von 16 ſind 1, 2, 4, 8. Wenn wir + und -1 ſtatt y nehmen, ſo gehen die Glieder der Gleichung nicht auf, aber durch $+2$ geht alles auf, das iſt alſo eine Wurzel der Gleichung. Wenn man nun die andern beyden durch die Diviſion der Gleichung, durch $y - 2$ ſuchet, ſo findet man ſie. Denn wenn $y = 2$, ſo iſt $y - 2 = 0$, alſo dividiret

$$\begin{array}{ll} x-2) & y^3 + 7y^2 - 10y - 16 \,|\, y^2 + 9y + 8 \\ & y^3 \pm 2y^2 \\ \hline & +9y^2 - 10y \\ & +9y^2 \mp 18y \\ \hline & +8y - 16 \\ & +8y - 16 \end{array}$$

weil alſo $y^2 + 9y + 8 = 0$

ſo iſt

$$y^2 + 9y + \frac{81}{4} = -8 + \frac{81}{4} = \frac{49}{4}$$

$$y - \qquad -\frac{9}{2} \pm \frac{7}{2}$$

alſo einmal $y = -\frac{16}{2} = -8$, einmal $= -\frac{2}{2} = -1$, und einmal haben wir es gleichfalls ſchon $+2$ gehabt, und da x war $= y - 4$, ſo iſt alſo daher $x = -12$, und auch $= -5$, und auch $= -2$.

§. 441. Man pflegt auch gerne in den Gleichungen das zweyte Glied wegzuſchaffen, um die Auflöſung der Gleichung durch das Verſuchen mit den Faktoren zu erleichtern. Es iſt uns ſchon bekannt, daß in dem zweyten Gliede einer Gleichung die Summe der Wurzeln ſich befindet §. 427. Wenn man nun eine ſolche Veränderung mit ihr vornehmen kann, daß die Wurzeln ſich einander durch die Addition aufheben, und alſo ihre Summe $= 0$ wird, ſo wird das zweyte Glied allezeit $= 0$ werden, und alſo wegfallen. Wenn man jede Gleichung vom dritten Grade allgemein ausdrücket, ſo iſt ſie $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Nun ſtecket in p die Summe aller drey Wurzeln, die muß alſo null werden. Um nun hiervon einen allgemeinen Ausdruck zu bekommen, wo das zweyte Glied aus einer zuſammengeſetzten Größe beſtehet, da man es alſo leicht $= 0$ ſetzen kann, ſo ſey einmal $x = y + e$, ſo wird aus der Gleichung

$$
\begin{array}{rlllll}
x^3 & = y^3 & + 3ey^2 & + 3e^2y & + e^3 \\
+ px^2 & = & + py^2 & + 2pey & + pe^2 \\
+ qx & = & & + qy & + qe \\
+ r & = & & & + r \\
\hline
o & = y^3 & \begin{matrix} + 3e \\ + p \end{matrix} & \left\{ y^2 \begin{matrix} + 3e^2 \\ + 2pe \\ + q \end{matrix} \right\} y & \begin{matrix} + e^3 \\ + pe^2 \\ + qe \\ + r \end{matrix}
\end{array}
$$

Auf die Art aber kann man ſich doch alle Gleichungen vom dritten Grade, die alle Glieder haben, vorſtellen. Soll nun hier das zweyte Glied $= o$ werden, ſo müſte die Gleichung in eine andere verwandelt werden, wo die Summe der Wurzeln, welches die Coefficienten des zweyten Gliedes ſind, oder wo hier die $3e + p = o$ würde, wenn aber $3e + p = o$.

ſo iſt

$$3e = -p$$

$$e = -\frac{p}{3}$$

Hier ſehe ich alſo, was ich, wenn ich in einer cubiſchen Gleichung, wo das zweyte Glied plus zum Zeichen hat, und wo ich anſtatt x die $y + e$ ſetzen will, dem e für einen Werth geben muß; nemlich es muß $-\frac{1}{3}p$ ſeyn. Wenn ich alſo anſtatt x geſetzet hätte $x = y - \frac{1}{3}p$, ſo wäre die Summe der Wurzeln $= o$ geworden, und das zweyte Glied wäre weggefallen. Eben ſo kann man zeigen, daß, wenn die Gleichung ſo geweſen wäre,

$x^3 - px^2$ ꝛc., nemlich daß das zweyte Glied unter dem Minuszeichen geſtanden hätte, man ſtatt e das $+\frac{1}{3}p$ hätte ſetzen müſſen, und daß alsdenn, wenn man anſtatt $x = y + e$ genommen hätte, $x = y + \frac{1}{3}p$ durch die Subſtitution dieſer Größe anſtatt x das zweyte Glied weggefallen wäre. Hieraus fließet folgende Regel:

Will man bey cubiſchen Gleichungen das zweyte Glied wegſchaffen, ſo ſetze man ſtatt x **eine andere unbekannte Größe, ein y, und füge ihr den dritten Theil des Coefficienten des zweyten Gliedes mit entgegengeſetzten Zeichen zu, als es in der Gleichung hat, ſubſtituiret das ſtatt x in der Gleichung, ſo wird das zweyte Glied wegfallen.**

Anmerkung. Auf eine ähnliche Art kann man beweiſen, daß, wenn man aus einer Gleichung, ſie ſey von welchem Grade ſie wolle, das zweyte Glied wegſchaffen will, man gleichfalls ſtatt x eine andere unbekannte Größe ſetzet, der man auch den Coefficienten des zweyten Gliedes mit entgegengeſetzten Zeichen, als er würklich in der Gleichung hat, zufüget, aber ihn durch die Zahl dividiret, welche der Exponent der höchſten Potenz von der unbekannten Größe in der Gleichung iſt. Das wäre allgemein ausgedrückt, wenn die Gleichung von mten Grade wäre, oder die höchſte unbekannte Größe wäre x^m. Der Coefficient des zweyten Gliedes hieße $\pm p$, nachdem ſein Zeichen $+$ oder $-$ iſt, ſo wird das zweyte Glied wegfallen, wenn man ſtatt x ſetzet

y

$y \pm \frac{p}{m}$, nemlich wenn das zweyte Glied in der Gleichung + iſt, ſo wird $x = y - \frac{p}{m}$ geſetzet. Iſt das zweyte Glied −, ſo wird $x = y + \frac{p}{m}$ geſetzt. Wir wollen dieſes alles nun durch ein Paar Exempel erläutern, die wir aber nur aus Gleichungen vom dritten Grade hernehmen wollen, um nicht zu ſchwer und weitläuftig zu werden.

§. 442. Es ſey $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. Hier ſoll das zweyte Glied weggeſchaffet werden, alſo nach der Regel muß man ſetzen $x = y + \frac{9}{3}$, oder $x = y + 3$.

Folglich:

$$\begin{array}{rrrrr} x^3 = & y^3 + 9y^2 & + 27y & + 27 \\ -9x^2 = & -9y^2 & -54y & -81 \\ +26x = & & +26y & +78 \\ -24 = & & & -24 \\ \hline 0 = & y^3 \quad * & -y & * \end{array}$$

Hier iſt das letzte Glied auch weggefallen, ohne daß wir es eben geſuchet hätten, welches aber nicht allezeit geſchiehet, ſondern nur hier zugetroffen iſt; welches daher kömmt, weil eine Wurzel von $x = 0$ ſeyn wird, und daher auch eine Wurzel von $x = 3$ hier ſeyn muß, denn wenn $y = 0$, ſo iſt alſo $x = 0 + 3 = 3$, alſo bey dieſem Fall iſt ſogar die cubiſche Gleichung in eine reine quadratiſche verwandelt.

Denn wenn $y^3 - y = 0$, ſo iſt $y^3 = + y$

$$\frac{y^3 = +y}{y^2 = +1} : y$$

$$y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Und da das letzte Glied weggefallen iſt, ſo muß die dritte Wurzel von $y = 0$ ſeyn §. 437. Da nun $x = y + 3$, ſo muß, wenn man für y nachgerade ſeine Werthe ſetzet, ein Werth von $x = 0 + 3 = 3$, ein Werth $x = +1 + 3 = +4$, ein Werth $x = -1 + 3 = +2$ ſeyn, welches auch ſich ſo verhält. Es ſey die Gleichung: $x^3 + 9x^2 + 14x - 24 = 0$. Es ſoll hier auch das zweyte Glied weggeſchaft werden, alſo nach der Regel ſey nun $x = y - \frac{9}{3} = y - 3$, folglich

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ + 9x^2 & = & + 9y^2 - 54y + 81 \\ + 14x & = & + 14y - 42 \\ - 24 & = & - 24 \\ \hline 0 & = & y^3 \quad * \quad - 13y - 12 \end{array}$$

Suchet man die Wurzeln, ſo findet man $y = -1$, ferner $y = -3$ und $y = +4$, und daraus $x = +1$, und ferner $x = -4$ und $x = -6$.

§. 443. Man hat auch Methoden, wie man das dritte und vierte Glied, oder welches man will, aus einer Gleichung ſchaffen kann, welches wir aber hier nicht vortragen werden, weil es von wenig beträchtlichem Nutzen iſt. Das zweyte Glied aber ſchaft man gerne weg, weil die Rechnung mit den Wurzeln der Gleichung dadurch kürzer gemacht wird. Indeſſen läßt ſich auch, man

mag

mag ein Glied wegſchaffen was man will, nur ein Glied, worin x befindlich iſt, wegſchaffen, und ſo ſchön es wäre, wenn man alle Glieder aus jeder Gleichung, ſie ſey ſo groß als ſie wolle, bis auf das erſte und letzte wegſchaffen könnte; ſo iſt das doch nicht möglich. Es iſt z. E. nicht möglich, eine jede cubiſche Gleichung ſo zu verändern, daß man $y^3 + c = 0$ endlich hätte, und alsdenn aus y das x finden könnte. Es leuchtet ſchon daraus hervor, weil die vollſtändige cubiſche Gleichung von x drey mögliche Werthe haben kann, da die von $y^3 + c = 0$, oder $y^3 = - c$ nur einen möglichen Werth, und zwey unmögliche hat §. 432, und alſo die Werthe von x ſich durch den Werth von y nicht finden ließen.

§. 444. So wie man aus einer Gleichung ein Glied wegſchaffen kann, ſo kann man auch machen, daß ſie alle wieder herein kommen, wenn man es nöthig findet. Man darf nur die Wurzel um eine Zahl vermehren, oder ſtatt x die y + 1 oder y + 2 ꝛc. ſetzen, und nachher gehörig ſubſtituiren. Man habe die Gleichung $y^3 - 13y - 12$, worin das zweyte Glied fehlet, und deren Wurzeln − 1, − 3 und + 4 ſind. Setzet man nun $y = x + 1$, ſo bekömmt man dieſe folgende Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} y^3 & = & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ -13y & = & -13x - 13 \\ -12 & = & -12 \\ \hline 0 & = & x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \end{array}$$

deren Wurzeln − 2, − 4 und + 3 ſind.

§. 445.

§. 445. Wir haben bis daher gezeiget, wie man die würklichen Wurzeln einer Gleichung durch Verſuche finden könnte, da man ſtatt x einen von den gefundenen Faktoren des letzten Gliedes in die Gleichung ſetzet. Wenn nun eine Größe viel Faktoren hat, ſo iſt dieſes mühſam, ſie alle zu verſuchen. Man hat alſo auf Methoden gedacht, die Gränzen der Wurzeln zu finden, das heißt, die Zahlen, zwiſchen welchen die möglichen Wurzeln fallen. Wenn man zwey poſitive Zahlen hat, davon die eine größer, und die andere kleiner iſt als die Wurzeln, ſo heißen dieſe beyden Zahlen die Gränzen der poſitiven Wurzeln. Hat man eben ſolche zwey negative Zahlen, ſo heißen ſie die Gränzen der negativen Wurzeln. Wir wollen hievon etwas weniges ſagen. Wir wollen dieſe Methode von cubiſchen Gleichungen erklären, und ſie alsdenn auch darauf anwenden. Sie beruhet auf richtigen Vernunftſchlüſſen. Um ſich die Sache bequem zu machen, verwandle man die Gleichung in eine andere, in welcher das zweyte Glied fehlet §. 440, und alsdenn ſuche man die Gränzen der Wurzeln durch eine Gleichung. Wir werden dieſes beſſer durch Exempel als mit Worten zeigen können, wir wollen das Exempel ganz allgemein ſetzen. Man habe die Gleichung, worin das zweyte Glied weggeſchaft iſt:

$$x^3 - px + c = 0, \text{ ſo iſt } x^3 + c = + px.$$

Folglich muß px größer als x^3 ſeyn, denn noch der Zuwachs von c zu x^3 macht, daß $x^3 + c$ erſt ſo groß als px wurde.

Alſo

Alſo $px > x^3$

$$\frac{px > x^3}{p > x^2} : x$$

den $\sqrt{}$ ausgezogen

$$\sqrt{p} > x$$

Hier findet man ſchon eine Zahl die größer als die Wurzel iſt. Nun wollen wir noch eine ſuchen, die auch kleiner iſt. Weil $x^3 - px + c = 0$, ſo iſt $x^3 + c = px$, alſo c allein gewiß kleiner als px, weil noch x^3 hinzu kommen muß, um es ſo groß als px zu machen. Alſo:

$$c < px$$

$$: p$$

$$\frac{c}{p} < x$$

Hier haben wir eine Größe, die kleiner als die Wurzel iſt. Die poſitive Wurzel liegt alſo zwiſchen $\sqrt{p}$ und zwiſchen $\frac{c}{p}$, und ſonſt muß man keine Faktores verſuchen. Exempel in Zahlen:

$$x^3 - 25x + 36 = 0$$

Alſo iſt $x^3 + 36 = 25x$

folgl. iſt gewiß $x^3 < 25x$

$$: x$$

$$x^2 < 25$$

$$x < \sqrt{25} \text{ oder } < 5$$

Ferner:

Ferner: weil $x^3 + 36 = 25x$

so iſt gleichfalls $36 < 25x$ $:x$

$\frac{36}{25} < x$

Aber $\frac{36}{25} = 1,44$. Die poſitive Wurzel lieget alſo zwiſchen 1, 44 und 5, oder wenn man ſie in ganzen Zahlen verſuchen will, hat man nicht nöthig, eine kleinere als 2, und gröſſere als 4 zu verſuchen, weil 5 ſchon zu groß iſt. Die poſitive rationale Wurzel von dieſer Gleichung $x^3 - 25x + 36 = 0$, iſt auch würklich $= + 4$, die andern beyden ſind irrational, und iſt eine $+ 1, 6\ldots$ die andere $- 5, 6\ldots.$

Man muß auf eine ähnliche Art in andern Fällen auch verfahren. Es iſt immer bey jeder Gleichung eine neue Arbeit, und dazu kann man keinesweges ſagen, ob nicht die Wurzeln in viel engere Schranken eingeſchloſſen ſind, als wir hierdurch finden können. Wie z. E. ſich bey dieſem Exempel mit der Wurzel $+ 1, 6\ldots$ ſchon zeiget. Wir hätten ſie müſſen in weit engere Schranken eingeſchloſſen finden, wenn man ſich nicht zu Tode verſuchen wollte. Dieſes Verfahren ſchaft alſo nicht ſo ſehr viel Nutzen.

§. 446. Wir haben bis daher in allen unſern Exempeln **rationale** Wurzeln gebrauchet, wobey man durch Verſuche die Wurzeln der Gleichung fand. Aber auch ſehr oft ſind die Wurzeln der Gleichungen **Irrationalgrößen**, und dieſe wollen wir jetzt durch eine Methode zu finden lehren,

ren, welche man die Approximation oder Nä-
herung nennet, da man zwar die Wurzel nicht genau findet, aber ſich doch derſelben, ſo viel als man will, nähern kann.

Man verfähret hiebey alſo: man ſetze in der auf o gebrachten Gleichung y anſtatt o, und hiedurch wird die Größe angezeiget, welche entſtehet, wenn man x nach gerade = 1 oder 2, 3 ꝛc. ſetzet, und alsdenn die Minus- und Plusgrößen in einer Gleichung addiret hat. Dieſes y wird auch o, wenn man die wahre Wurzel hat, weil alsdenn alle Glieder der Gleichung nur o zur Summe geben. Z. E. in der Gleichung:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 18 = 0.$$

Wenn man ſtatt o die y ſetzet, ſo iſt ſie:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 18 = y.$$

Nähme man nun z. E. $x = -3$ an, und ſubſtituirte das in der ganzen Gleichung anſtatt x, ſo würde $= y = 0$, hätte man aber $x = -2$ geſetzet, ſo würde $y = +10$. Nun ſetze man ſtatt x in der Gleichung nachgerade eine Zahl von o an, mit Minus- und Pluszeichen, und ſehe zu, was alsdenn y für Werthe bekömmt. Bekömmt man zwey auf einander folgende Werthe für y, wovon der eine plus der andere minus iſt, ſo lieget die Wurzel zwiſchen den beyden Zahlen, die man anſtatt x geſetzt hatte, weil der Uebergang von plus zu minus nicht anders als durch o geſchehen kann, und daher nothwendig zwiſchen beyden Zahlen eine Größe liegen muß, welche die Gleichung, oder

das

das dafür geſetzte y null machte. Diejenige Zahl wird der am nächſten ſeyn, welche y = o macht, welches die kleineſte iſt, weil dieſes doch o am nächſten lieget. Nun hat man zwar eine Zahl, die der wahren Zahl näher lieget, aber noch nicht die wahre Zahl.

Man ſetze alſo dieſe Größe, und noch eine Größe dazu, die man p etwa nennen will, ſey die wahre. Wenn alſo die beyden Zahlen, wozwiſchen die wahre Zahl lieget, auf einander folgen, ſo wird p ein Bruch ſeyn. Nun ſetze man in die Gleichung anſtatt x die Zahl, die am nächſten an o lag, plus p. Es ſoll mal dieſe Zahl allgemein a heißen, ſo ſetze man in die Gleichung ſtatt x die a + p, und verwandle nun die Gleichung in dieſe. Wenn die Gleichung eine cubiſche iſt, ſo wird man auch p in dieſer cubiſchen und quadratiſchen Potenz bekommen, und es würde einem nichts helfen, daß man ſo verfahren hätte. Aber alsdenn, weil doch p ein Bruch iſt, werfe man die andern Potenzen von p weg, bis auf das einfache p mit ſeinem Coefficienten, und ſuche den Werth von p aus einer Gleichung. Wenn man das gefunden hat, ſo addire man es zu dem, was man in die Gleichung ſtatt x geſetzet hatte. So hat man den Anfang der Wurzel. Weil aber dieſes nicht völlig wahr iſt, ſo darf man nur die erſten Ziffern von p dazu ſetzen, nemlich nur ſo viel, als (weil p als Decimalbruch vorgeſtellet wird) zwiſchen ſeiner höchſten Ziffer und der Stelle der ganzen Zahl ſich die o befinden, wenn man das zu der an-

angenommenen Zahl addirt, ſo hat man den Anfang der wahren Wurzel, der man, wie wir nachher zeigen, ſich noch mehr nähern kann.

Es kann auch wol kommen, daß man ſie ſogleich durch das p ganz erhält, wenn nemlich die Wurzel eine Zahl mit einem ſolchen endlichen Decimalbruch wäre, der durch p gleich beſtimmet würde.

§. 447. Man habe die Gleichung:

$$x^3 - 4x^2 - 8x + 16 = 0.$$

Setzet man nun für 0 die y alſo:

$$x^3 - 4x^2 - 8x + 16 = y.$$

und nimmt nun zuerſt einen Werth für x an, ſo wird auch y eine gewiſſe Größe bekommen. Weil in dieſer Gleichung zwey Abwechſelungen der Zeichen und eine Folge iſt, ſo hat ſie alſo zwey poſitive und eine negative Wurzel. Wir wollen es alſo mit poſitiven Größen verſuchen. Setzet $x = 0$, ſo wird $y = + 16$, weil alle Glieder, womit $x = 0$ multipliciret ſind, zu Null werden, indem, wie wir ſchon mehrmal erwähnet, eine Größe, die mit 0 multiplicirt iſt, zu 0 wird, es bleibt alsdenn nur + 16 übrig. Setzet man $x = + 1$, und rechnet nun alle Glieder zuſammen, ſo kömmt heraus + 5, und alſo y wird $= + 5$. Setzet man $x = + 2$, ſo kömmt aus allen Gliedern heraus − 8, alſo $y = - 8$. Folglich könnte man daraus ſchon die Tabelle machen:

$x = \quad 0$, ſo iſt $y = + 16$
$x = + 1$, ſo iſt $y = + \quad 5$
$x = + 2$, ſo iſt $y = - \quad 8$

Hätten wir hier einen richtigen Werth für x getroffen, ſo wäre $y = 0$ geworden, und wir hätten die Wurzel der Gleichung getroffen.

Allein hier finden wir doch, daß, wenn man $x = 1$ und $x = 2$ ſetzet, die y von beyden, oder die Summe aller Glieder der Gleichung zum erſtenmal eine poſitive, und zum zweytenmal eine negative Größe geben. Daraus folgert man, daß die Wurzel zwiſchen + 1 und + 2 lieget, weil der Uebergang aus plus in minus durch 0 geſchehen muß. Die Wurzel wird alſo 1 und noch ein Bruch seyn. Dieſer Bruch ſey nun mal p. Alſo die Wurzel ſey $1 + p$. Das ſubſtituire man nun in der Gleichung anſtatt x. Alſo in der Gleichung:

$$x^3 - 4x^2 - 8x + 16 = 0$$

wird nun

$$\begin{aligned} x^3 &= (1+p)^3 &&= 1 + 3p + 3p^2 + p^3 \\ -4x^2 &= (1+p)^2 \cdot -4 &&= -4 - 8p - 4p^2 \\ -8x &= (1+p) \cdot -8 &&= -8 - 8p \\ +16 &= &&+16 \\ \hline 0 &= &&+5 - 13p - p^2 + p^3 \end{aligned}$$

Weil nun p ein Bruch iſt, ſo ſind ſeine Potenzen noch kleiner als es ſelbſt, man laſſe alſo dieſe weg, (weil man auch ſonſt durch dieſe Veränderung nichts gewonnen hätte,) und ſetze nur blos:

$$0 = 5 - 13p$$

folglich wird

$$13p = 5$$

$p = \frac{5}{13}$. dieſes zu Decimalbrüchen gemacht $p = 0,38\ldots$

Von dieſen aber kann man nur eine Ziffer gebrauchen, welche richtig iſt, (der Beweis hievon iſt nicht für dieſe Einleitung. Siehe Käſtners Analyſis endlicher Größen, S. 153. ff.) nemlich die 0, 3. Alſo wäre eine Wurzel von $x = 1 + p = 1,3$, alſo $p = 0,3$.

§. 448. Allein nun hat man doch nur einen Theil der Wurzel im Decimalbruche noch zu der ganzen Zahl angehänget, und ſie iſt gewiß mehr. Man kann ſich aber der wahren Wurzel noch mehr nähern. Was nun an der wahren Wurzel noch fehlet, ſey $= q$. Abermals ein Bruch, der noch kleiner als p iſt. Nun nehme man die Gleichung, worin man das p gebracht, und worin man die Hauptgleichung verwandelt hatte, und ſubſtituire anſtatt p beſtändig $0,3 + q$. Es wäre dieſes die Gleichung, die wir eben gehabt:

$$p^3 - p^2 - 13p + 5 = 0.$$

Setzet man nun ſtatt p die $0,3 + q$. ſo wird

$$\begin{array}{rll} + \; p^3 = (0,3+q)^3 & = q^3 + 0,9 \left\{ \begin{array}{l} +0,27 \\ q^2 = 0,6 \\ -13, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} +0,027 \\ q - 0,09 \\ -3,9 \end{array} \right. \\ - \; p^2 = (0,3+q)^2 - 1 = & -1, & \\ -13p = (0,3+q). - 13 = & & \\ +5 \quad = & & +5 \\ \hline 0 \quad = & q^3 - 0,1q^2 - 13,33q + 1,073 & \end{array}$$

(NB. Die Werthe, die vor den Clammern ſtehen, gehören alle zu der Größe, die dahinter, als zu q^2 und zu q).

Man addire dieſe Größen. Hier werfe man abermals alles weg, was in q^3 und q^2 multipliciret iſt, weil das ſehr kleine Brüche ſind. Man ſetze alſo: $0 = -13,33q + 1,037$

$$13,33q = 1,037$$

$$q = \frac{1,037}{13,33}.$$ Dividiret man

würk-

würklich ſo hat man $q = 0{,}070 \ldots$ Das addire man zu p oder zu 0,3, ſo bekömmt man ſchon $x = 1 + p + q = 1{,}37 \ldots$

Man kann nun noch weiter ſuchen, und ſetzet alsdenn, weil man alsdenn durch q noch nicht alle Decimalbrüche bekommen hat, $q = 0{,}07 + r$, ſubſtituiret das in der Gleichung, worin q iſt, anſtatt q, wirfet nachher gleichfalls die höhern Potenzen von r weg, und findet dann wieder einen Werth der Wurzel in tauſend Theilen, den man zu den übrigen addirt. Für dieſe erſten Gründe mag es genug ſeyn, unſere Leſer bis hieher geführet zu haben. Wenn man nun den durch Annäherung gefundenen Werth der Wurzel ſtatt x in die Gleichung ſubſtituiret, ſo wird ſich die Gleichung deſto mehr der 0 nähern, je näher man dem wahren Werthe von x gekommen iſt.

Wir wollen mal in unſere Hauptgleichung unſere gefundene Werthe ſubſtituiren: $x^3 - 4x^2 - 8x + 16 = 0$. Es ſey nun $x = 1{,}37$.

So iſt $x^3 = (1{,}37)^3$	$= +2{,}571353$	
$-4x^2 = (1{,}37)^2 \cdot -4 =$		$-7{,}5076$
$-8x = (1{,}37) \cdot -8$		$-10{,}96$
$+16 =$	$+16$	

wenn man die Plusgrößen und Minusgrößen addirt, ſo ſind Plusgrößen $+18{,}571353$

und Minusgrößen ſind zuſammen $-18{,}4676$, alſo der Unterſchied zwiſchen beyden iſt $-0{,}103753$ daß die Gleichung nicht 0 wird.

Da 1, 38 für die Wurzel genommen, ſchon zu viel wäre, und 1, 37 zu wenig iſt, ſo iſt die wahre Wurzel kein hundert Theil von 1,37 verſchieden. Wenn man nun $x = 1,37$ nimmt, und alſo mit $x - 1, 37 = 0$ die Gleichung dividiret, ſo kann man nachher die andern beyden Wurzeln zwar nicht genau, doch ſo ziemlich finden.

§. 449. Wir haben verſchiedene der vornehmſten Stücke von den cubiſchen Gleichungen, welche ſich auch zum Theil noch auf höhere Gleichungen anwenden laſſen, ſo viel wir für dieſe erſten Anfangsgründe nöthig zu ſeyn erachtet haben, geſetzet. Wir bemerken noch einige wenige Stücke, womit wir dieſes Kapitel beſchließen wollen. Man hat noch eine Regel, biquadratiſche Gleichungen, oder Gleichungen, wo die größte unbekannte Größe in der vierten Potenz iſt, aufzulöſen, welche vor zweyhundert Jahren ein Italiäner Pombelli gegeben hat, und wodurch die biquadratiſche Gleichungen auf cubiſche gebracht werden, welche aber immer ſehr mühſam bleibet, und die wir hier nicht anführen wollen. Wir bemerken noch und wiederholen es gleichſam, daß eine Gleichung ſo viel Wurzeln hat, als die höchſte Potenz der unbekannten Größe Abmeſſungen hat. So hat z. E. eine Gleichung, wo die unbekannte Größe in der 5ten Potenz ſich befindet, auch 5 Wurzeln u. ſ. w. Dieſes können poſitive, auch negative Wurzeln, auch vermiſcht ſeyn, rationale und irrationale, die man nur durch Näherung findet. Es können auch unmögliche Wurzeln ſich darin befinden, und haben

wir bey den letzten zu merken, daß ſie allezeit Paarweiſe, wo ſie ſind, ſich befinden. Daß alle reine Gleichungen, ſie ſeyn von welchem Grade ſie wollen, wenn der Exponent ungrade iſt, nur eine mögliche Wurzel, und wenn er gerade iſt, nur zwey mögliche Wurzeln habe. So hat $x^3 = a$ nur eine mögliche Wurzel, und $x^8 = b$ kann nur zwey mögliche Wurzeln haben. Neuton hat eine Regel gegeben, wodurch man öfters den größten Theil der unmöglichen Wurzeln entdecket, die aber doch nicht allgemein iſt, und die wir nach unſerer Abſicht hier nicht anführen können, wie überhaupt die ganze völlige Lehre davon nach unſrer Abſicht hier nicht her gehöret.

§. 450 Wir könnten hier die Arithmetik beſchließen, wenn wir nicht noch ein Paar Worte von unbeſtimmten Aufgaben ſagen wollten. Man könnte über dieſe Materie allein ein ſehr großes Buch ſchreiben, und man kann hieraus ſehen, wie weitläuftig dieſe Wiſſenſchaft iſt. Wir wollen nur einige Begriffe davon geben. Wenn man auf eine Aufgabe mehr als eine richtige Antwort geben kann, ſo heißt ſie unbeſtimmt: man ſollte z. E. drey Zahlen zuſammen addiren, deren Summe 10 wäre. Es iſt leicht einzuſehen, daß das unendlich vielerley Größen ſeyn könnten, wenn man auch Brüche oder gar negative Zahlen mit erlaubte. Erlaubte man nur ganze poſitive Zahlen, ſo wäre zwar die Aufgabe viel beſtimmter, aber es ließen ſich doch viele richtige Antworten geben. Z. E.

$1 + 2 + 7 = 10$, $1 + 3 + 6 = 10$, $1 + 4 + 5 = 10$, und ſo weiter.

§. 451. Wir haben überhaupt geſehen, wie eine unbekannte Zahl durch eine Gleichung, zwey unbekannte Größen durch zwey Gleichungen beſtimmt werden, und daß man überhaupt ſo viel Gleichungen haben muß, als man unbekannte Größen finden ſoll, und daß alsdenn hiedurch ſelbſt die Frage und Antwort beſtimmt wird. Gehet es nicht an, daß man aus einer Aufgabe ſo viel Gleichungen herleiten kann, als unbekannte Größen ſich darinnen befinden, ſo müſſen alſo nothwendig eine oder mehrere Größen unbeſtimmt bleiben, nachdem man Gleichungen aus der Ausgabe herausbringen kann, und die Frage muß unbeſtimmt ſeyn. Man nennet dieſe Art Rechnung in den Rechnungsbüchern die Regula Coeci. Es ſind würkliche Gleichungen, und in den Rechnungsbüchern findet man gemeiniglich davon ſolche Exempel, wo man aus zwo Gleichungen drey oder mehr unbekannte Größen beſtimmen ſoll, wobey denn noch einige Bedingungen vorkommen, wodurch die Anzahl aller möglichen Auflöſungen öfters ſehr vermindert, manchmal nur auf etliche wenige eingeſchränket wird. Da dieſe Aufgaben ſehr dienen, den Verſtand zu ſchärfen, und viele wichtige Kunſtgriffe der Analyſis zu lernen, ſo rathen wir unſern Leſern, ſich hierin zu üben, wenn ſie erſt einige Fertigkeit in andern Rechnungen erlanget haben. Hier iſt es zureichend, wenn wir nur

nur einige Begriffe davon geben, und dieſes werden wir noch durch Auflöſung einiger Exempel thun können.

§. 452. Exempel: Man ſuche zwey Zahlen deren Summe und deren Produkt zuſammen einer bekannten Zahl, z. E. a gleich ſey. Da man die beyden Zahlen noch nicht weiß, ſo nenne man ſie x und y.

Ihre Summe iſt alſo $x + y$, und ihre Produkt iſt xy. Beydes ſoll einer bekannten Zahl gleich ſeyn, die wir a nennen wollen. Alſo $x + y + xy = a$. Hier kann man für zwey unbekannte Größen nur eine Gleichung aus der Aufgabe herleiten, alſo wird eine unbekannte Größe unbeſtimmt bleiben müſſen. Wir wollen jetzt den Werth für x ſuchen, und y unbeſtimmt laſſen.

Alſo $x + y + xy = a$

folglich

$$x + xy = a - y$$

oder

$$(1 + y)x = a - y$$

$: 1 + y$

$$x = \frac{a - y}{1 + y}$$

Hier mag man nun aus y machen oder es annehmen wie man will, ſo iſt x beſtimmt. Und es giebt unendlich viel Auflöſungen, ſo bald man auch erlaubt, y in Brüchen anzunehmen. Z. E.

es ſey y als $\frac{1}{4}$ angenommen, oder $y = \frac{1}{4}$ und a ſoll 6 bedeuten, ſo wird $x = \frac{6 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{23}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{23}{4} \cdot \frac{4}{5}$ $= \frac{23}{5}$ und $x + y + xy = 6$ wird alsdenn $= 6$.

$$\text{Denn } \frac{23}{5} + \frac{1}{4} + \frac{23}{20} = 6 \text{ oder}$$

$$\frac{92 + 5 + 23}{20} = 6 \text{ oder}$$

$$\frac{120}{20} = 6$$

Soll aber eine Zahl von dieſen beyden eine ganze poſitive Zahl ſeyn, ſo iſt die Aufgabe ſchon weit beſtimmter. Denn es ſey nun y eine ganze Zahl, und ebenfalls $a = 6$, alſo

$$x = \frac{6 - y}{1 + y}$$

Hier fällt gleich in die Augen, daß alsdenn y nicht $= 0$, auch nicht 6 ſeyn kann. Es kann nicht $= 0$ ſeyn, weil es eine ganze Zahl ſeyn ſoll, aber auch nicht 6, weil ſonſt der Zähler $6 - y$ zu 0 würde, und alſo für x kein Werth käme. Es ſoll auch keine negative Größe ſeyn. Daher ſind nur 5 Auflöſungen alsdenn möglich. Nemlich y kann 1, 2, 3, 4, 5 ſeyn, da alsdenn nachgerade $x =$ wird folgenden Größen $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$. Man ſiehet auch auf dieſen Fall, daß nicht alle beyde Zahlen ganze poſitive Zahlen ſeyn können, und wäre das auf die-

dieſen Fall gefodert, ſo wäre die Aufgabe unmöglich. Man ſetze nun aber für x und y die ihnen zugehörige Zahlen in die Gleichung, ſo wird auf alle fünf Fälle die Summe der Gleichung = 6 ſeyn.

§. 453. Man ſoll 25 in zwey Theile theilen, davon der eine Theil ſich durch 2, der andere durch 3 theilen laſſe.

Auflöſung. Es mögen dieſe beyden Theile nach fernerer würklich geſchehener Theilung durch 2, und der andere durch 3, x und y ſeyn, ſo muß folglich x zweymal und y dreymal genommen zuſammen 25 ſeyn, und es kann durch 2x die eine geſuchte Zahl, und durch 3y die andere vorgeſtellet werden. Alſo $2x + 3y = 25$

daraus folget $2x = 25 - 3y$

$$x = \frac{25 - 3y}{2}$$

Da x eine ganze poſitive Zahl iſt, und auch y eine ganze poſitive Zahl ſeyn ſoll, ſo ſehen wir hieraus gleich, daß y nicht größer als 8 ſeyn kann, denn wäre es größer, ſo würde $\frac{25 - 3y}{2}$ eine negative Größe, und alſo x, welches dieſer Größe gleich iſt, auch negativ, welches nicht ſeyn ſoll. Man ſiehet ferner hieraus, daß y auch keine gerade Zahl ſeyn darf, denn ſonſt würde auch 3y eine gerade Zahl, (weil durch die Multiplikation einer geraden und un-

ungeraden Zahl mit einander allezeit eine gerade Zahl entſtehet,) und würde 3y eine gerade Zahl, ſo würde ſich 25 — 3y nicht mehr durch 2 dividiren laſſen, (weil eine gerade Zahl von einer ungeraden abgezogen, allezeit eine ungerade Zahl giebt, die ſich nicht durch 2 dividiren läßt). Da alſo y nicht größer als 8, auch keine gerade Zahl, auch nicht 0 ſeyn darf, weil es doch eine Zahl ſeyn ſoll, hieraber auch nur eine Gleichung für zwey unbekannte Größen gegeben iſt; ſo läßt ſich durch ebengeſagte Vernunftſchlüſſe zu Hülfe genommen, y angeben. Es kann nemlich alle ungeraden poſitiven Zahlen vorſtellen, die zwiſchen 0 und 8 liegen. Alſo y kann ſeyn 1, 3, 5, 7, und darnach wird x beſtimmet. Alſo hat die Aufgabe vier Auflöſungen.

Wenn $y = 1$ ſo iſt $x = 11$

wenn $y = 3$ ſo iſt $x = 8$

wenn $y = 5$ ſo iſt $x = 5$

wenn $y = 7$ ſo iſt $x = 2$.

Alſo ſind die geſuchten Zahlen $2x + 3y$, einmal $22 + 3$, einmal $16 + 9$, einmal $10 + 15$, und einmal $4 + 21$. Mehr Auflöſungen giebt es nicht. Wir wollen doch noch ein ähnliches Exempel mit Umſtänden begleiten.

§. 454. Eine Geſellſchaft von Männern und Weibern haben zuſammen verzehret 1000 gute Groſchen. Ein Mann hat bezahlt 19 ggr., eine

Frau

Frau 13 ggr. Wie viel ſind der Männer und wie viel ſind der Weiber geweſen?

Aufloͤſung. Man ſiehet bald, daß, wenn man die Umſtände der Gleichung wegnimmt, die Aufloͤſung der Frage ſeyn würde, man ſoll 1000 in zwey Theile theilen, davon der eine ſich durch 19, der andere durch 13 theilen ließe, aber bloß ganze und poſitive Zahlen gäbe. Nach geſchehener Theilung dieſer zu ſuchenden Theile durch 19 und 13 mögen ſie x und y ſeyn. Alſo werden die Theile $19x + 13y$ ſeyn, und folglich $19x+13y = 1000$. Wir wollen hier y ſuchen, weil uns das am bequemſten fällt.

Alſo $13y = 1000 - 19x$

$$y = \frac{1000 - 19x}{13}.$$

Hier haben wir nun ziemlich lange zu ſuchen, wenn wir durch Probiren ſuchen wollten, was ſich für x ſetzen ließe, damit $\frac{1000 - 19x}{13}$ eine ganze poſitive Zahl bliebe, wie x auch eine ſeyn muß. Wir wollen es anders verſuchen, und $\frac{1000 - 19x}{13}$ würklich dividiren. Alſo $y = \frac{1000 - 19x}{13} = \frac{1000}{13} - \frac{19x}{13} = 76 + \frac{12}{13} - x - \frac{6x}{13} = 76 - x + \frac{12 - 6x}{13}.$

Weil

Weil y eine ganze Zahl ſeyn ſoll, x imgleichen, ſo iſt 76 — x auch eine ganze Zahl. Es muß auch $\frac{12 - 6x}{13}$ eine ganze Zahl ſeyn, ſonſt würde y, weil es mit zu dem Werthe dafür gehöret, keine ganze Zahl ſeyn. Es muß ſich aber nicht nur 12 — 6x durch 13 theilen laſſen, ſondern auch der 6te Theil noch davon, oder 2 — x, denn $\frac{12 - 6x}{13} = \frac{(2 - x) . 6}{13}$

Weil nun der eine Faktor 6 ſich nicht durch 13 theilen läßt, ſo muß es nothwendig der andere thun laſſen, wenn die ganze Größe dadurch ſoll theilbar ſeyn, ſonſt gienge es gar nicht an. Alſo 2 — x läßt ſich hier durch 13 theilen.

Wir wollen nun noch eine neue unbekannte Größe hinzubringen, und da ſich 2 — x durch 13 theilen läßt, ſo mag der Quotient = z ſeyn, es muß aber dieſes z nothwendig eine Minusgröße ſeyn, weil x größer ſeyn muß als 2, denn ſonſt gienge die Theilung gar nicht an. Alſo $\frac{2 - x}{13} = - z$

folglich $\frac{2 - x = - 13z.}{13z + 2 = x}$ Das nun in die Gleichung vor y ſubſtituiret. Alſo y war $= 76 - x + \frac{12 - 6x}{13}$

und ſubſtituiret, ſo wird $y = 76 - 2 - 13z + \frac{12 - 12 - 78z}{13} = 74 - 13z - 6z = 74 - 19z.$

Da

Da $y = 74 - 19z$ und y doch poſitiv iſt, ſo muß z nicht ſo groß ſeyn, daß es 74 zernichtet. Wäre es 4, ſo wäre es ſchon zu groß, weil $4 \cdot 19 = 76$ iſt. Es muß alſo weniger als 4 ſeyn, aber doch eine ganze Zahl. Es kann alſo $z = 0, 1, 2, 3$ ſeyn. Iſt es 0, ſo wird $y = 74$; iſt es 1, ſo wird $y = 55$; iſt es 2, ſo wird $y = 36$; iſt es 3, ſo wird $y = 17$. Es ſind alſo 4 Auflöſungen bey dieſer Aufgabe möglich, denn iſt $y = 74$, ſo wird, weil $x = \frac{1000 - 13y}{19}$, die $x = 2$; iſt $y = 55$, ſo wird $x = 15$; iſt $y = 36$, ſo wird $x = 28$; iſt $x = 17$, ſo wird $x = 41$, weil x die Männer und y die Weiber bedeutet, und ein Mann 19 ggr., eine Frau aber 13 ggr. bezahlet.

1) Es wären alſo 2 Männer und 74 Weiber, jene bezahlen alſo 38 ggr., dieſe 962 ggr.

2) Ferner wären 15 Männer und 55 Weiber, jene bezahlten 285 ggr., dieſe 715 ggr.

3) Ferner 28 Männer und 36 Weiber, jene bezahlten 532 ggr., dieſe 468 ggr.

4) Endlich 41 Männer und 17 Weiber, jene bezahlten 779 ggr., dieſe 221 ggr.

§. 455. Alles dieſes giebt nur einen kleinen Begrif, was für Kunſtgriffe man anwenden muß, um unbeſtimmte Aufgaben aufzulöſen, wobey es gemeiniglich am meiſten auf die Betrachtung d. Natur

der

der Größen ankömmt. Wir beſchließen hiemit die Arithmetik, und wir hoffen nichts Nothwendiges, was einer durch eignen Unterricht begreifen könnte, und worauf er ferner bauen kann, vergeſſen zu haben. Er wird, wenn er weiter gehen will, in den Schriften eines Eulers, Kästner, Karſtens u. ſ. w. ſeine Wißbegierde weiter ſtillen können.

Ende der Arithmetik.

Anhang

eine weitläuftigere Abhandlung über die Logarithmen

vorzüglich

über die natürlichen und hyperboliſchen Logarithmen.

§. 1.

Wir haben in dem 17ten Kapitel meiner Arithmetik ſchon Betrachtungen über die Logarithmen angeſtellet, und ihre Entſtehung und Behandlung aus einer, mit einer geometriſchen Reihe, verbundnen arithmetiſchen Reihe erkläret, auch ihre Findung durch eine, obwohl etwas weitläuftige Art gezeiget. Wir hatten aber daſelbſt vorzüglich die Briggeſchen, oder wie man ſie ſonſt nennet, dieſe Art künſtlicher Logarithmen zum Gegenſtande, die man auch gewöhnlich gebrauchet und wovon viele Ausgaben von Tafeln vorhanden ſind. In dieſer Abhandlung wollen wir uns vorzüglich auf die natürlichen Logarithmen einlaſſen,

ihre Entſtehung zeigen, auch lehren, wie man dadurch ſehr leicht die künſtlichen Briggeſchen Logarithmen, oder auch Logarithmen von jedem andern Syſteme finden könne. Wir werden einen etwas verſchiednen Weg als dorten einſchlagen, ob er ihm ſchon würklich ähnlich iſt, nur daß wir hier Reihen gebrauchen werden, da wir dort mit Wurzelausziehen viel zu thun hatten. Es iſt bey dieſer Abhandlung Karſtens Lehrbegriff der geſamten Mathematik gröſtentheils zum Grunde geleget, nur daß wir das, was ſich dorten findet, theils erweitert, deutlicher erkläret, und der Abſicht dieſes Buchs gemäß eingerichtet haben.

§. 2. Wir haben ſchon im 17ten Kapitel geſaget, daß das Wort **Logarithme** von den griechiſchen Wörtern λογος und αριθμος, welches die Zahl oder numerus der Verhältniſſe, herrühre, und das ſind die Logarithmen auch würklich. Sie ſind numeri oder Anzeigen der Verhältniſſe, wenn man erſt ein gewiſſes **Grundverhältniß**, oder **Grundzahl** angenommen hat. Es wird unten weitläuftiger erkläret werden, was das ſey, auch wird dadurch deutlich werden, wie man alle Zahlen, die **mehr** oder **weniger** ſind als dieſe Grundzahl, als Potenzen derſelben anſehen kann, und wie ihre Logarithmen als Potenzexponenten derſelben betrachtet werden, und man daher die Logarithmen als Potenzen von **ein und eben derſelben Grundgröße** behandeln könne, wie in den Artikeln von der Multiplikation und Diviſion der Potenzen von ein und eben derſelben Grundgröße ſattſam gezeiget iſt.

§. 3.

§. 3. Wir holen noch etwas her, das zur Betrachtung der Verhältniſſe gehöret, um von den erſten Grundſätzen anzufangen. Es iſt uns bekannt, daß verſchiedne Verhältniſſe, die ſehr verſchieden ausſehen können, doch in der That völlig gleich ſeyn können. So wären z. E. 2:4 oder 24:48 oder 8:16 alles einerley Verhältniſſe und alle wie 1:2. Wir wollen, um recht deutlich zu ſeyn, hier nun erſt ein Exempel in Zahlen geben, und dann die Sache ganz allgemein betrachten. Es iſt

alſo: 2: 4 = 1:2
4: 8 = 1:2
8: 16 = 1:2
16: 32 = 1:2
32: 64 = 1:2

Alle dieſe Verhältniſſe ſind wie 1:2, auch haben wir bey jedem Verhältniſſe das 2te Glied des vorhergehenden Verhältniſſes zum erſten Glied des folgenden gemachet, um, wie nachher folgen wird, zu zeigen, wie dieſe Verhältniſſe an einander hängen.

§. 4. **Allgemein:** Es mögen folgende eine ſolche Art von Verhältniſſen ſeyn, die auch alle gleich ſind.

$a : b = m : n$
$b : c = m : n$
$c : d = m : n$
$d : e = m : n$
$e : f = m : n$ &c.

Es heißen nun ſolche Reihen von Verhältniſſen rationes multiplicatae, da, wenn man das vorderſte Glied, mit dem letztern eines der folgenden Verhältniſſe wieder in Verhältniß ſetzet, ein vielfaches Verhältniß dadurch entſtehet, und danach bekömmt auch das vielfache Verhältniß ſeinen Namen.

Z. E. man wollte a mit d in Verhältniß ſetzen; ſo würde a : d in ratione triplicata ſtehen. Denn es wäre

$$a : b = m : n$$
$$b : c = m : n$$
$$c : d = m : n$$

——————————— folglich

$$a.b.c : b.c.d = m.m.m. : n.n.n$$

——————————— oder

$$a.b.c : b.c.d = m^3 : n^3$$

——————————— vorderen beyden Glieder durch b . c dividiret §. 270.

$$a : d = m^3 : n^3$$

Das heißt, a iſt hier zu d in ratione triplicata, oder es werden 3 ſolcher Verhältniſſe wie m : n erfordert, um das Verhältniß a : d herauszubringen. So iſt a : c in ratione duplicata bey dieſer Reihe von Verhältniſſen; es werden 2 ſolcher Verhältniſſe, als m : n erfordert, um das Verhältniß a : d herauszubringen; denn wenn man es auf die eben gezeigte Art anfängt, ſo wird man finden $a : c = m^2 : n^2$. Es wäre a : e in ratione qua-

quadruplicata und a:f in ratione quintuplicata, wie ſich nun jeder nach eben gezeigter Art leicht erklären und herausbringen wird.

Es kann alſo jedes der einzelnen Verhältniſſe als ein aliquoter Theil des Verhältniſſes von ratione duplicata, triplicata &c. angeſehen werden, um das Verhältniß in dieſen Rationen zu erhalten. Z. E. jedes der einzelnen Verhältniſſe kann als ein aliquoter Theil des Verhältniſſes a:f angeſehen werden, weil aus allen vorhergehenden Verhältniſſen dieſes Verhältniß a:f entſprang. Z. E. in §. 3 iſt 2:64 in ratione quintuplicata, das heißt nicht, 64 iſt die 5te Potenz von 2, denn das wäre ſchon 32, ſondern es werden 5 ſolche Verhältniſſe, als da befindlich ſind, erfordert, um das Verhältniß 2:64 herauszubringen.

§. 5. Es war §. 4.

$$a : c = m^2 : n^2$$

alſo ———————— √ ausgezogen

$$\sqrt{a} : \sqrt{c} = m : n$$

———————— aber es war auch §. 4.

$$a : b = m : n$$

folgl. ————————

$$a : b = \sqrt{a} : \sqrt{c}$$

Alſo das Verhältniß $\sqrt{a} : \sqrt{c}$ iſt ſo groß als a:b, das nennet man, a:b iſt in ratione ſubduplicata von a:c oder die Quadratwurzeln von a und c verhalten ſich unter einander wie a:b. Man würde auf eben die Art beweiſen können, daß a:b ſich zu einander verhalten, wie der $\sqrt[5]{a} : \sqrt[5]{f}$.

 oder

oder a:f in ratione ſubquintuplicata von a:b ſey.

In Zahlen §. 3. $2:8 = 1^2:2^2$

$\sqrt{2}:\sqrt{8} = 1:2$

——————— aber es war auch

$2:4 = 1:2$

——————— folglich

$\sqrt{2}:\sqrt{8} = 2:4$

Es iſt alſo 2:4 in ratione ſubduplicata von 2:8. So würde $\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{16}$ in ratione ſubduplicata von 2:4 ſeyn, oder $\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{16} = 2:4$, und es iſt auch

$2 . \sqrt[3]{16} = 4\sqrt[3]{2}$

——————— denn

$2\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{8 . 2} = 2 . 2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$.

§. 6. Wir müſſen noch verſchiedene Vorbereitungsſätze anführen, ehe wir weiter gehen. **Alle Verhältniſſe, die aus einer gleichen Anzahl gleicher Verhältniſſe zuſammen geſezt ſind, ſind gleich groß, ſie mögen übrigens beſchaffen ſeyn, wie ſie wollen.** Wir wollen dieſen Satz erſt allgemein beweiſen, und dann durch ein Exempel in Zahlen erläutern.

Wir wollen eine Anzahl Verhältniſſe nehmen, die ſich alle verhalten ſollen, wie A:D, und dann eine eben ſo große Zahl Verhältniſſe, die ſich alle verhalten ſollen, wie B:E. Es ſind A:D und B:E in der That gleiche Verhältniſſe, obſchon A:D ganz anders ausſehen kann, als B:E.

Es

Es könnte z. E. A : D ſeyn: 2 : 4 und B : E 7 : 14 ſo wären doch beyde in der That gleiche Verhältniſſe, denn jedes iſt wie 1 : 2, weil zwey Glieder eines Verhältniſſes mit ein und eben derſelben Zahl multipliciret oder dividiret das Verhältniß nicht ändert §. 270. Können wir alsdenn zeigen, daß A : D = B : E, und folglich $\frac{A}{D} = \frac{B}{E}$ ſey, ſo wird unſre Behauptung bewieſen ſeyn. Wir müſſen hiezu eine dritte Anzahl nehmen, die eben ſo groß iſt, und Verhältniſſe, die alle auch gleiches Verhältniß haben, und beyde erſtern mit dieſem letztern vergleichen. Alſo:

$$\begin{array}{l} \alpha:\beta = A:D \\ \gamma:\delta = A:D \\ \varepsilon:\zeta = A:D \\ \hline \alpha.\gamma.\varepsilon:\beta.\delta.\zeta = A^3:D^3 \end{array}$$

Ferner

$$\begin{array}{l} a:b = B:E \\ e:d = B:E \\ e:f = B:E \\ \hline a.c.e:b.d.f = B^3.E^3 \end{array}$$

Wir behaupten nun, es ſey $A^3:D^3 = B^3:E^3$ oder A : D = B : E.

Wir wollen alſo Vergleichverhältniſſe nehmen.

Es ſey $\alpha:\beta = a:b$
$\gamma:\delta = c:d$
$\varepsilon:\zeta = e:f$

ſo iſt $\alpha.\gamma.\varepsilon:\beta.\delta.\zeta = a.c.e:b.d.f$

Nun war auch $\alpha.\gamma.\varepsilon:\beta.\delta.\zeta = A^3:D^3$

alſo iſt auch $A^3:D^3 = a.c.e:b.d.f$

aber es war $a.c.e:b.d.f = B^3:E^3$

alſo iſt auch $A^3:D^3 = B^3:E^3$

folglich auch $A:D = B:E$

folglich $\frac{A}{D} = \frac{B}{E}$

In Zahlen:

$$3:9 = 1:3$$
$$6:18 = 1:3$$
$$8:24 = 1:3$$
$$3.6.8:9.18.24 = 1^3:3^3$$

Man hätte auch die vorderen Verhältniſſe, wie man wollte, nehmen können, wenn ſie nur hier wie 1:3 waren.

ferner $2:6 = 4:12$
$5:15 = 4:12$
$6:18 = 4:12$

$$2.5.6:6.15.18 = 4^3:12^3$$

und

und noch $3:9 = 2:6$

$6:18 = 5:15$

$8:24 = 6:18$

$$3.6.8 : 9.18.24 = 2.5.6 : 6.15.18$$

nun war $2.5.6 : 6.15.18 = 4^3 : 12^3$

also iſt auch

$$3.6.8 : 9.18.24 = 4^3 : 12^3$$

aber

$$3.6.8 : 9.18.24 = 1^3 : 3^3$$

alſo auch

$4^3 : 12^3 = 1^3 : 3^3$ oder $4 : 12 = 1 : 3$

und

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Wir wollen noch ein Exempel in Zahlen geben, welches die Sache noch mehr erläutern wird.

$10:15 = 2:3$

$8:12 = 2:3$

$4:6 = 2:3$

$$10.8.4 : 15.12.6 = 2^3 : 3^3$$

Ferner $6:9 = 10:15$

$14:21 = 10:15$

$12:18 = 10:15$

$$6.14.12 : 9.21.18 = 10^3 : 15^3$$

Alſo muß ſich auch verhalten

$$2^3 : 3 = 10^3 : 15^3$$

oder $\sqrt[3]{}$ ausgezog.

$$2 : 3 = 10 : 15$$

$$2 . 15 = 3 . 10$$ oder

imgleichen auch $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

$$10.84 : 15.12.6 = 6.14.12 : 9.21.18$$

oder

$$320 : 1080 = 1008 : 3402$$

und

$$320 . 3402 = 1080 . 1008$$

oder

$\frac{320}{1080} = \frac{1008}{3402} =$ beydes $\frac{8}{27}$.

§ 7. Sind aber nicht eine gleiche Anzahl gleicher Verhältniſſe, ſondern es ein andres Verhältniß, zwar aus eben ſolchen gleichen Verhältniſſen, aber nicht aus gleicher Anzahl, als das andre zuſammengeſetzet, ſo gilt das Theorem des 6ten § nicht. Es ſey ein zuſammengeſetztes Verhältniß A:D und ein andres B:F. Die Verhältniſſe an ſich ſelbſt mögen gleich ſeyn, aber nicht in Anſehung der Anzahl: ſo läßt ſich nicht ſchließen, A:D = B:F, ſondern A:D iſt inäqual B:F. Es iſt dieſes auch leicht begreiflich, denn alsdenn würde ein zuſammengeſetztes Verhältniß größer als das andre ſeyn. Erſt ein Exempel in Zahlen zur Erläuterung.

$$\left.\begin{array}{l} 3:9=1:3 \\ 6:18=1:3 \\ 8:24=1:3 \end{array}\right\} A:D$$

$$3.6.8:9.18.24=1^3\ 3^3$$

$$\left.\begin{array}{l} 2:6=3:9 \\ \tfrac{1}{2}:\tfrac{3}{2}=3:9 \\ 9:27=3:9 \\ \tfrac{3}{4}:\tfrac{9}{4}=3:9 \end{array}\right\} B:F$$

$$2.\tfrac{1}{2}.9.\tfrac{3}{4}:6.\tfrac{3}{2}.27.\tfrac{9}{4}=3^4:9^4$$

So ſiehet man bald, daß ſich nicht ſchließen läßt:

$$3.6.8:9.18.24=2.\tfrac{1}{2}.9.\tfrac{3}{4}:6.\tfrac{3}{2}.27.\tfrac{9}{4}$$

Die zuſammengeſetzten Verhältniſſe ſind **ungleich**, welches auch ſchon daraus erhellet, daß das erſtre, wie $1^3:3^3$, und das andre wie $3^4:9^4$ war, alſo auch nicht gleiche Wurzeln daraus gezogen werden können.

Aber man nehme aus den zuſammengeſetzten Verhältniſſen, wo 4 ſind, **eins** weg, welches man will, ſo werden die zuſammengeſetzten Verhältniſſe gleich ſeyn. Wenn man z. E. 2:6 wegnähme, ſo würde es gelten

$$\tfrac{1}{2}.9.\tfrac{3}{4}:\tfrac{3}{2}.27.\tfrac{9}{4}=3.6.8:9.18.24$$

oder

$$\tfrac{27}{8}:\tfrac{729}{8}=144:3888$$

und $\tfrac{27}{8}.3888=\tfrac{729}{8}.144$

oder $\tfrac{27}{8}:\tfrac{729}{8}=\tfrac{144}{3888}=$ bey $\tfrac{1}{27}$.

Al-

Allgemein: wenn
$$\begin{array}{l} a : b = m : n \\ c : d = m : n \\ e : f = m : n \\ g : h = m : n \\ \hline a.c.e.g : b.d.f.h = m^4 : n^4 \end{array}$$

und
$$\begin{array}{l} \alpha : \beta = m : n \\ \gamma : \delta = m : n \\ \varepsilon : \zeta = m : n \\ \hline \alpha.\gamma.\varepsilon : \beta.\delta.\zeta = m^3 : n^3 \end{array}$$

So kann nicht gelten, $a.c.e.g : b.d.f.h = \alpha.\gamma.\varepsilon : \beta.\delta.\zeta$, aber wenn nur ein Verhältniß von den erſtern weggenommen würde, z. E. $a : b = m : n$, ſo würde allerdings gelten

$$c.e.g : d.f.h = \alpha.\gamma.\varepsilon : \beta.\delta.\zeta = m^3 : n^3.$$

§. 8. 1) Das Verhältniß zweyer Potenzen aus der Ordnung n iſt n mal größer als das Verhältniß ihrer Wurzeln. Oder das Verhältniß $A^n : B^n$ iſt n mal größer als $A : B$. Denn $A : B$ ſind die Wurzeln davon, und es werden alſo n Verhältniſſe erfordert, ehe $A^n : B^n$ herauskömmt, oder wenn n die 3 bedeuten ſollte, ſo iſt nicht die Größe, ſondern das Verhältniß $A^3 : B^3$ dreymal größer als $A : B$, denn es werden 3 Verhältniſſe wie $A : B$ erfordert, um es herauszubringen.

Z. E. $A : B$ $2 : 3$
$A : B$ $2 : 3$
$A : B$ $2 : 3$

$A^3 : B^3$ $2^3 : 3^3$

2) Das Verhältniß zweyer **Wurzeln** aus der Ordnung n iſt $\frac{1}{n}$ des Verhältniſſes des Hauptſtammes. Es folget dieſes ſchon aus dem vorhergehenden vollkommen, oder $\sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B}$ iſt $\frac{1}{n}$ des Verhältniſſes $A : B$. Denn $\sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B}$ iſt $= A^{\frac{1}{n}} : B^{\frac{1}{n}}$ §. 145 oder in Zahlen $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{8}$ iſt $= 4^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{3}}$, alſo nicht $4 : 8$, ſondern nur $\frac{1}{3}$ des Verhältniſſes $4 : 8$. So abſtrakt dieſes für einen Anfänger ausſiehet, ſo wird es ſich doch nachher erläutern.

3) Gleichfalls das Verhältniß zweyer **gleichen** Bruchpotenzen iſt gegen das Verhältniß der Wurzeln ſo groß, als der **Bruchexponente** die Einheit in ſich enthält, es ſey mehr als ganz 1 oder Bruchmal 1. Oder das Verhältniß iſt aus $\frac{n}{m}$ Verhältniſſen (wenn $\frac{n}{m}$ die Bruchpotenz andeutet) zuſammen geſetzet. So iſt z. E. $A^{\frac{3}{4}} : B^{\frac{3}{4}}$ aus $\frac{3}{4}$ Anzahl von Verhältniſſen von $A : B$ zuſammen geſetzet.

Beweis $A^{\frac{n}{m}} : B^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(A^n : B^n)}$, nach dem

2ten

2ten Punkt $= \frac{1}{m}(A^n : B^n)$, aber $A^n : B^n$ nach 1 iſt ${}^n(A:B)$ alſo $\frac{1}{m} \cdot n\,(A:B) = \frac{n}{m}(A:B)$ oder $A^{\frac{n}{m}} : B^{\frac{n}{m}}$.

Es wäre alſo $2^{\frac{3}{4}} : 8^{\frac{3}{4}}$ aus $\frac{3}{4}$ Verhältniſſen von 2:8 zuſammen geſetzet, und $2^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{3}{2}}$ aus $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$ Verhältniſſen von 2:8 componiret. Es erläutert dieſes den Satz, den wir Anfang dieſer Nr. 3 mit Worten geſagt haben.

§. 9. Es iſt gegeben in einer geometriſchen Progreſſion das 1ſte Glied, imgleichen auch die Anzahl der Glieder, die B nach dem erſten Gliede folgen, imgleichen auch das letzte Glied, man will einen allgemeinen Ausdruck für das 2te Glied finden. Es ſey a das erſte Glied, m der Exponens der Reihe, der mir aber nicht nöthig iſt bekannt zu machen, weil ich ihn, wenn ich erſt das zweyte Glied weis, leicht finden kann, und das letzte Glied heiße γ, ſo wird die Reihe alſo fortgehen. $a\ ma\ m^2a\ m^3a\ m^4a \ldots\ldots. m^na$. Es wäre alſo m^na das letzte Glied, weil n die Zahl der Glieder, die nach dem erſten Gliede folgen, oder vom 2ten Gliede an gezählet iſt. Es heiße nun B das 2te Glied, das man ſuchet. So iſt alſo:

m^na

$m^n a = \gamma$

———————— $. a^{n-1}$

$m^n a . a^{n-1} = \gamma . a^{n-1}$

———————— würklich multipliciret

$m^n a^n = \gamma a^{n-1}$

———————— $\sqrt[n]{}$ ausgezogen

$ma = \sqrt[n]{\gamma a^{n-1}}$

———————— aber es war

$ma = B =$ dem zweyten Gliede

———————— alſo

$B = \sqrt[n]{\gamma . a^{n-1}}$

———————— Es iſt aber auch,

$\sqrt[n]{\gamma a^{n-1}} = \frac{a . \sqrt[n]{a^{n-1}\gamma}}{a}$ weil eine Größe mit einerley Größe multipl. und zugleich dividiret, die Größe nicht ändert.

————————

und $\frac{a^n\sqrt{a^{n-1}\gamma}}{a} = \frac{a^n\sqrt{a^{n-1}\gamma}}{\sqrt[n]{a^n}}$

weil $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$ iſt

———————— würklich dividiret das letztere

$\frac{a^n\sqrt{a^{n-1}\gamma}}{\sqrt[n]{a^n}} = a^n\sqrt{a^{n-1+n}\gamma} = a^n\sqrt{a^{-1}\gamma}$

für a^{-1} ſubſtituiret $\frac{1}{a} = \frac{a^n\sqrt{\gamma}}{\sqrt[n]{a}} = a^n\sqrt{\frac{\gamma}{a}} =$

dem 2ten Gliede $= B$, wo n die Zahl der Glieder vom 2ten Gliede angezählt bedeutet.

Man kann nun leicht m oder den Exponens gleich aus dem Anfange der Gleichung finden.

Es

Es wäre $m^n a = \gamma$

$$m^n = \frac{\gamma}{a}$$

$$\sqrt[n]{m^n} = m = \sqrt[n]{\frac{\gamma}{a}}$$

Exempel. Das erſtre Glied einer Reihe ſey = a = 16, das letztere Glied = γ = 81, die Zahl der Glieder **nach dem erſten Gliede** = n = 4. So iſt alſo B = dem 2ten Gliede = $a \sqrt[n]{\frac{\gamma}{a}} = 16 \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = 16 \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = 16 \cdot \frac{3}{2} = 24$, die Reihe gienge alſo fort

$$16,\ 16\tfrac{3}{2},\ 16\frac{3^2}{2^2},\ 16\frac{3^3}{2^3},\ 16\frac{3^4}{2^4}$$

$$= 16 \quad 24 \quad 36 \quad 54 \quad 81$$

§. 10. Wenn, wie wir angenommen haben, ſich nach dem erſten Gliede n Glieder finden, ſo beſtehet alſo die geometriſche Progreſſion aus n+1 Gliedern, und es folget hieraus, daß das Verhältniß des **erſtern** Gliedes zum **letztern** n mal ſo groß ſey, als des **erſtern** Gliedes zum **zweyten**, oder daß n ſolcher Verhältniſſe, als das Verhältniß des erſtern Gliedes zum 2ten Gliede erfordert werden, um das Verhältniß des erſtern zum letztern herauszubringen. Um es in die Augen fallend zu machen, wollen wir eine geometriſche Progreſſion hier von 4 Gliedern nach dem erſten Gliede machen

A : ma

$a : ma$	$a\ ma\ m^2a\ m^3a\ m^4a$
$ma : m^2a$	Es werden alſo vier ſolcher Verhält-
$m^2a : m^3a$	niſſe als $a : ma$ erfordert, um das Ver-
$m^3a : m^4a$	hältniß $a : m^4a$ herauszubringen.

Es läßt ſich auch dieſes leicht allgemein aus dem vorhergehenden beweiſen. Es war § 9 das zweyte Gliede oder $B = a \sqrt[n]{\frac{\gamma}{a}}$

in die Potenzen erhoben

$$B^n = a^n \frac{\gamma}{a}$$

$: a^n$

$$\frac{B^n}{a^n} = \frac{\gamma}{a}$$

und folglich $B^n : A^n = \gamma : a$ oder $A^n : B^n = a : \gamma$

alſo: ein nfachs Verhältniß des erſten Gliedes zum 2ten iſt gleich dem Verhältniſſe des erſten Gliedes zum letzten.

§. 11. Nach allen dieſen Vorbereitungen können wir nun von den Betrachtungen der vorhergehenden Paragraphen eine Anwendung machen. Es mögen folgende Glieder A, B, C, &c. Glieder einer geometriſchen Reihe ſeyn, deren Zählung wir nach den natürlichen Zeichen vom 2ten Gliede mit 1 anfangen wollen, weil das erſte Glied zum 2ten das erſtere Verhältniß iſt.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L

Wir wollen nun einmal das Verhältniß A:F oder F:A nehmen, ſo wäre F. als das letzte Glied zu betrachten § 10. Und alſo wäre $A:F = A^n:B^n$ und **hier** $A:F = A^5:B^5$ oder A:F wäre das 5te Verhältniß von A:B. Eben ſo folget daraus, daß A:B wäre $\frac{1}{5}$ Verhältniß von A:F. Daher auch A:C $\frac{2}{5}$ Verhältniſſe von A:F, ferner A:D wäre $\frac{3}{5}$ Verhältniſſe von A:F und A:E wäre $\frac{4}{5}$ Verhältniſſe von A:F, A:G wären $\frac{6}{5}$ Verhältniſſe von A:F und A:L wären $\frac{10}{5} = 2$ Verhältniſſe von A:F. Es wären alſo A:F daher $\frac{5}{5} = 1$ Verhältniß, wenn man es ſo ausdrücken will.

Man bemerke wohl, daß hier **Verhältnißmaßen**, wenn man es ſo nennen will, und **nicht Quotienten ſind.** Hier war das Maas, welches wir gebrauchten, A:F.

In Zahlen, um es noch mehr zu erläutern.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256...

Wir wollen zum **Maasverhältniß** 1:32 nehmen. So iſt 1:32 alsdenn $\frac{5}{5}$ Verhältniſſe von 1:2, und 1:2 iſt $\frac{1}{5}$ Verhältniß von 1:32. Ferner 1:4 iſt $\frac{2}{5}$ Verhältniß von 1:32 rc. 1:256 iſt $\frac{8}{5}$ Verhältniß von 1:32 u. ſ. w.

Nach einem Grundverhältniſſe, das wir hier A:F und in den Zahlen 1:32 angenommen haben, miſſet man die andern Verhältniſſe aus. Hätte man einen andern Maasſtab, das iſt ein andres Grundverhältniß angenommen, ſo würde bey eben den Verhältniſſen das Maas anders ausgefallen

fallen ſeyn, ohngeachtet die Größe eben dieſelbige geblieben wäre. Wenn man z. E. eine Größe einmal mit Pariſer und eben die Größe auch mit Kalenberger Maaße mäße, ſo bliebe die Größe immer dieſelbe, aber die Anzeige des Maaßes fiele anders aus. Nehmen wir alſo bey eben angeführter Zahlenreihe zum **Maasverhältniß** 1 : 16, ſo wäre 1 : 2 alsdenn $\frac{1}{4}$ Verhältniß von 1 : 16, ferner 1 : 4 wären $\frac{2}{4}$ Verhältniſſe von 1 : 16 und 1 : 256 wären $\frac{8}{4} = 2$ Verhältniſſe von 1 : 16 und ſo weiter. Man wird nun leicht ein jedes anders **Grundverhältniß**, welches man will, hiernach behandeln können.

§. 12. **Die Zahl**, welche die Größe **eines Verhältniſſes** gegen das Grundverhältniß anzeiget, heißt ihr **Logarithme**. Wenn z. E. §. 11 F : A das Maasverhältniß wäre, ſo iſt der Logarithme davon $\frac{5}{5} = 1$. Der Logarithme von K : A wäre $\frac{9}{5}$, der Logarithme von D : A wäre $\frac{2}{5}$; und von L : A wär $\frac{10}{5} = 2$.

Es ſoll nun hinfort der Buchſtab l den Logarithmen bedeuten, ſo daß das Verhältniß in eine Klammer eingeſchloſſen iſt. Z. E. $\frac{2}{5}$ = l (C : A) ꝛc. Da F : A hier als das Maasverhältniß angenommen worden, ſo iſt ſein Logarithme $= \frac{5}{5} = 1$, alſo hier iſt 1 = l (F : A).

§. 13. Es iſt bekannt, daß ſich jedes Verhältniß ſo ausdrücken läßt, daß eines von ſeinen

Gliedern = 1 wird. §. 253. Es iſt eben ſo bekannt, daß dieſes das Verhältniß gar nicht ändert. §. 253. Es iſt nur nöthig, eines der beyden Glieder, wo man die 1 hin haben will, zum Diviſor beyder Glieder zu machen. So iſt z. E. $D : A = \frac{D}{A} : \frac{A}{A} = \frac{D}{A} : 1$. Da dieſes Verfahren, das Verhältniß gar nicht ändert, ſo wird auch daher der Logarithme deſſelben nicht geändert, und alſo $l(D : A)$ iſt einerley mit $l(\frac{D}{A} : 1)$. Eben ſo läßt ſich auch jede geometriſche Progreſſion in eine verwandeln, wo das erſtere Glied = 1 iſt. Sie wird in Anſehung der Verhältniſſe dadurch in nichts geändert, und hat daher eben die Logarithmen, die ſie vor der Verwandlung hatte. Es folget dieſes aus der Lehre von den Verhältniſſen §. 253. Z. E.

Logarithmen		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
geometr. Progr.	A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,	H,	J,	K,	L . . . ;

iſt in Anſehung der Verhältniſſe völlig einerley mit

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{A}{A} & \frac{B}{A} & \frac{C}{A} & \frac{D}{A} & \frac{E}{A} & \frac{F}{A} & \frac{G}{A} & \frac{H}{A} & \frac{J}{A} & \frac{K}{A} & \frac{L}{A} \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{oder} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ = 1 & \frac{B}{A} & \frac{C}{A} & \frac{D}{A} & \frac{E}{A} & \frac{F}{A} & \frac{G}{A} & \frac{H}{A} & \frac{J}{A} & \frac{K}{A} & \frac{L}{A} \end{array}$$

Bleibt bey beyden das §. 11 angenommene F : A oder ein anders angenommenes Maasverhältniß, ſo

ſo iſt es offenbar, daß in beyden Reihen die Logarithmen der Verhältniſſe einerley ſind.

§. 14. Der Logarithme des Verhältniſſes einer Zahl zur Einheit heißt auch der Kürze wegen der Logarithme dieſer Zahl. Es ſey die Reihe

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1, & 2, & 4, & 8, & 16, & 32, & 64, & 128, & 256, & 512, & 1024, & 2048 \ldots \end{matrix}$$

Es ſey das Grundverhältniß oder der Maasſtab, 32:1, ſo iſt, wie aus dem vorhergehenden §. 11 bekannt iſt, der Logarithme von 32 $= \frac{5}{5} = 1$. Es wäre alſo der Logarithme von 8:1 oder der Logarithme von 8 $= \frac{3}{5}$ der Logarithme von 512 wäre $\frac{9}{5}$ und der Logarithme von 1024 wäre $\frac{10}{5} = 2$. Es würden alſo zwey Verhältniſſe wie 32:1 erfordert, um das Verhältniß 1024:1 herauszubringen. Es müßte alſo

$$\begin{array}{c} 32:1 \\ 32:1 \\ \hline 32^2:1^2 \end{array}$$

oder $32 \cdot 32 = 1024$ ſeyn, welches es auch iſt.

§. 15. Es iſt aus allem dieſem ſehr begreiflich, wenn die Zahl beſtimmt iſt, deren Logarithme = 1 ſeyn ſoll, ſo ſind die Logarithmen aller Zahlen, die in dieſer Reihe ſeyn können, und wenn ſie auch unendlich viele Glieder hätte, beſtimmet. Nimmt man den Logarithmen einer andern Zahl = 1 an, ſo ändern ſich ſogleich die Logarithmen aller andern

Zahlen. Wir haben hievon ſchon in §. 11. Exempel gegeben.

Jede Reihe von Zahlen mit ihren Logarithmen, die aus einem angenommenen Grundverhältniſſe entſpringen, heißt ein **logarithmiſches Syſtem**, und die Zahl, deren Logarithme =1 und deren Verhältniß zur Einheit alſo das **Maas** oder **Grundverhältniß** iſt, jede ſolche Zahl heißt die **Baſis** oder **Grundzahl** des Syſtems. So iſt alſo (daß ich dieſes avancire) die Zahl 10 die **Baſis** in den Briggeſchen Logarithmen, die wir gewöhnlich gebrauchen, oder 10 : 1 iſt das Grundverhältniß derſelben, und daher der Logarithme von 10 iſt 1.

Da es ganz willkührlich iſt, welche Zahl in einer Reihe die Baſis oder Grundzahl ſeyn ſoll, da die Arten der Reihen auch noch unzählig verſchieden ſeyn können, ſo ſiehet man leicht ein, daß es **unzähliche** Logarithmen-Syſteme geben kann.

§. 16. Aber es folget auch ſchon aus allem dieſem, wenn in **einerley** Logarithmen-Syſtem zwey Verhältniſſe einerley Logarithmen haben, ſo ſind ſie gleich groß. Sind aber die Logarithmen ungleich, ſo ſind ſie auch ſelbſt ungleich.

Es wäre kaum nöthig, dieſen Satz zu beweiſen, da er aus der Sache ſelbſt folget. Doch es ſey ganz allgemein das Grundverhältniß B : 1, ferner ſey $\frac{n}{m}$ der Logarithme von B : A und auch

von

von D:C, oder $\frac{n}{m}$ ſey der Logarithme von $\frac{B}{A}:1$ und auch von $\frac{D}{C}:1$. §. 13, ſo iſt alſo jedes dieſer Verhältniſſe $\frac{n}{m}(b:1)$, das heißt, jedes dieſer Verhältniſſe iſt aus $\frac{1}{m}$ Verhältniſſen von b:1, die aber n mal genommen ſind, zuſammengeſetzet, alſo iſt $\frac{B}{A}:1=\frac{D}{C}:1$ oder es iſt alſo B:A=D:C

Z. E. Es wäre die Reihe

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512,	1024,	2048...

und man hätte 2 gleiche Verhältniſſe als z. E. 16:8 und 1024:512 oder $\frac{16}{8}:1$ und $\frac{1024}{512}:1$ und hätte das Grundverhältniß 256:1 angenommen, deſſen Logarithmen alſo hier $\frac{8}{8}=1$ wäre.

Nun findet man $\frac{16}{8}:1$ iſt wie 2:1 und $\frac{1024}{512}:1$ iſt auch wie 2:1. Die beyden Verhältniſſe 16:8 und 1024:512 müſſen alſo einerley Logarithmen haben, weil ſie beyde gleiche Verhältniſſe ſind, nemlich wie 2:1. oder (wenn dieſes deutlicher) aus $\frac{16}{8}$ und $\frac{1024}{512}$ einerley Quotient nemlich 2 kömmt, ihr Logarithme, der für beyde gehöret, wird, da 256 zum Logarithmen 1 hat, $\frac{1}{8}(256)$ ſeyn.

Wäre aber der Logarithme von $\frac{B}{A}:1=\frac{r}{m}$

und von $\frac{D}{C}:1 = \frac{n}{m}$, ſo wäre $\frac{B}{A}:1 = \frac{r}{m}$ (b:1) und $\frac{D}{C}:1$ wäre $\frac{n}{m}$ (b:1) folglich beyde Verhältniſſe ungleich.

Exempel. Es mögen die Verhältniſſe 16:8 und 512:32 ſeyn. Es wäre alsdenn $\frac{16}{8}:1$ wie 2:1 und $\frac{512}{32}:1$, wie 16:1. Es ſey das Grundverhältniß, wie vorher, 256:1, deſſen Logarithme $\frac{8}{8} = 1$ iſt, ſo iſt $\frac{16}{8}:1 = \frac{1}{8}$ (256:1), und $\frac{512}{32}:1 = \frac{4}{8}$ (256:1) $= \frac{1}{2}$ (256:1), welches ſehr verſchieden iſt, weil die Verhältniſſe verſchieden ſind.

§. 17. Es haben alſo in einerley Syſtem zwey gleiche Verhältniſſe einerley Logarithmen, und ſind die Logarithmen zweyer Verhältniſſe ungleich, ſo ſind es auch die Verhältniſſe. Oder auch ferner in jedem logarithmiſchen Syſtem haben gleiche Logarithmen gleiche Zahlen, und auch umgekehrt, gleiche Zahlen gleiche Logarithmen.

Es iſt ferner: ſo bald die Zahl beſtimmt iſt, welche zu dem Logarithmen 1 gehören ſoll, ſo iſt das ganze logarithmiſche Syſtem beſtimmt, wie aus allem vorhergehenden ſattſam erhellet, und jede Zahl hat dann ihren beſtimmten Logarithmen. Eben ſo iſt es auch einerley, ob man die Grundzahl oder Baſis eines logarithmiſchen Syſtems nennet, oder den Logarithmen einer ganz beliebigen Zahl im dieſem Syſteme; die Grundzahl wird ſogleich dadurch beſtimmet.

Exem-

Exempel. Wir wollen die Reihe und die Logarithmen §. 11. annehmen. Da wird der Logarithme von 512 = $\frac{9}{5}$ ſeyn. Alſo der Logarithme der Baſis muß nothwendig $\frac{5}{5} = 1$ ſeyn. Folglich muß die Grundzahl 5 ſolcher Verhältniſſe enthalten, als 512 **neun** ſolcher Verhältniſſe enthält. Es ſey nun allgemein und noch unbekannt b die **Baſis** des Syſtems, ſo iſt alſo $512:1 = \frac{9}{5}(b:1) = 9 \cdot \frac{1}{5}(b:1)$ oder $512:1$ iſt das **neunmal** genommne $\frac{1}{5}$ von dem Verhältniſſe $b:1$. Es muß alſo nach §. 3 und 4, 5, die $512^{\frac{1}{9}}$ gleich ſeyn $\frac{1}{5}(b:1)$ oder $\sqrt[9]{512} = \frac{1}{5}(b:1)$. Nun iſt $\sqrt[9]{512} = 2$.

$$\text{Alſo } 2:1 \text{ iſt} = \tfrac{1}{5}(b:1)$$

und

$$5(2:1) = \tfrac{5}{5}(b:1)$$

$$\text{alſo } 5(2:1) = b:1.$$

aber 5mal 2:1 iſt

$$\begin{array}{r} 2:1 \\ 2:1 \\ 2:1 \\ 2:1 \\ 2:1 \\ \hline 32:1 \end{array}$$

alſo b iſt = 32 und das iſt die Baſis dieſes Syſtems, wie wir auch §. 11 annahmen.

Wir wollen doch auch noch ein Exempel aus den gewöhnlichen Briggeſchen Logarithmen avanciren.

Es iſt bekannt, der Logarithme von

$$1000 \text{ iſt} = 3$$

$$\text{alſo } 1000 = \tfrac{3}{1}(b:1)$$

$$1000^{\frac{1}{3}} = (b:1)$$

$$\sqrt[3]{1000} = (b:1)$$

$$\text{aber } \sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\text{alſo } 10 : 1 = b : 1$$

oder die Grundzahl des Briggeſchen Syſtems iſt = 10, und die hat zum Logarithmen 1.

§. 18. Wenn in einem logarithmiſchen Syſteme ein Verhältniß aus zwey andern, oder noch mehrern zuſammengeſetzt iſt, ſo iſt der Logarithme des zuſammengeſetzten Verhältniſſes die Summe der Logarithmen jener Verhältniſſe, daraus dieſes Verhältniß zuſammengeſetzt iſt.

Beweis. Es ſey $l(B:1 = \frac{n}{m}$, ferner $l(C:1) = \frac{r}{m}$ und die Baſis des Syſtems ſey $(b:1)$, ſo iſt laut den vorhergehenden $(B:1) = \frac{n}{m}(b:1)$ und $(C:1) = \frac{r}{m}(b;1)$, oder alſo

$$\overline{B:1}$$

$$\overline{C:1}$$

$$B.C:1 = (b:1)\frac{n}{m} \,.\, (b:1)\frac{r}{m} = (b:1)\frac{n+r}{m}$$

oder

oder $\log.(B.C:1) = \frac{n+r}{m}(b.1)$ oder $B.C:1$
$= l(B:1) + l(C:1) = lB + lC.$

§. 19. Da man die Logarithmen jeder Zahl in einem Syſtem als Potenzen von (b:1) oder als Potenzen der Grundzahl oder Baſis anſehen muß, ſo folget ſchon aus dem vorhergehenden §. und aus der Lehre von der Behandlung gleichnahmichter Potenzen, 1) daß der Logarithme von mehrern Factoren, die Summe der Logarithmen dieſer Factoren, der Logarithme eines Quotienten, die Differenz der Logarithmen des Diviſors und Dividendi, wie auch gleichfalls die Logarithmen ächter und unächter Brüche ſind. Die Logarithmen der nfachen Wurzeln ſind, die Logarithmen der Größe ſelbſt, dividirt durch n, und die Logarithmen der Potenzen die Logarithmen der Wurzeln, multiplicirt mit n ſind die Logarithmen der Größen als $\frac{1}{Q^n}$ der Logarithme von A^n unter dem Minuszeichen, rc.

Wir haben alles dieſes weitläuftig im 17ten Kapitel der Arithmetik gezeiget, und berufen uns darauf, und bitten es hier nachzuleſen.

§. 20. Wir kommen auf einen wichtigen Lehrſatz.

In verſchiedenen logarithmiſchen Syſtemen ſind die Logarithmen, welche zu ein und eben der Zahl gehören, in ei-

nem

nem beſtimmten Verhältniß, welches für alle Zahlen einerley iſt und bleibet.

Das, was man ſchon voraus ſehen wird, was daraus folget, iſt: daß man alſo die Logarithmen des einen Syſtems in die Logarithmen des andern Syſtems wird verwandeln können, auch dazu für alle Zahlen nur einerley Größe nöthig hat, weil alle Logarithmen aller Zahlen in beyden Syſtemen in einem und eben demſelben Verhältniſſe ſind.

Den Satz wollen wir nun beweiſen.

Es ſey in dem einen Syſtem die Grundzahl oder Baſis β, in dem andern ſey ſie b.

Es iſt nun ſehr begreiflich, daß in der Reihe aller Zahlen des Syſtems β auch die Zahl b mit befindlich ſeyn muß. Wenn wir z. E. blos die Reihe

ſ   1   2   3   4   5   6   7   8   9   10
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 . . . .
etzen; und einmal die Grundzahl 32 als β annehmen, ein andermal zur Grundzahl die 8 als b annehmen, ſo haben wir zwey Syſteme β und b, und wir finden hier, daß b in der Reihe von β enthalten ſey. Es kann alſo b als eine Potenz der β angeſehen werden, es ſey auch dieſe Potenz wie ſie wolle, eine ganze Zahl mit und ohne Brüche, oder blos Bruch. Es muß alſo β einen Potenzexponenten haben, nemlich in welcher Potenz b von β iſt, wie wir ſchon geſagt, der Potenzexponent ſey, wie er wolle. Er mag einmal m heißen und es wird alſo $b = \beta^m$ ſeyn.

Nun

Nun ſey ferner y in dem Syſteme b eine Zahl welche man will, und l ſey der Logarithme von y, ſo iſt alſo $y = b^l$.

——— ——— -——— —Es war aber auch

$$b = \beta^m$$

Wenn man nun in der Gleichung $y = b^l$ anſtatt b das eben angeführte ihre gleiche β^m ſubſtituiret, ſo wird $y = \beta^{ml}$.

Nun ſey ferner im Syſteme, wozu die Baſis β gehöret, der Logarithme von $y = \lambda$, ſo wäre $y = \beta^\lambda$

——— ———-da nun aber auch

$y = \beta^{ml}$

——— ——— ſo muß

$\beta^{ml} = \beta^\lambda$ ſeyn

——— ——— alſo

$ml = \lambda$

——— ——— ——— folglich

$\lambda : l = m : 1$, denn weil facta extremorum aequalia factis intermediorum, ſo iſt alsdenn $ml = \lambda$.

Aber es waren λ und l die verſchiednen Logarithmen von y, und y galt für alle mögliche Zahlen. Es verhält ſich alſo der Logarithme vom Syſteme β zum Logarithmen vom Syſteme b, wie der Logarithme, den b vorher im Syſteme β bekam, zur Einheit.

Ein Exempel mag dieſes erläutern.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512,	1024....

Es

Es ſey in dem einen Syſteme β die Baſis 32, in dem andern Syſteme b die Baſis 8, ſo kann man alſo auch 8 als eine Potenz des Syſtems β oder hier als eine Potenz der 32 anſehen, es würde alſo $b = 8 = \beta^m$, hier $32^{\frac{3}{5}}$ ſeyn, (man wird dieſes leicht einſehen, wenn man das vorhergehende wohl gefaſſet, und weiß, daß β hier $32^{\frac{5}{5}} = 32^1$ iſt, und die zum Logarithmen nach dieſer Annahme hat.)

Es ſey nun $y = 64$, ſo iſt y oder hier 64 im Syſteme $b = 8^{\frac{6}{3}}$. Es war auch b, oder 8 im Syſteme β $32^{\frac{3}{5}}$, alſo ſubſtituiret ſtatt 8 die $32^{\frac{3}{5}}$; ſo wird y oder $64 = 32^{\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{3}}$

da ferner im Syſteme β, wo die Grundzahl 32 iſt $64 = 32^{\frac{6}{5}}$ vide die Reihen

aber auch wie wir eben geſagt $64 = 32^{\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{3}}$

ſo muß $\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{3} = \frac{6}{5}$ ſeyn

oder $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$ welches es auch iſt

alſo $\frac{6}{5} : \frac{6}{5} = \frac{3}{5} : 1$, welches den vor dem Exempel ausgedrückten Satz ſattſam erläutert.

§. 21 Wir hatten im vorhergehenden Paragraphen $\lambda : l = m : 1$ Iſt nun m eine poſitive Zahl und größer als 1, ſo iſt das Verhältniß $b : 1$ alsdenn m mal größer als $\beta : 1$. Es folget, weil $b = \beta^m$ iſt §. 20. Iſt m kleiner als 1, ſo iſt das Verhältniß $b : 1$ alsdenn m mal kleiner als $\beta : 1$. In dem Exempel des vorhergehenden §. war $m = \frac{3}{5}$ alſo $b : 1$ iſt in dieſem Exempel $\frac{3}{5}$ mal kleiner als $\beta : 1$.

Ueber-

Ueberhaupt wie wir ſchon einmal geſagt, ſind hier zwey Maasverhältniſſe für ein und eben daſſelbe Verhältniß y : 1. Es gehet hier wie bey würklichen Meſſungen, wo aber die Maasſtäbe verſchieden ſind, und doch durch beyde Meſſungen eine und eben die Größe, aber nur in verſchiedenen Ausdrücken dargeſtellet wird. Eine Diſtanz von 100 Ruthen, 10 Fuß auf die Ruthe gerechnet, würde 1000 Fuß lang ſeyn, und rechnete man auf die Ruthe 16 Fuß, ſo wäre ſie 1600 Fuß lang. Die Diſtanz bliebe eben dieſelbige, nur weil die Maßen verſchieden waren, wurde ſie verſchiedentlich ausgedrücket.

§. 22. Wir kommen auf eine wichtige Aufgabe, die uns in leichter Erfindung der Logarithmen einer Zahl ein großes Licht anzünden ſoll. Es kömmt darauf an, eine ganz allgemeine Gleichung zu finden, die uns anzeiget, wenn die **Grundzahl** oder **Baſis** b gegeben iſt, wie man in jedem logarithmiſchen Syſtem die Logarithmen zu jeder Zahl finden könne, oder wie der Logarithme jeder Zahl von dieſer Zahl alsdenn abhange.

Es ſey b die Grundzahl oder Baſis des Syſtems (z. E. bey den Briggeſchen Logarith. iſt b = 10 wenn die Zahl auch den Logarithmen 1 hat.

Es bedeute ferner n eine poſitive ganze Zahl, ſo iſt die Zahl $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ deſto kleiner, je größer n angenommen wird.

Z. E.

Z. E. wenn n = 20 oder n = 4 wäre, ſo iſt $b^{\frac{1}{n}}$ bey erſtrer Annahme viel kleiner als bey der leztern. Es ſey aber n ſo groß als es wolle, ſo kann doch die Größe $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ nie auf 1 kommen, ſondern muß immer etwas, wenns auch noch ſo wenig wäre, größer bleiben. Denn wenn $b^{\frac{1}{n}}$ n mal mit ſich ſelbſt multipliciret wird, muß es b werden. Wäre aber $b^{\frac{1}{n}}$ bis auf 1 gekommen, ſo mag es immer n mal mit ſich ſelbſt multipliciret werden, es wird immer 1 bleiben, welches es doch nicht, ſondern b werden ſoll, das, es ſey ſo viel oder wenig als es auch iſt, doch immer größer als 1 ſeyn muß.

Es wäre nun freylich möglich, aber ungemein weitläuftig und mühſam, wenn b und n gegeben wäre, den $\sqrt[n]{b}$ auszuziehen, wenn n irgends etwas groß wäre, auch wüßte man nicht jedesmal vorher, ob der $\sqrt[n]{b}$ eine rationale oder irrationale Zahl wäre. Es iſt nun freylich willkührlich, wie groß man b annimmt, wie das aus unſern vorhergehenden Paragraphen ſattſam erhellet. Wir wollen aber hier nun nicht jezt den $\sqrt[n]{b}$ ziehen, ſondern es umgekehrt machen und ſuchen, wie groß b ausfallen muß, wenn der $\sqrt[n]{b}$, wo n eine ganze poſitive Zahl ſeyn ſoll, und ſehr groß iſt

iſt), eine rationale Zahl wird, die nur um ein klein weniges größer als 1 iſt. Man ſetze alſo nach dieſer Vorausſetzung

$$\sqrt[n]{b} = 1 + \frac{1}{n}$$

zur Potenz n erhoben

$$b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

hier wollen wir nun die Potenzreihe des binomii hinſetzen. (§. 320 Arithm.) Es iſt alſo:

$$b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} . 1^{n-1} . \frac{1}{n} + \frac{n - n - 1.}{1.2} 1^{n-2} . \frac{1}{n^2} + \frac{n.n - 1.n - 2}{1.2.3} 1^{n-3} . \frac{1}{n^3} + \frac{n.n - 1.n - 2.n - 3}{1.2.3.4} 1^{n-4} . \frac{1}{n^4} \ldots\ldots$$

und weil 1, es ſey in welcher Potenz es wolle, immer 1 bleibet, und nicht multipliciret, ſo kann man es aus der Reihe weglaſſen, alſo

$$= 1 + 1 + \frac{n.n - 1}{1.2} . \frac{1}{n^2} + \frac{n.n - 1.n - 2}{1.2.3} . 1 + \frac{n.n - 1.n - 2.n - 3}{1.2.3.4} . \frac{1}{n^4} \ldots\ldots\ldots$$

und weil man die erſten beyden Glieder addiren kann, auch immer in den Zähler des Coefficienten n iſt, das ſich gegen die Potenz des Bruchs $\frac{1}{n}$ heben läßt

$$=2+\frac{n-1}{1.2.n}+\frac{n-1.n-2}{1.2.3.n^2}+\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4.n^3}$$

$$=2+\tfrac{1}{2}.\frac{n-1}{n}+\tfrac{1}{2.3}.\frac{n-1.n-2}{n^2}+\tfrac{1}{2.3.4}.$$

$$\frac{n-1.n-2.n-3}{n^3}$$ oder auch welches einerley =

$$2+\tfrac{1}{2}\frac{n-1}{n}+\tfrac{1}{2.3}\frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n}\ \tfrac{1}{2.3.4}.\frac{n-1}{n}$$

$$\frac{n-2}{n}.\frac{n-3}{n},$$ das iſt nun $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oder b.

bleibt n eine beſtimmte Größe, ſo wird auch dieſe Reihe bleiben und ſo viel Glieder haben, als n anzeiget. Ohngeachtet eine binomiſche Größe ſonſt allezeit n + 1 Glieder hat, ſo kann doch dieſe nur n Glieder haben, weil wir die erſten beyden Glieder zu einem Gliede gemacht haben. Sie hat alſo nur n Glieder, denn das n + 1 Glied enthält ſchon einen Faktor mit $n-n=0$, und ſo alle darauf folgende Glieder.

§. 23. Es ſey nun m eine andere poſitive ganze Zahl, ſo iſt $b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}$. Es war nun laut vorhergehenden §.
der $\sqrt[n]{b}$ angenommen $\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\sqrt[n]{b^m}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$$

das

das wollen wir wieder in eine Reihe nach dem binomio bringen. (§. 320 Arithm.) alſo.

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m =$$

$$1 + m \cdot \frac{1}{n} + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3}$$

$$+ \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1}{n^4} \ldots\ldots$$

oder auch $= 1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot$

$\frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} \cdot \frac{m-2}{n} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} \cdot \frac{m-2}{n} \cdot$

$\frac{m-3}{n} \ldots\ldots$

Außer dem erſten Gliede beſtehet die Reihe noch aus m Gliedern, denn das m + 1 nach dem erſten Gliede und alle folgende haben ſchon m — m = 0 zum Faktor mit.

Es iſt nun ferner laut §. 18. 20.

$\frac{m}{n}$ — $\log. b^{\frac{m}{n}} = \log. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$ laut Anfang dieſes §.

Es ſey alſo eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ gegeben, ſo wird man allezeit eine andere Zahl angeben kön-

nen, wovon $\frac{m}{n}$ der Logarithme iſt, und zwar in einem Syſteme, wovon die Grundzahl
$b = \left(1+\frac{1}{n}\right)^m = 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$
weil $\frac{m}{n}$ die Zahl der Verhältniſſe gleichfalls anzeiget, wie wir erkläret haben. In dieſem Syſteme iſt alſo $\frac{m}{n} = \log.\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$, wie wir ſchon in dieſem §. geſagt und gezeiget haben. Wäre nun noch eine rationale Zahl $\frac{\mu}{n}$ gegeben, ſo, ſie ſey Bruch oder nicht, mit $\frac{m}{n}$ doch einerley Nenner hat, ſo iſt ſogleich aus dem vorhergehenden einleuchtend, daß $b^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{b^{\mu}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ oder $\frac{\mu}{n} = l\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ ſey, und alſo die Grundzahl immer $b = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ bleibet.

Es bleibet auch $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ eint rationale Zahl, woferne μ eine ganze Zahl iſt.

Be

Behalten aber beyde Brüche nicht den gleichen Nenner n, ſo iſt wenigſtens nicht allemal $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ eine rationale Zahl.

§. 24. Alſo umgekehrt, wenn eine Zahl unter der allgemeinen Form $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}$ enthalten iſt, ſo iſt ihr Logarithme $= \frac{m}{n}$ in demjenigen Syſtem, wozu die Grundzahl $b = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}$ gehöret. Aber es kann nicht jede Rationalzahl unter der Form $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}$ enthalten ſeyn, denn ſonſt müſte man aus jeder Rationalzahl eine rationale mfache Wurzel ziehen können, und dieſe Wurzel müſte $1+\frac{1}{n}$ ſeyn, das gehet aber nicht immer an. Wenn z. E. in dieſem Syſteme $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m} = 10$ ſeyn ſollte, ſo müſte alſo $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ der $\sqrt[m]{}$ 10 ſeyn. Aber es giebt keine rationale Wurzel für 10; alſo hat auch 10 keinen rationalen Logarithmen in dieſem Syſtem, man mag m unter den ganzen Zahlen nehmen wie man will.

Aber es ſollen ſich doch beyde Werthe $1 + \frac{1}{n} = {}^{m}\sqrt{10}$ ſich der Gränze von 1 nähern. Weil n §. 22. ſehr groß, alſo $\frac{1}{n}$ ſehr klein ſeyn muß, und folgl. $1 + \frac{1}{n}$ nur ungemein wenig über 1 ſeyn muß, ſo ſiehet man daher auch bald ein, daß m auch ſehr groß muß angenommen werden, wenn der ${}^{m}\sqrt{10}$ nur wenig über 1 ſeyn ſoll.

Und nun überhaupt allgemein: jeder Gleichung $1 + \frac{1}{n} = {}^{m}\sqrt{N}$, wenn N eine gegebne rationale Zahl bedeutet, wird ein Genüge geſchehen, wenn man für die Grundzahl des Syſtems, $b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$, die n ſehr groß, alſo $\frac{1}{n}$ als einen unendlich kleinen Bruch annimmt.

§. 25. Wir hatten nun §. 24 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m}$ wodurch man eine Zahl in d. Syſtem, deren Grundzahl $= b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ iſt, andeutet, und der Logarithme dieſer obgedachten Zahl war $\frac{m}{n}$. Es bedeute nun $1 + x$ jede Zahl, wie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m}$ auch bedeutete, ſo iſt alſo

(1+

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m = 1+x$$

——————— $\sqrt[m]{}$ ausgezogen

$$1+\frac{1}{n} = \sqrt[m]{(1+x)} = (1+x)^{\frac{1}{m}}$$

alſo $\frac{1}{n} = (1+x)^{\frac{1}{m}} - 1$

——————— . m

$$\frac{m}{n} = m\left((1+x)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

——————— aber

$\frac{m}{n} = \log.\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$ §. 23. $= \log.(1+x)$ wie oben

——————— alſo ſubſtit.

$$\log.(1+x) = m\left((1+x)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

wir haben es ſchon geſagt, daß $1+x$ jede Zahl bedeuten kann.

Nun war die Grundzahl §. 22 b $= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= 2 + \frac{1}{2}.\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2.3}.\frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n} + \frac{1}{2.3.4}.\frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n}.\frac{n-3}{n}\ldots\ldots$$

Weil wir nun n unendlich groß angenommen haben, ſo wird $\frac{n-1}{n}$ unendlich wenig von 1 verſchieden

 ſeyn.

ſeyn. Denn $\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, und $\frac{n-2}{n} = \frac{n}{n} - \frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$. Man kann alſo die Faktoren, wo n iſt, weglaſſen, da ſie immer eine kleinere Größe ausmachen, und $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n}$ ſchon kleiner, und weit kleiner als $\frac{n-1}{n}$ iſt. Denn

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} = 1 - \frac{1}{n} \cdot 1 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$$

Da n unendlich groß iſt, ſo ſind die Brüche, die n zum Nenner haben, als ſehr klein anzuſehen, und können alſo negligiret werden.

Wenn man die Faktoren, wo n in iſt, wegläſt, ſo ſoll die Reihe einen andern Namen haben und ſie mag denn β heißen. Man bekömmt dann zwar eigentlich nicht den Werth von b, ſondern **nur die Gränze dieſes Werths**, weil die Faktoren, worin n iſt, doch die Reihe um etwas weniges verändert hätten. Geſchiehet dieſes, ſo wird $\beta = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} \ldots\ldots = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} + \frac{1}{3628800} \ldots\ldots\ldots$ und dieſes in Decimalbrüche gebracht giebt

$$\beta = 2{,}718281828459045235360028.\ \ldots\ldots$$

§. 26.

§. 26. Es iſt ferner noch ein Ausdruck für log. $(1 + x = m\left((1+x)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$ zu ſuchen.

Nach §. 320 und 322 Arithm. iſt:

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}\, 1^{\frac{1}{m}-1} x + \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}-1}{1.2}\, 1^{\frac{1}{m}-2} x^2 + \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}-1\cdot\frac{1}{m}-2}{1.2.3}\, 1^{\frac{1}{m}-3} x^3 + \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}-1\cdot\frac{1}{m}-2\cdot\frac{1}{m}-3}{1.2.3.4}\, 1^{\frac{1}{m}-4} x^4$$

und ſo weiter und wenn man die Potenzen von 1 wegläſt, die immer 1 bleiben und nicht multipliciren, $= 1 + \frac{1}{m}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)x^2 + \frac{1}{2.3}\,\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{m}-2\right)x^3 + \frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{m}-3\right)x^4 \ldots$ und ſo weiter. Es wird dieſe Reihe $= \frac{1}{n}$ §. 25 $= (1+x)^{\frac{1}{m}} - 1.$, wenn man gleich vorne die 1 davon wegnimmt, und ſie wird $= \frac{1}{m}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right)x^2 + \frac{1}{2.3}\,\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{m}-2\right)x^3 + \frac{1}{2.3.4}\,\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{m}-3\right)x^4$

und ſo weiter, und alſo §. 25 $\frac{m}{n} = m\left((1+x)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$ wird nun eben vorhergehende Reihe mit m multipliciret werden dürfen, ſie wird alsdenn =

$$x + \tfrac{1}{2} - \left(\frac{1}{m} - 1\right)x^2 + \tfrac{1}{2.3}\cdot\left(\frac{1}{m} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{m} - 2\right)x^3$$

$$+ \tfrac{1}{2.3.4}\cdot\left(\frac{1}{m} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{m} - 2\right)\cdot\left(\frac{1}{m} - 3\right)x^4 \ldots$$

u. ſ. w.

Es wäre alſo dieſe letzte Reihe der Logarithme von $1 + x$ §. 25 oder von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$. Aber damit dieſer Logarithme auf die β, darin ſich die Grundzahl b verändert hat, paſſe, §. 25 müſſen auch die Faktoren, darin m vorkömmt, wegfallen, weil $\frac{1}{m}$ ein unendlich kleiner Bruch iſt §. 24. Indeſſen verändern doch dieſe Faktoren die Zeichen der Reihe, und es wird

$$\log.(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 \ldots\ldots$$

man ſiehet ſchon wie die Reihe fortgehet. Im §. 23 war $b^{\frac{m}{n}} =$

$$1 + \frac{m}{n} + \tfrac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - 1\right) + \tfrac{1}{2.3}\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m}{n} - 1\right)\cdot$$

$$\left(\frac{m}{n} - 2\right) + \tfrac{1}{2.3.4}\cdot\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - 1\right)\cdot\left(\frac{m}{n} - 2\right)\cdot\left(\frac{m}{n} - 3\right) \text{ꝛc.}$$

=

$$= 1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}\,\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{m}{n} - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2.3.4}\,\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{m}{n} - \frac{2}{n}\right)\cdot\left(\frac{m}{n} - \frac{3}{n}\right) \&c.$$

Wird nun, wie ſchon geſchehen, $\frac{1}{n}$ als ein unendlich kleiner Bruch betrachtet, ſo kann er wegfallen, wie wir ſchon mehrmals bemerket haben, und die Reihe wird folgende.

$$1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{m^3}{n^3} + \frac{1}{24}\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{120}\frac{m^5}{n^5} + \frac{1}{720}\frac{m^6}{n^6} \text{ ꝛc.}$$

Es wird alsdenn aus b die β §. 25.

Nun ſey, um die Reihe bequemer auszudrücken, $\frac{m}{n} = z$, oder der Logarithme von $\beta = z$, ſo wird $\beta^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 \ldots\ldots$

§. 28. Dasjenige Logarithmen-Syſtem nennet man nun das natürliche Syſtem, deſſen Grundzahl die Gränze des Werths $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \beta$ iſt, und deſſen Logarithmen nennet man die natürlichen Logarithmen. Man nennt ſie auch wol die hyperboliſchen Logarithmen, weil ſie in der

der Integralrechnung zur Integration der Hyperbel, und überhaupt in der Integralrechnung gebraucht werden. Alle übrigen Syſteme, wovon aber nur vornemlich das Briggeſche in Gebrauch iſt, heißen künſtliche Syſteme, und ihre Logarithmen künſtliche Logarithmen.

Es ſey nun §. 26. $1 + x = y$. Nun ſchreibt man, nachdem man den natürlichen oder den künſtlichen Logarithmen ausdrücken will,

$$\text{lxg. nat. } y \text{ oder log. artif. } y.$$

Wir hatten nun §. 26.

$\lambda : l = m : 1$ oder auch $l : \lambda = 1 : m$.

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{m}$$

oder wenn l den log. artif. y von irgend einer Zahl in dem künſtlichen Syſtem bedeutet, und λ den log. nat. y von einer Zahl in dem natürlichen Syſtem, 1 der Logarithme der Grundzahl in einem künſtlichen Syſtem, (wie es zum Exempel der Logarithme der Grundzahl, der 10 in dem Briggeſchen Syſtem iſt) m der Logarithme der Grundzahl in dem natürlichen Syſtem; ſo iſt, da $\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{m}$ anſtatt der Zeichen, was ihnen zukömmt, hingeſetzt

$$\frac{\text{log. art. } y}{\text{log. nat. } y} = \frac{\text{log. artif. } b}{\text{log. nat } b}$$ oder der Grundſatz

folglich $\text{log. artif. } y = \frac{\text{log. artif. } b \text{ log. nat. } y}{\text{log. nat. } b}$.

aber

aber log. artif. b oder der Logarithme der Grundzahl in einem künſtlichen Syſtem iſt = 1.

alſo log. artif. $y = 1 . \frac{\text{log. nat. } y}{\text{log. nat. } b}$

oder log. artif. $y = \frac{\text{log. nat. } y}{\text{log. nat. } b}$

Man ſiehet hier ſchon zum voraus, daß ſich der künſtliche Logarithme aus den natürlichen wird finden laſſen, eben ſo wie ſich der natürliche Logarithme aus den künſtlichen finden läßt. Denn iſt log. artif. y. $= \frac{\text{log. nat. } y}{\text{log. nat. } b.}$

So iſt log. artif. y. log. nat. b = log. nat. y.

Der Ausdruck $\frac{1}{\text{log. nat. } b.}$ heißt der **Modulus** des zur Grundzahl b gehörigen Logarithmen-Syſtems (wir werden unten ſehen, wozu das zu gebrauchen iſt). Hiernach iſt nun der **Modulus** des natürlichen Syſtems = 1, weil wir aber geſehen haben, da darin $b = 1 + \frac{1}{n}$ es ſich in β verwandelt, wenn $\frac{1}{n}$ als ein unendlich geringer Bruch anzuſehen iſt, der negligirt werden kann, alſo log. nat. β oder der log. der Grundzahl in dem natürlichen Syſtem auch = 1 iſt.

§. 29.

§. 29. Wir hatten §. 28 log. artif. y $= \frac{1}{\text{log. nat. b.}} . \text{log. nat. y.}$ Es ſey nun einmal λ ein gegebener Logarithme zu einem künſtlichen Syſteme, das die Grundzahl b hat, die geſuchte Zahl ſey y, ſo wäre λ = log. artif. y $= \frac{1}{\text{log. nat. b}} . \text{log. nat. y.}$ Wir wollen nun der Kürze halben l y anſtatt log. nat. y, und anſtatt log. nat. b, blos l. b. ſetzen. So wäre $\lambda = \frac{1 . \text{l. y}}{\text{l. b}}$

alſo $\lambda . \text{l. b} = \text{l y}$

Es ſey nun §. 26. $1 + x = y$.

Es ſey auch ferner $\text{ly} = z$, ſo hätten wir in dem natürlichen Syſtem eine Reihe für β^z oder für jede Zahl in dieſem Syſtem, weil die Grundzahl in der Potenz z ganz allgemein alle Zahlen ausdrücken kann.

Es war aber §. 27.

$\beta^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 \ldots\ldots$

nun fanden wir eben für $\text{l y} = z$ den Ausdruck $\lambda . \text{l b} = \text{l y}$, wo, wenn wir es uns noch erinnern, λ den log. artif. y und l b den log. nat. b. bedeutete.

Alſo ſtatt z die λ . l b in die Gleichung geſetzt,

ſo

ſo wird:

$$\beta = 1 + \lambda . lb + \tfrac{1}{2}(\lambda . lb)^2 + \tfrac{1}{6}(\lambda . lb)^3 + \tfrac{1}{24}(\lambda . lb)^4 + \tfrac{1}{120}(\lambda . lb)^5 + \tfrac{1}{720} . (\lambda . lb)^6 \ldots\ldots$$

oder $$\beta^2 = 1 + \lambda . lb . + \tfrac{1}{2}\lambda^2 (lb)^2 + \tfrac{1}{6}\lambda^3 . (lb)^3 + \tfrac{1}{24}\lambda^4 . (lb)^4 + \tfrac{1}{120}\lambda^5 (lb)^5 + \tfrac{1}{720}\lambda^6 . (lb)^6 \ldots$$

oder auch $$\beta z = 1 + \lambda . lb + \tfrac{1}{2}\lambda^2 (lb)^2 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{3}\lambda^3 . (lb)^3 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{4}\lambda^4 (lb)^4 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{4} . \tfrac{1}{5}\lambda^5 (lb)^5 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{4} . \tfrac{1}{5} . \tfrac{1}{6}\lambda^6 (lb)^6 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Das wäre nun für jede Zahl in dem natürlichen Syſteme, wenn nemlich der gegebene Logarithme für eine Zahl in einem künſtlichen Syſteme bekannt iſt. Imgleichen auch der natürliche Logarithme für dieſe Zahl, imgleichen auch der Logarithme der Grundzahl des natürlichen Syſtems. Man kann alſo aus dieſen Datis, obſchon herzlich mühſam, die Zahl in dem natürlichen Syſteme finden.

§. 30. Die natürlichen Logarithmen von den natürlichen kleinen Zahlen ſind mühſam und weitläuftig zu finden, wenn man ſie nur in einigen Decimalſtellen richtig haben will. Je größer aber die Zahlen werden, deſto mehr wird die Arbeit erleichtert, weil die Differenzen der Logarithmen nicht mehr ſo groß ſind, und weil man den vorhergehenden Logarithmen dazu gebrauchen kann, welches freylich bey allen angehet.

Man hätte z. E. den log. y ſchon gefunden, ſo iſt log. y + 1 auch bald zu finden. Wir wollen nur für y + 1 Bequemlichkeits halber einen andern

dern Ausdruck ſetzen. Es kann aber $y + 1$ auch ſo ausgedrückt werden: $\log. y + 1 = \log. (y(1 + \frac{1}{y}) = \log. y + \log. (1 + \frac{1}{y})$.

Es iſt aber nach der Analogie von $1 + x$. §. 26. $\log. 1 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{y^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{y^4} + \frac{1}{5}\frac{1}{y^5} - \frac{1}{6}\frac{1}{y^6} + \frac{1}{7}\frac{1}{y^7} - \frac{1}{8}\frac{1}{y^8} \ldots\ldots$

Wir wollen hievon ein Exempel geben. Geſetzt, man hätte den natürlichen Logarithmen von 2 ſchon gefunden, (unten werden wir eine Anweiſung geben, wie man ihn und alle andre ſehr viel leichter und geſchwinder als durch die Reihe von $1 + x$ §. 26 findet) geſetzt, man hätte ihn ſchon gefunden, und es wäre auf 7 Decimalſtellen log nat. $2 = 0{,}6931471$, und man wollte nun den log. nat. 3 haben, ſo wäre das alſo log. nat. $(y + 1)$ und hier log. nat. $(2 + 1)$ = log. nat. $3 = \log. (y\left(1 + \frac{1}{y}\right)$ hier $= \log. (2 (1 + \frac{1}{2})$ $= \log. 2 + \log. (1 + \frac{1}{2})$ und $\log. (1 + \frac{1}{2})$ wäre laut eben vorhergegangener Reihe $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} . \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4} . \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5} . \frac{1}{2^5} - \frac{1}{6} . \frac{1}{2^6} + \frac{1}{7} . \frac{1}{2^7} - \frac{1}{8} . \frac{1}{2^8} + \frac{1}{9} . \frac{1}{2^9} - \frac{1}{10} . \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{11} . \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{12} . \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{13} . \frac{1}{2^{13}} - \frac{1}{14} . \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{15} . \frac{1}{2^{15}} - \frac{1}{16} . \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{17} . \frac{1}{2^{17}} - \frac{1}{18} . \frac{1}{2^{18}} \ldots\ldots$

Dieſes

Dieſes mag von der Reihe genug ſeyn. Alle Glieder nun gehörig jedes in **einen** Bruch verwandelt durch die Multiplikation mit ſeinen Faktoren, ſo giebt es folgende Reihe:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4608} - \frac{1}{10240} + \frac{1}{22528} - \frac{1}{49152} + \frac{1}{106496} - \frac{1}{229376} + \frac{1}{491520} - \frac{1}{1048576} + \frac{1}{2228224}$$ u. ſ. w.

Wenn man die Brüche alle in Decimalbrüche, wenigſtens von 12 Stellen verwandelt, alsdenn alle Plus- und alle Minusgrößen zuſammen addirt, und die Minusgrößen von den Plusgrößen abziehet, ſo kommt folgende Größe heraus,

	0,4054657162
dazu addiret log. nat.	2 = 0,6931471805
ſo kömmt heraus	1,0986128967

= log. (y+1); hier log. (2+1) = log. 3, welcher in den vorderen 6 Decimalſtellen richtig iſt. Man hätte die Reihe noch viel länger machen müſſen, wenn er in mehr Decimalſtellen hätte richtig ſeyn ſollen, welches auch leicht begreiflich iſt, indem die Zeichen ſo abwechſeln. Daß er aber in den erſten 6 Decimalſtellen richtig iſt, iſt daraus erſichtlich, weil die hinterſten Glieder, wenn ſie in Decimalbrüche verwandelt werden, voran ſo viel Nullen bekommen, daß weder ihre Addition noch Subtraktion auf die vordern Zahlen mehr Einfluß hat, wie ein jeder bey Machung der Reihe ſelbſt finden wird.

§. 31. Wir hatten §. 26 log. nat. $(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 \ldots\ldots\ldots$

Da x eine jede Zahl, alſo auch 1 und 2 vorſtellen kann, ſo laſſen ſich hiedurch die Logarithmen aller Zahlen, alſo auch von 2 finden, wenn man $x = 1$ ſetzte. Allein das geſchiehet in den niedrigen Zahlen vorzüglich erſtaunend langſam, und will ich es niemand rathen auf die Art den Logarithmen zu ſuchen, ſeine Geduld würde bald ermüdet werden. Um den Logarithmen von 2 nur auf wenige Decimalſtellen richtig zu finden, muß man über 100 Glieder berechnen, weil die aus der Reihe entſtehende Größen ſich ſehr langſam ändern. Wenn der Logarithme richtig iſt, lehret der Schlus des vorhergehenden §., der auch hier applicabel iſt.

Wir wollen alſo eine kürzere Methode zeigen, die eine Reihe aus bloßen Plusgrößen giebet, und da x eine veränderliche Größe iſt, hier angewendet werden kann, und auch würklich angewendet wird. Wir wollen einmal die Reihe des log. $(1+x)$ machen, und alsdenn auch die Reihe log. $(1-x)$, wir erhalten dadurch log $\frac{1+x}{1-x}$, wenn wir beyde Reihen von einander abziehen, weil wir alsdenn dadurch, laut der Behandlung der Potenzen, den log. $\frac{1+x}{1-x}$ bekommen.

Da laut §. 26. log. $(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}x^{10} - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{12}x^{12}$ &c. &c. iſt, ſo iſt nach eben dem Paragraphen 26

$\log.(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} - \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{12}x^{12}$ &c. &c.

Es wird nun $l\frac{(1+x)}{(1-x)} = \log.(1+x) - \log.(1-x)$ und nun die Reihen dafür geſetzet.

$$\log.(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} \text{ ꝛc.}$$

$$\log.(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10}$$

und ſubtr. $+ 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9$

Die ganze Reihe kann nun leicht fortgeſetzt werden. Sie iſt.

$2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9 + \frac{2}{11}x^{11} + \frac{2}{13}x^{13} + \frac{2}{15}x^{15} + \frac{2}{17}x^{17} + \frac{2}{19}x^{19}$ u. ſ. w. Man ſiehet das Geſetz, ohne mein Erinnern. Da 2 ein Faktor communis iſt, ſo wird die Reihe auch alſo erſcheinen können, das auch bequemer iſt. =

$2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{17}x^{17} + \frac{1}{19}x^{19}$ &c. &c.) =

$$\log. \frac{(1+x)}{1-x}$$

Da x eine veränderliche Größe iſt, ſo wollen wir 1−x, es ſey nun was es wolle, p nennen und 1+x ſoll p+q heißen, welches auch ſehr gut angehet, weil aus der Größe, die entſtehet, wenn ich von 1 die x abziehe, doch noch durchaus was zugeſetzet werden muß, wenn es (1+x) werden ſoll. Alſo:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{p+q}{p}$$

folglich

$$\frac{p+px}{1-x} = p+q$$

folglich

$$p+px = +p+q-px-qx$$

folglich

$$2px+qx = p-p+q$$

oder

$$(2p+q)x = q$$

alſo

$$x = \frac{q}{2p+q}$$

hier

hier muß nun allezeit nach dem angenommenen Werthe von p und q die x beſtimmet werden.

Nachdem man nun p und q annimmt, bekommt man die Logarithmen, und iſt die Summe von p und q die Zahl, für welche man den Logarithmen haben will.

Wir wollen nun einmal $p = q = 1$ annehmen,

ſo iſt $x = \frac{q}{2p+q} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ alſo $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$ $= \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Alſo iſt hier log. $\frac{1+x}{1-x}$ = log. 2.

Und nun in die Reihe anſtatt x die $\frac{1}{3}$ geſetzet, ſo wird aus der Reihe:

$2(x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{15}x^{15} + \frac{1}{17}x^{17} \ldots$ folgende:

$2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}^7 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3}^9 + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3}^{11} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3}^{13} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3}^{15} + \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{3}^{17}$ &c.

Auf die Art wäre alſo der natürliche Logarithme von 2 gefunden. Wir wollen die Reihe würklich in Decimalbrüchen ausdrücken.

$\frac{1}{3} = 0,3333333333$
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}^3 = 0,0123456790$
$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}^5 = 0,0008230452$
$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}^7 = 0,0000653210$
$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3}^9 = 0,0000056450$
$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3}^{11} = 0,0000005131$
$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3}^{13} = 0,0000000482$
$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3}^{15} = 0,0000000046$
$\frac{1}{17} \cdot \frac{1}{3}^{17} = 0,0000000004$

——————————addirt

0,3465735898

2 noch mit 2 multiplicirt

0,6931471796

Dieſes iſt nun der natürliche Logarithme von 2, der auf 6 Decimalſtellen richtig iſt. Man ſiehet das auch leicht ein, weil zu dieſen Decimalſtellen nichts mehr addiret würde, wenn man auch die Reihe noch weiter fortgeſetzet hätte. Man hätte ihn durch die Fortſetzung auf ſo viel Decimalſtellen, als man gewollt hätte, richtig bekommen können.

§. 32. Wir wollen doch noch einige Beyſpiele geben, wie man die Logarithmen findet, damit unſere Leſer es deſto bequemer nachmachen können.

Es ſey $p = 2$ und $q = 1$, ſo iſt $x = \frac{q}{2p+q} = \frac{1}{4+1}$ alſo $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{6}{5} : \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, da nun $\frac{3}{2} . 2 = 3$ iſt, ſo wird $\log. \frac{3}{2} + \log. 2 = \log. 3$ ſeyn. Und die Reihe

von

von log. 3 würde alſo ſeyn: log. $2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{5^{13}}\right.$ &c.

log. 4 iſt 2 log. 2 wie bekannt iſt &c.

Es ſey nun $p = 4$. $q = 1$, ſo iſt $x = \frac{q}{2p+q} = \frac{1}{8+1} = \frac{1}{9}$ und $\frac{1+x}{1-x} = \frac{10}{9} : \frac{8}{9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{8}$ $= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ und $\frac{5}{4}\cdot 4 = 5$, alſo log. $5 =$ log. 4 $+$ log. $\frac{5}{4}$ und alſo log. $5 =$ log. $4+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{9^{11}}\right.$ &c.

log. $6 =$ log. $2 +$ log. 3.

log. $7 =$ log. $6+2\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{13^5}\right.$ u. ſ. w.

log. $8 =$ log. $4 +$ log. 2.

log. $9 = 3$ log. 3.

log. $10 =$ log. $5 +$ log. 2 u. ſ. w.

Bey großen Zahlen, die ſich in Faktores auflöſen laſſen, iſt, wie bekannt, der Logarithme der Zahl = der Summe der Logarithmen der Faktoren. Sind es Primzahlen, ſo ſuche man erſt der Logarithmen der nächſt kleinern graden Zahl (denn alle Primzahlen außer 2 ſind ungerade, obſchon nicht alle ungrade Zahlen Primzahlen ſind). Dieſen Logarithmen ſuche man durch die Addition der Logarithmen der Faktoren der Zahl, und addire nach der gezeigten Art, was noch hinzu kömmt, wenn die Zahl um 1 größer wird, ſo hat man den Logarithmen dieſer Primzahl.

Ein Exempel: Wir wollen den natürlichen Logarithmen von 61 ſuchen, welches eine Primzahl iſt, und nun annehmen, der Logarithme von 60 ſey ſchon gefunden, oder da er aus log. 2 + log. 3 + log. 10 beſtehet, ſo mögen die Logarithmen dieſer Zahlen ſchon gefunden ſeyn. Es iſt nun

$$\begin{aligned} \log.\ nat.\ 2 &= 0{,}6931471805 \\ \log.\ nat.\ 3 &= 1{,}0986122886 \\ \log.\ nat.\ 10 &= 2{,}3025850929 \\ \hline \log.\ nat.\ 60 &= 4{,}0943445620 \end{aligned}$$

Es ſey nun $p = 60$ und $q = 1$.

ſo iſt $x = \frac{q}{2p+q}$ hier $= \frac{1}{120+1} = \frac{1}{121}$, alſo

$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{121}}{1-\frac{1}{121}} = \frac{122}{121} : \frac{120}{121} = \frac{122}{121} \cdot \frac{121}{120} = \frac{122}{120} = \frac{61}{60}$ nun iſt aber $\frac{61}{60} \cdot 60 = 61$, alſo

log. nat. $\frac{61}{60}$ + log. 60 = log. nat. 61.

Da x hier $\frac{1}{121}$ iſt, ſo iſt die Reihe §. 31.

$2\left(\frac{1}{121} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{121^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{121^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{121^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{121^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{121^{11}}\right.$ ...... u. ſ. w. Nun iſt.

$\frac{1}{121} = 0,0082644628099\,1$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{121^3} = 0,0000000188157\,97$

$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{121^5} = 0,0000000000007\,71$

das mag genug ſeyn, addirt dazu log. nat. von 60 add.

das mag genug	0,0082646509755\,9	
ſeyn, addirt da-	2	multipl. mit 2
zu log. nat.	0,0165293019511\,8	
von 60 add.	4,0943445622221\,0	
	4,1108738641732\,8	welches der log. nat. von 61 iſt

Dieſer iſt auf 12 Decimalſtellen richtig, welches man auch gleich daraus ſiehet, weil zu den erſten 12 Gliedern der Reihe ſchon bey $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{121^5}$ nichts mehr zu addiren kömmt, und der log. nat. von 60 völlig richtig genommen wurde. Man ſiehet auch hieraus, daß, wenn die Zahlen, für welche man natürliche Logarithmen ſuchet, nur irgends groß ſind, die Rechnung ſich bald abkürzet.

§. 33. Wir kommen zu den künſtlichen Logarithmen, und vorzüglich zu den Briggeſchen.

Es iſt gegeben der zu einer bekannten Zahl gehörige Logarithme eines künſtlichen Syſtems, man ſoll den Modulus m des künſtlichen Syſtems, imgleichen die Grundzahl b des Syſtems finden. Auflöſung. Es war §. 28.

 log.

$$\text{log. artif. } y = \frac{1}{\text{log. nat. } b} \cdot \text{log. nat. } y$$

und den modulum oder m fanden wir daſelbſt

$$m = \frac{1}{\text{log. nat. } b}$$

alſo ſubſtit. $\text{log. artif. } y = m \cdot \text{log. nat } y$

folglich $\dfrac{\text{log. artif. } y}{\text{log. nat. } y} = m$

Nun war $\text{log. artif. } y = \dfrac{\text{log. nat. } y}{\text{log. nat. } b}$

alſo $\text{log. artif. } y \cdot \text{log. nat. } b = \text{log. nat. } y.$

folglich $\text{log. nat. } b = \dfrac{\text{log. nat. } y}{\text{log. artif. } y}$

da $\dfrac{\text{log. artif. } y}{\text{log. nat. } y} = m$, ſo iſt $\dfrac{\text{log. nat. } y}{\text{log. artif. } y} = \dfrac{1}{m}$
ex antec.
oder auch $= \text{log. nat. } b.$

Dieſes ſey nun $= z$. Es iſt alſo laut §. 29 und den dort angeführten Gründen

$$\beta^z = 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} \text{ \&c.}$$

Exempel: Es iſt völlig gleich, wie y gewählet wird, es mag alſo = 96 ſeyn. Wir wollen nun erſt den Modulum des Briggeſchen Syſtems ſuchen. Alſo aus dem vorhergehenden $m = \frac{\text{log. brigg. } 96}{\text{log. nat. } 96}$ oder würklich $\frac{1,9822712 \ldots}{4,5643481 \ldots}$ oder würklich dividiret, 0,434294481903 .... = modulo des Briggeſchen Syſtems. Wir avanciren, daß hiemit die hyperboliſchen oder natürlichen Logarithmen müſſen multipliciret werden, um ſie in Briggeſche zu verwandeln. Wüſte man auch die Logarithmen einer Zahl in dem Briggeſchen Syſteme nicht, ſo weiß man doch gewiß, wie die Logarithmen der Potenzen der 10 ſind, nemlich 1, 2, 3 ꝛc. Es ſey nun y = 10, ſo iſt $\frac{\text{log. brigg. } 10}{\text{log. nat. } 10} = \frac{1,}{2,30258509}$, und würklich dividiret, giebt es eben das vorhergehende oder 0,4342944 8 .... = modulo des Briggeſchen Syſtems.

Nun die Grundzahl des Briggeſchen Syſtems. Es war $z = \frac{\text{log. nat. } y}{\text{log. artif. } y}$. Wir

können für y nehmen, was wir wollen. Wir wollen y wieder = 10 nehmen, wovon man den Logarithmen in dem Briggeſchen Syſtem gewiß weiß, er iſt nemlich = 1. Alſo z hier $\frac{2,30258509\ldots}{1.}$ = 2,30258509.... Wir wollen nur hier die 4 erſten Zahlen nehmen, um uns das Multipliciren zu erſparen. Die Briggeſche Grundzahl wird doch nicht ſtrenge herauskommen, wenn wir auch eine noch ſo lange Reihe nähmen, weil z eine unendliche Reihe iſt. Wir werden aber doch auch ſchon mit wenig Zahlen finden, daß ſich unſer Reſultat der 10 ſehr nähert, welches die Grundzahl des Briggeſchen Syſtems iſt.

Die Reihe war §. 27.

$$\beta^z = 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{24}z^4 + \tfrac{1}{120}z^5 + \tfrac{1}{720}z^6 \ldots$$

Es iſt alſo

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ z &= 2,3025\ldots \\ \tfrac{1}{2}z^2 &= 2,650753\ldots\ldots \\ \tfrac{1}{6}z^3 &= 2,034450\ldots\ldots \\ \tfrac{1}{24}z^4 &= 1,171080 \\ \tfrac{1}{120}z^5 &= 0,539281 \\ \tfrac{1}{720}z^6 &= 0,206949 \\ \hline & \quad 9,905013\ldots \end{aligned}$$

Je

Je weiter man fortſetzet in den Potenzen von z, je näher wird man 10 kommen.

§. 34. Man fand die Zahl, womit die hyperboliſchen Logarithmen multipliciret werden müſſen, um die Briggeſchen, die wir gewöhnlich gebrauchen, heraus zu bringen, §. 33 nach der Formel $\frac{\text{log. brigg. } y}{\text{log. nat. } y}$. Es iſt ſehr begreiflich, daß, wenn man die Formel umkehret, man die Zahl finden wird, wodurch man, wenn man die Briggeſchen Logarithmen damit multipliciret, ſie in hyperboliſche oder natürliche verwandeln kann. Alſo $\frac{\text{log. nat. } y}{\text{log. brigg. } y}$ giebt die Zahl, wie auch aus der Sache ſelbſt und den Verhältniſſen §. 20 erhellet. Es iſt gleich viel, wie man y nimmt. Das Verhältniß bleibt immer daſſelbe. Weil wir den natürlichen Logarithmen von 61 berechnet haben, ſo mag $y = 61$ ſeyn: alſo $\frac{\text{log. nat. } 61}{\text{log. brigg. } y}$ hier $\frac{4{,}1108738\ldots\ldots\ldots}{1{,}7853298\ldots\ldots\ldots}$ würklich dividiret, giebt 2,302585092994 . . . multipliciret man damit einen Briggeſchen Logarithmen, ſo kömmt der hyperboliſche oder natürliche heraus. Ein Exempel mag es erläutern. Der Briggeſche Logarithme von 125 iſt = 2,0969100. Wir wollen die erſten vier Ziffern der angegebenen Zahl zum Multiplikator nehmen, um die Mühe zu erſparen.

Alſo

Alſo 2,0969100
2,3025
―――――――
104845500
41938200
629073000
41938200
―――――――――
4,82813527500

dieſes muß nun der natürliche Logarithme von 125 ſeyn, wie ſich auch nach Unterſuchung finden muß, und finden wird, daß er in den erſten Zahlen richtig iſt. Je mehr Zahlen man nimmt, je richtiger wird er ſeyn. Hätte man es mit allen den Zahlen multipliciret, ſo würde man ihn von 7–8 Decimalſtellen richtig bekommen haben.

§. 35. Wenn man die natürlichen Logarithmen vorher berechnet hat, ſo laſſen ſich die Logarithmen eines jeden andern Syſtems leicht finden, wenn man nur den natürlichen Logarithmen mit dem modulo des künſtlichen multipliciret, wie §. 33 lehret. Ein Exempel wird das erläutern, und zugleich, wenn man die Logarithmen nicht weiter als 7 Decimalſtellen haben will, eine bequeme Verkürzung anzeigen. Man kann immer um eine Zahl weniger die Multiplikation anfangen. Beygehendes Exempel wird es zeigen, wie wir es gemacht haben, und man wird auch den Grund da-

von

von ohne mein Erinnern einſehen. Man fängt von der erſten Zahl linker Hand im Multiplikator an.

Exempel. Man will den Briggeſchen Logarithmen von 125 haben. Der modulus des Briggeſchen Syſtems iſt §. 33.

0,4342944819. . . . . der natürliche Logarithme von 125 iſt

	4.8283137373
multipliciret	0.4342944819
mit dem modulo des Briggeſchen Syſtems	193132549492
	14484941211
	1931325492
	96566274
	43454817
	1931324
	193132
	38624
	482
	432
	2,0969100128 0

Dieſer Briggeſche Logarithme von 125 iſt gewiß auf 7 Decimalſtellen richtig. Man wird nach dieſem Exempel ſo viel andre, als man will, verfertigen können.

§. 36. Es mag dieſes genug für dieſe Abhandlung ſeyn. Die Behandlung der Logarithmen, wenn man damit rechnet, lehret das 17te

Kapitel der Arithmetik ſattſam, welches, wie leicht einſichtlich, für alle Logarithmenſyſteme, alſo auch für die natürlichen gilt. In den 1778 herausgekommenen Schulziſchen Tafeln findet man nebſt vielen andern nützlichen Dingen, auch die natürlichen Logarithmen von 1 bis 10000, wie auch die natürlichen Logarithmen der Linien des Cirkels. Es ſind überhaupt dieſe logarithmiſchen Tafeln ſehr zu empfehlen.

Ende des erſten Theils.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Häseler, Johann F.

Johann Friedrich Häselers Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie zum eignen Unterricht, vorzüglich für Hauslehrer und Gelehrte, welche diese Wissenschaften nicht zur Hauptbeschäftigung machen
Bd.: 1

Lemgo 1802

Math.u. 65 m-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625406-5
VD18 15466620-001